

# ФОРМАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА МНОГОПРОЛЕТНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

С.В.Бондарь      ОГАСА, г.Одесса

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в [1] приведены расчетные формулы для одно-, двух- и трехпролетных панелей с заполнителем из пенопласта. Длина панелей ограничена максимальным расстоянием между соседними опорами и не превышает девяти метров. Технологически возможно изготовление и монтаж панелей большей длины при большем количестве пролетов. В этом случае аналитическое определение НДС достаточно трудоемко, а при использовании ЭВМ требуется большой объем памяти. Представляет интерес формализация вычислительного процесса при расчете таких конструкций для часто встречающегося случая симметричного воздействия поперечной нагрузки и температурного перепада.

Зависимости между усилиями и деформациями в поперечном сечении трехслойной панели при общепринятых допущениях [1,2,3] определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} M_s &= B_s(\chi_2' + \vartheta) = B_s(\chi' - \omega'' + \vartheta); & M_o &= -B_o \omega''; & M_u &= -B_u \omega'' \\ Q_s &= A\chi; & Q_o &= -B_o \omega'''; & Q_u &= -B_u \omega''' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $B_s$  - изгибная жесткость панели за счет работы внешних слоев на растяжение-сжатие;  $B_{o,u}$  - собственная изгибная жесткость отдельных обшивок (для наружной - индекс "о", для внутренней - "u"); суммарная изгибная жесткость обшивок  $B_D = B_o + B_u$ ; полная изгибная жесткость панели  $B = B_s + B_D$ ;  $A = G\delta \alpha^2/h$  - жесткость трехслойного элемента на сдвиг;  $G$  - модуль сдвига среднего слоя;  $\delta$  - ширина панели;  $\alpha, h$  - соответственно расстояния между центрами тяжести и внутренними поверхностями обшивок;  $M_s$  - изгибающий момент, воспринимаемый панелью за счет работы обшивок на растяжение-сжатие;  $M_{o,u}$  - то же, за счет собственной изгибной жесткости отдельными обшивками;  $M_D = M_o + M_u$  - то же, двумя обшивками;  $M = M_s + M_D$  - то же, всего сечения панели;  $Q_s, Q_o, Q_u, Q_D = Q_o + Q_u, Q = Q_s + Q_D$  - поперечная сила, воспринимаемая соответственно средним слоем, отдельными обшивками, двумя обшивками и всем сечением;  $\omega$  - прогиб панели;  $\chi_1 = \omega'$  - угол поворота оси панели, см.рис.1;  $\chi_2$  - угол поворота сечения панели;  $\vartheta = (\alpha_o T_o - \alpha_u T_u) / \alpha$  - угол сдвига, вызванный воздействием температурного перепада;  $T_{o,u}, \alpha_{o,u}$  - соответственно значения температур и коэффициентов температурного расширения обшивок.

Рассмотрим матричный подход к расчету многопролетных трехслойных панелей, изложенный в [2]. Систему уравнений (1), учитывая введенные выше обозначения, после дифференцирования и элементарных преобразований можно свести к двум дифференциальным уравнениям:

$$A\gamma - B_D\omega''' = Q; \quad B_S(\gamma' + \psi) - B\omega''' = M, \quad (2)$$

где  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  - угол сдвига. Принимая  $Q' = -Q$ , можно получить одно дифференциальное уравнение для функции прогибов

$$\omega'''' - \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 \omega'' = \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 \frac{M}{B} + \frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{Q}{B} - \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 \frac{1\gamma}{1+\alpha}, \quad (3)$$

где  $\ell$  - расстояние между соседними опорами; остальные параметры в уравнении - безразмерные и определяются соотношениями

$$\lambda^2 = (1+\alpha)/\alpha\beta; \quad \alpha = B_D/B_S; \quad \beta = B_S/A\ell^2. \quad (4)$$

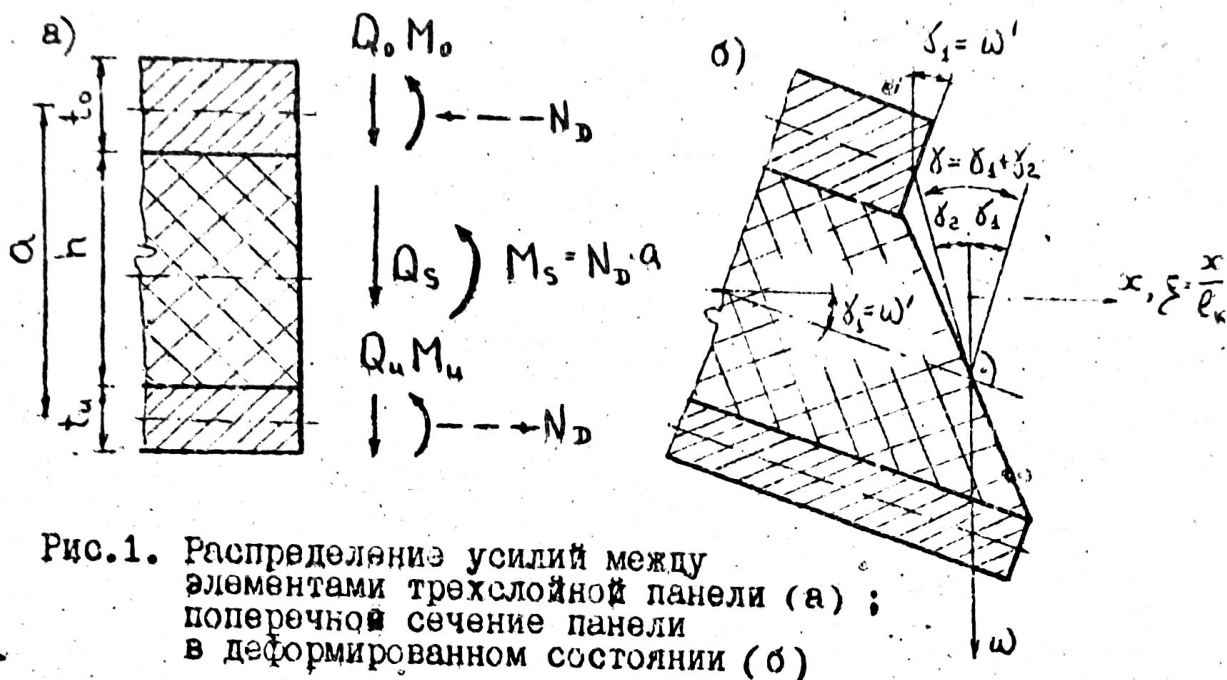


Рис. 1. Распределение усилий между элементами трехслойной панели (а); поперечное сечение панели в деформированном состоянии (б)

Решение уравнения (3) в безразмерных координатах  $\xi = x/\ell_k$ , см. рис. 2., для каждого "к"-го пролета имеет вид

$$\omega_k = C_{1k} e^{-\lambda \xi} + C_{2k} e^{-\lambda(1-\xi)} + C_{3k} + C_{4k} \ell_k \xi - \frac{1}{B} \left[ M_{1k} \ell_k^2 \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) + M_{2k} \frac{\ell_k^2 \xi^3}{6} + \frac{q \ell_k^4}{24} \left( \xi^4 - 2\xi^3 + \frac{12\xi^2}{\lambda^2 \alpha} \right) \right] + \frac{q \ell_k^2 \xi^2}{2(1+\alpha)}, \quad (5)$$

где  $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k}$  - коэффициенты, определяемые в зависимости от значений граничных условий, см. ниже, а изгибающие моменты и поперечные силы определяются по формулам

$$M_k = \frac{q \ell_k^2}{2} (\xi - \xi^2) + M_{1k} (1 - \xi) - M_{2k} \xi; \quad Q_k = \frac{q \ell_k}{2} (1 - 2\xi) - \frac{M_{1k}}{\ell_k} + \frac{M_{2k}}{\ell_k}, \quad (6)$$

где  $M_{1k}, M_{2k}$  - соответственно изгибающие моменты на левой и правой опорах в пролете "к".

Зная решение для функции прогибов из первого уравнения системы (2) можно найти неизвестную функцию для угла сдвига "gamma".

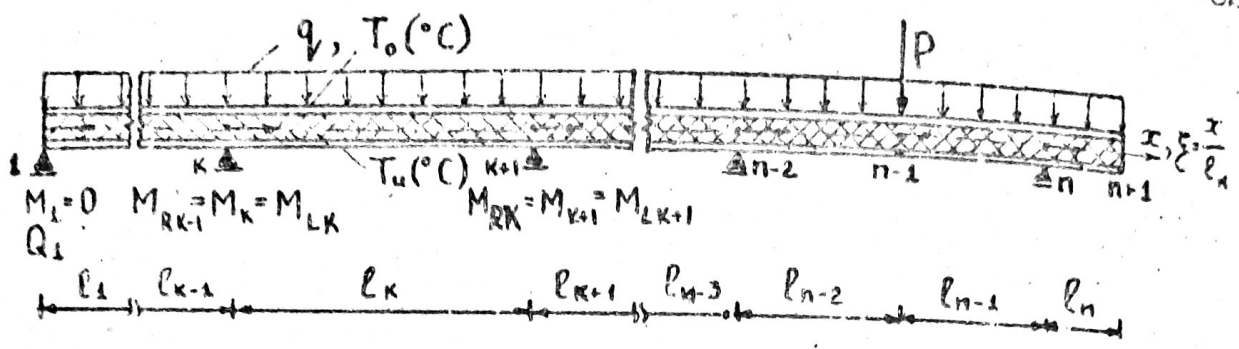


Рис. 2. Обобщенная расчетная схема многопролетной трехслойной панели

Для формализации процесса вычисления функций прогибов, углов поворота, их производных, изгибающих моментов и поперечных сил их удобнее представить в матричной форме:

$$Z = F \cdot K + L, \tag{6^*}$$

где  $Z, F, K, L$  - матрицы, для каждого "k"-го пролета имеющие вид

$$Z_k = \begin{matrix} \omega_k \\ \omega'_k \\ \omega''_k \\ \omega'''_k \\ \chi_k \\ \delta'_k \\ M_k \\ Q_k \end{matrix} = \begin{matrix} F_k \\ K_k \\ L_k \end{matrix} \begin{matrix} e^{-\lambda_k \xi} & e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 1 & l_k \xi & -l_k^2 B^{-1}(\xi^2/2 - \xi^3/6) & -l_k^2 B^{-1} \xi^3/6 \\ -(\lambda_k/l_k) e^{-\lambda_k \xi} & (\lambda_k/l_k) e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 0 & 0 & -l_k B^{-1}(\xi - \xi^2/2) & -l_k B^{-1} \xi^2/2 \\ (\lambda_k/l_k)^2 e^{-\lambda_k \xi} & (\lambda_k/l_k)^2 e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 0 & 0 & -B^{-1}(1-\xi) & -B^{-1} \xi \\ -(\lambda_k/l_k)^3 e^{-\lambda_k \xi} & (\lambda_k/l_k)^3 e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 0 & 0 & B^{-1} l_k^{-1} & -B^{-1} l_k^{-1} \\ -(1+d)(\lambda_k/l_k) e^{-\lambda_k \xi} & (1+d)(\lambda_k/l_k) e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 0 & 0 & -l_k B^{-1}(1+d)/\lambda_k^2 d & l_k B^{-1}(1+d)/\lambda_k^2 d \\ (1+d)(\lambda_k/l_k)^2 e^{-\lambda_k \xi} & (1+d)(\lambda_k/l_k)^2 e^{-\lambda_k(1-\xi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i-\xi & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_k^{-1} & l_k^{-1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ C_{3k} \\ C_{4k} \\ M_{lk} \\ M_{rk} \end{matrix} \begin{matrix} K_k \\ L_k \end{matrix} + \begin{matrix} -q l_k^4 B^{-1} (2\xi^3 - \xi^4 + 12\xi^2/\lambda_k^2 d)/24 + \vartheta(1+d) l_k^2 \xi^2/2 \\ -q l_k^3 B^{-1} (5\xi^2 - 4\xi^3 + 24\xi/\lambda_k^2 d)/24 + \vartheta(1+d) l_k \xi \\ -q l_k^2 B^{-1} (12\xi - 12\xi^2 + 24/\lambda_k^2 d)/24 + \vartheta(1+d) \\ -q l_k B^{-1} (12 - 24\xi)/24 \\ q l_k^3 B^{-1} (1+d)(1-2\xi)/2\lambda_k^2 d \\ -q l_k^2 B^{-1} (1+d)/\lambda_k^2 d \\ q l_k^2 (\xi - \xi^2)/2 \\ q l_k (1-2\xi)/2 \end{matrix} \tag{7}$$

Матрицы вида (7) составляются для каждого пролета или участка многопролетной панели. Для расчета любых трехслойных панелей формулируются граничные условия:

- для крайнего сечения шарнирно опертой панели (опора "1", см. рис. 2) используются соотношения

$$\omega_1(\xi=0) = 0; \omega_1''(\xi=0) = 0; M_1(\xi=0) = 0, \quad (8)$$

- для крайнего сечения консольного типа (точка "n", рис. 2.) граничные условия имеют вид

$$\omega_n''(\xi=1) = 0; M_n(\xi=1) = 0; Q_n(\xi=0) = 0, \quad (9)$$

- в сечениях, расположенных над промежуточными опорами, учитываются выражения

$$\begin{aligned} \omega_k(\xi=1) = 0; \omega_{k+1}(\xi=0) = 0; \omega_k'(\xi=1) - \omega_{k+1}'(\xi=0) = 0; \\ \omega_k''(\xi=1) - \omega_{k+1}''(\xi=0) = 0; \delta_k(\xi=1) - \delta_{k+1}(\xi=0) = 0; M_k(\xi=1) - M_{k+1}(\xi=0) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

- в местах расположения сосредоточенных сил точка "n-1"

$$\begin{aligned} \omega_k(\xi=1) - \omega_{k+1}(\xi=0) = 0; \omega_k'(\xi=1) - \omega_{k+1}'(\xi=0) = 0; \omega_k''(\xi=1) - \omega_{k+1}''(\xi=0) = 0, \\ \delta_k(\xi=1) - \delta_{k+1}(\xi=0) = 0; M_k(\xi=1) - M_{k+1}(\xi=0) = 0; Q_k(\xi=1) - Q_{k+1}(\xi=0) = -P \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения неизвестных констант, используя граничные условия (8) - (11), составляется система линейных уравнений, матричная форма которой имеет вид

$$A \times \vec{x} + R = 0, \quad (12)$$

где  $\vec{x}$  - вектор-столбец из неизвестных констант  $C_{11}, C_{12}, \dots, M_{21}, M_{22}$ , количество которых определяется количеством участков разбиения многопролетной панели и равно  $6n$ ;  $A, R$  - матрицы, составленные из коэффициентов матриц  $F$  и  $L$ , см. (7), размерностью  $6n$ :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} F_1(\xi=0) \\ \dots \\ F_1(\xi=1) \end{array}} \\
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} F_2(\xi=0) \\ \dots \\ F_2(\xi=1) \end{array}} \\
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} F_3(\xi=0) \\ \dots \\ F_3(\xi=1) \end{array}} \\
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} F_4(\xi=0) \\ \dots \\ F_4(\xi=1) \end{array}}
 \end{array}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array}}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} L_1(\xi=0) \\ L_1(\xi=1) - L_2(\xi=0) \\ L_2(\xi=1) - L_3(\xi=0) \\ L_3(\xi=1) - L_4(\xi=0) \\ L_4(\xi=1) \end{array}}
 \end{array}
 = 0 \quad (13)
 \end{array}$$

Для симметричной расчетной схемы количество уравнений в системе (12) можно уменьшить в два раза. При этом соответствующие матрицы (7) составляются для одной половины панели, а граничные условия для последних трех соотношений принимаются в виде:

- при четном количестве пролетов в сечении над средней опорой  $\xi = 1$

$$\omega_{n/2} = 0; \omega'_{n/2} = 0; \delta_{n/2} = 0; \quad (14)$$

- при нечетном количестве в сечении при  $\xi = 0,5$  пролета  $(n+1)/2$

$$\omega'_{(n+1)/2} = 0; \delta_{(n+1)/2} = 0; Q_{(n+1)/2} = 0 \quad (15)$$

После решения системы уравнений, в результате которого будут найдены неизвестные коэффициенты функций прогибов (5), углов поворота и их производных, с помощью соотношений (1) вычисляются усилия и моменты, необходимые для определения НДС панелей.

По приведенному выше алгоритму была составлена программа расчета, позволяющая проанализировать НДС многопролетных панелей в широком диапазоне изменения обобщенных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим некоторые результаты анализа на примере четырехпролетной панели при воздействии на всю длину равномерно распределенной нагрузки и температурного перепада  $\Delta T = T_a - T_o$ , см. рис.3. В отличие от многопролетных балок из однородного материала в этом случае однозначно определить опасное сечение нельзя. Так, если при  $\alpha \geq 10^{-1,5}$  и любом значении  $\beta$  максимальный изгибающий момент (по абсолютному значению) действует в сечении, расположенном над опорой "В", то при  $\alpha \leq 10^{-1,5}$  может быть расположено в промежуточном сечении первого пролета; при  $\beta \leq 10^{-0,8}$  и любом значении  $\alpha$  максимальный изгибающий момент от температурного воздействия  $M_B^T > M_C^T$ , и наоборот, рис.3. В случае определения наиболее напряженного сечения при воздействии сочетаний нагрузок ситуация становится еще более неопределенной. Для инженерных расчетов целесообразно использовать зависимости усилий от обобщенных параметров в графической форме, рис.4.

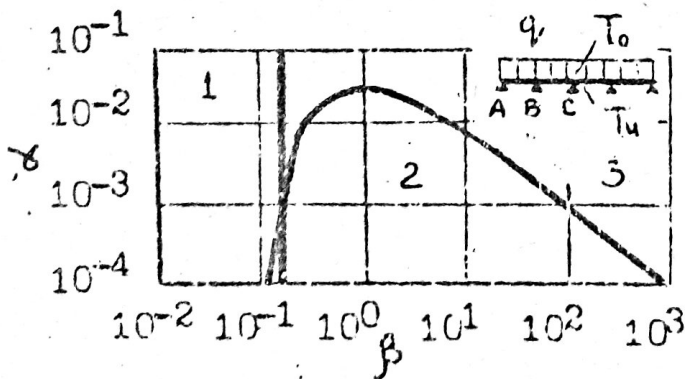


Рис.3. Области экстремальных значений изгибающих моментов для четырехпролетной панели:

- 1.-  $M_B^q > M_A^q; M_B^T > M_C^T$
- 2.-  $M_B^q < M_A^q; M_B^T < M_C^T$
- 3.-  $M_B^q > M_A^q; M_B^T < M_C^T$

$M_A^q$  - максимальный изгибающий

момент от поперечной нагрузки в первом пролете.

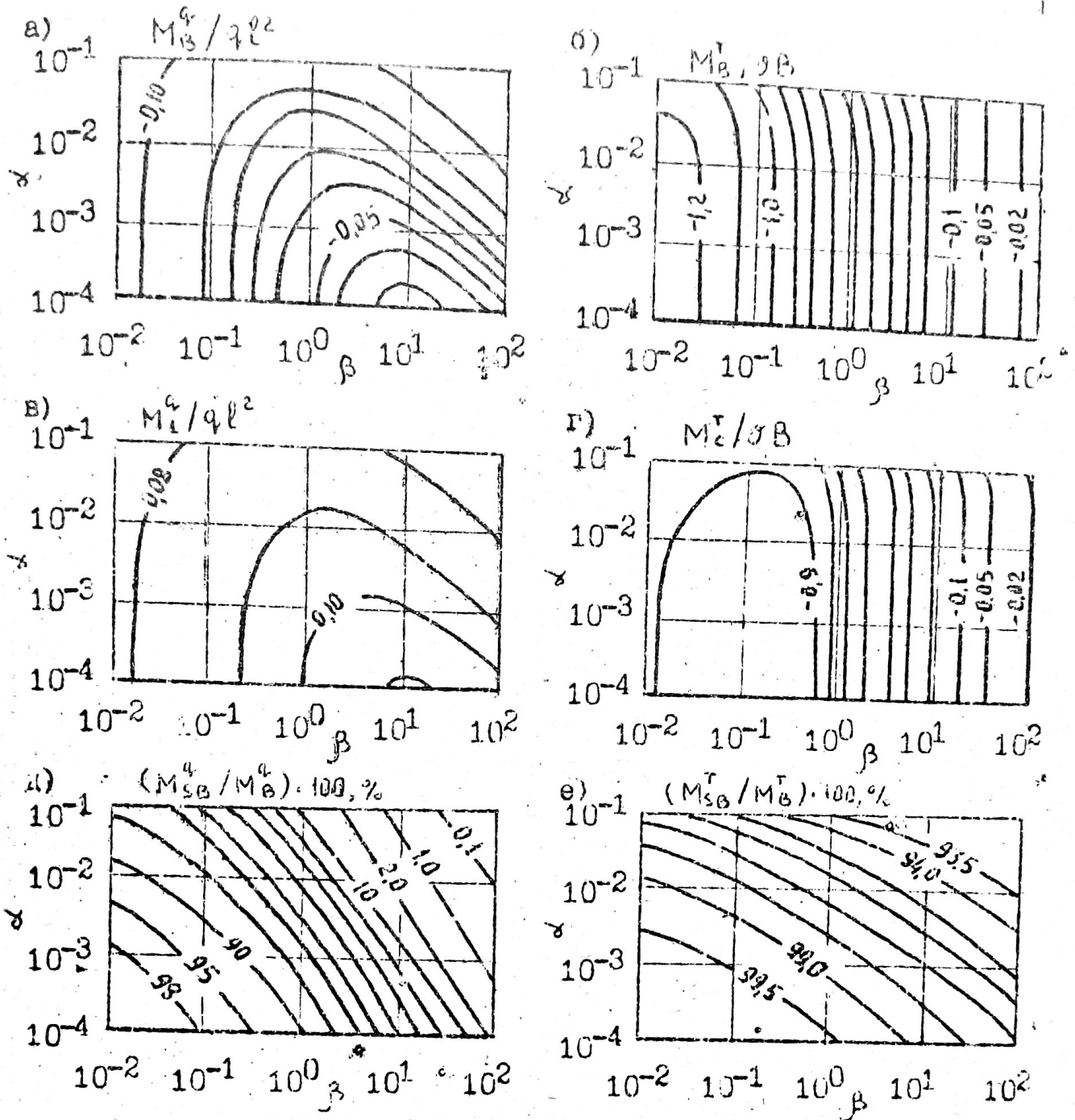


Рис.4. Приведенные значения изгибающих моментов для четырехпролетной трехслойной панели от поперечной нагрузки ( $M^q/q\ell^2$ ) и температурного перепада ( $M^T/\sigma B$ ) на второй опоре (а,б), в первом пролете (в) и средней опоре (г); доля изгибающего момента, воспринимаемая обшивкой за счет их работы на растяжение-сжатие (д,е)

Л и т е р а т у р а

1. Рекомендации по расчету трехслойных панелей с металлическими обшивками и заполнителем из пенопласта. М.: ЦНИИСК, 1976.
2. Schwarze K. Numerisch Methode zur Berechnung von Sandwich-Elementen. Stahlbau 12/1984, S. 366-370.
3. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. М.: Стройиздат, 1982.