УДК 624.074.4

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСЧЕТА НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ НА КРАЯХ

к.т.н. Зазрак Н.В., к.т.н. Малахова Н.А.

/г. Одесса, ОГАСА/

Несмотря на широкое применение на практике и большое разнообразие методов расчета неоднородных анизотропных пологих оболочек, встречаются существенные трудности при их практической реализации. Они определяются не только сложностью интегрирования системы трех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, но и сложностью удовлетворения сопутствующих им граничных условий. Очень редко при решении практических задач такой расчет может быть проведен в аналитическом виде. Целесообразно, а иногда и единственно возможно использовать современные численные методы. Наиболее простым из них является метод конечных разностей /МКР/. Причем, при использовании этого метода оказывается, что решение может быть найдено с достаточной степенью точности в одних случаях опорного закрепления, например, шарнирно-подвижного,- на простой и достаточно редкой сетке, в других же, например - жестком защемлении,- только на сложной или весьма густой сетке, что делает соответствующий расчет очень трудоемким даже при использовании современной вычислительной техники.

Для ослабления указанного недостатка целесообразно строить численное решение так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и загружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения, при разыскании которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. Такая методика расчета хотя и несколько усложняет нахождение искомого решения для сложных случаев закрепления, так как его приходится осуществлять в два шага, тем не менее в конечном счете оказывается более эффективной, поскольку позволяет находить составные части искомого решения с применением аналитических соотношений или сравнительно простых по структуре и небольших по числу систем конечноразностных уравнений.

Изложим методику расчета, реализующую сформулированную идею и результаты ее использования проиллюстрируем на примере.

Задача расчета неоднородной анизотропной прямоугольной пологой оболочки с произвольным закреплением на контуре может быть записана в следующем общем виде:

$$\vec{L}[\vec{q}]\Big|_{\Omega}=\vec{f}, \quad \vec{R}_i[\vec{q}]\Big|_{\vec{S}_i^R}=\vec{\rho}_i, \quad \vec{\Gamma}_i[\vec{q}]\Big|_{\vec{S}_i^{\Gamma}}=\vec{\gamma}_i \qquad /1/$$

где $/i=1,2; \quad j=1,2,3/$

$$\vec{L}[\vec{q}]=\begin{bmatrix} A'C(A\vec{u}+\vec{k}w) \\ \vec{k}'C(A\vec{u}+\vec{k}w)-\vec{B}'D\vec{B}w \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_i[\vec{q}]=[R_{ij}], \quad \vec{\Gamma}_i[\vec{q}]=[\Gamma_{ij}], \qquad /2/$$

Ω - прямоугольная область, на которую опирается оболочка; S -ограничивающие эту область прямолинейные части контура; $\vec{f}$ - вектор нагрузок; $\vec{\rho}_i$ и $\vec{\gamma}_i$ -векторы заданных на участках $[S_{ij}^R]=\vec{S}_i^R$ и $[S_{ij}^{\Gamma}]=\vec{S}_i^{\Gamma}$ $(S_{ij}^R<S, \; S_{ij}^{\Gamma}=S-S_{ij}^R)$ контура значений угла поворота, перемещений, изгибных и цепных усилий; $\vec{q}'=[\vec{u}'\,w]$, $\vec{u}'=[u\;v]$ -векторы перемещений точек срединной поверхности оболочки; C и D -цепная и изгибная матрицы ее жесткости, элементы которых считаются далее произвольными функциями координат x и y. Кроме того

$$A=\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Vmatrix}, \qquad \vec{k}=\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \qquad \vec{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

и далее

$$R_{11}=R_{12}=\Gamma_{11}=\Gamma_{12}=0, \quad R_{23}=w \;\; и \;\; \Gamma_{22}=S \;\; при \;\; x=\pm a \;\; и \;\; y=\pm b$$

$$R_{13}=\begin{cases} \mp\frac{\partial w}{\partial x} \\ \mp\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}, \qquad \Gamma_{23}=\begin{cases} Q_x+\frac{\partial H}{\partial y} & при \;\; x=\pm a \\ Q_y+\frac{\partial H}{\partial x} & при \;\; y=\pm b \end{cases}$$

$$R_{21}=\begin{cases} \pm u \\ \pm v \end{cases}, \quad R_{22}=\begin{cases} \pm v \\ \pm u \end{cases}, \quad \Gamma_{13}=\begin{cases} M_x \\ M_y \end{cases}, \quad \Gamma_{21}=\begin{cases} T_x & при \;\; x=\pm a \\ T_y & при \;\; y=\pm b \end{cases}.$$

Здесь штрих при матрицах обозначает их транспонирование. Рассматривая различные комбинации возможных значений элементов $\vec{S}_i^R$ и $\vec{S}_i^{\Gamma}$, из /2/ можно легко получить краевые задачи, описывающие состояние рассчитываемой оболочки при всех без исключения способах закрепления и нагружения ее края.

Предположим, что ищется решение задачи /I/, причем известно решение соответствующей "жесткой" задачи

$$\vec{L}[\vec{z}]\Big|_{\Omega}=\vec{f}\,, \qquad \vec{R}_i[\vec{z}]\Big|_{\vec{S}_i^R}=\vec{\varrho}_i\,. \qquad /3/$$

В работе [I] показано, что между решениями /I/ и /3/ имеет место зависимость

$$\vec{q}(P)=\vec{z}(P)+\tau'(P)F^{-1}\left\{\iiint_{\Omega}\tau\vec{f}\,d\omega-\sum_{i=1}^{2}\left[\int_{\vec{S}_i^R}\tau_i^{\Gamma}\vec{\varrho}_i\,ds-\int_{\vec{S}_i^{\Gamma}}\tau_i^{R}\vec{\gamma}_i\,ds\right]\right\}, \qquad /4/$$

где $F=\|F_{mn}\|_{m,n=1,2}$, $\tau_i^{\Gamma}=\|\setminus\vec{\Gamma}_{ij}\setminus\|_{j=1,2,3}$, $\tau_i^{k}=\|\setminus\vec{R}_{ij}\setminus\|_{j=1,2,3}$, причем $F_{mn}=\|F_{mn}^{k\ell}\|_{k,\ell=1,2,\dots}$, $\vec{\Gamma}_{ij}=[\Gamma_{ij}^{k}]_{k=1,2,\dots}$, $\vec{R}_{ij}=[R_{ij}^{k}]_{k=1,2,\dots}$ суть матрицы - блоки, элементы которых вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
F_{11}^{k\ell}=(A\Phi_k)'CA\Phi_\ell\,,\quad F_{12}^{k\ell}=(A\Phi_k)'C\vec{k}\chi_\ell\,,\quad F_{21}^{k\ell}=(\vec{k}\chi_k)'CA\Phi_\ell\,,\\
F_{22}^{k\ell}=(\vec{k}\chi_k)'C\vec{k}\chi_\ell-(\vec{B}\chi_k)'D\vec{B}\chi_\ell\,,\quad R_{11}^{k}=R_{12}^{k}=\Gamma_{11}^{k}=\Gamma_{12}^{k}=0\,,\\
R_{13}^{k}=R_{13}(\chi_k)\,,\quad R_{21}^{k}=R_{21}(\varphi_k)\,,\quad R_{22}^{k}=R_{22}(\varphi_k)\,,\quad R_{23}^{k}=R_{23}(\chi_k)\,,\\
\Gamma_{13}^{k}=\Gamma_{13}(\chi_k)\,,\quad \Gamma_{21}^{k}=\Gamma_{21}(\vec{\xi}_k)\,,\quad \Gamma_{22}^{k}=\Gamma_{22}(\vec{\xi}_k)\,,\quad \Gamma_{23}^{k}=\Gamma_{23}(\chi_k)\,,
\end{gathered} \qquad /5/$$

далее $\Phi_k=\|\setminus\varphi_k\;\psi_k\setminus\|$, а матрица τ имеет вид

$$\tau=\begin{Vmatrix}\vec{\varphi} & 0 & 0\\ 0 & \vec{\psi} & 0\\ 0 & 0 & \vec{\chi}\end{Vmatrix} \qquad /6/$$

Здесь $\vec{\varphi}=[\varphi_j]_{j=1,2,\dots}$, $\vec{\psi}=[\psi_j]_{j=1,2,\dots}$, $\vec{\chi}=[\chi_j]_{j=1,2,\dots}$. Последние должны быть линейно независимыми и удовлетворять условиям

$$\vec{L}(\vec{\xi}_j)\Big|_{\Omega}=0\,,\quad \vec{R}_i(\vec{\xi}_j)\Big|_{\vec{S}_i^R}=0\,,\quad \vec{\xi}_j'=[\vec{\varphi}_j'\,\chi_j]\,,\ \vec{\varphi}_j'=[\varphi_j\,\psi_j] \qquad /7/$$

Для определения численных результатов была составлена программа на языке ФОРТРАН.

В качестве примера /Рис. I/ рассмотрим пологую оболочку на прямоугольном плане, шарнирно закрепленную двумя противоположными кром-

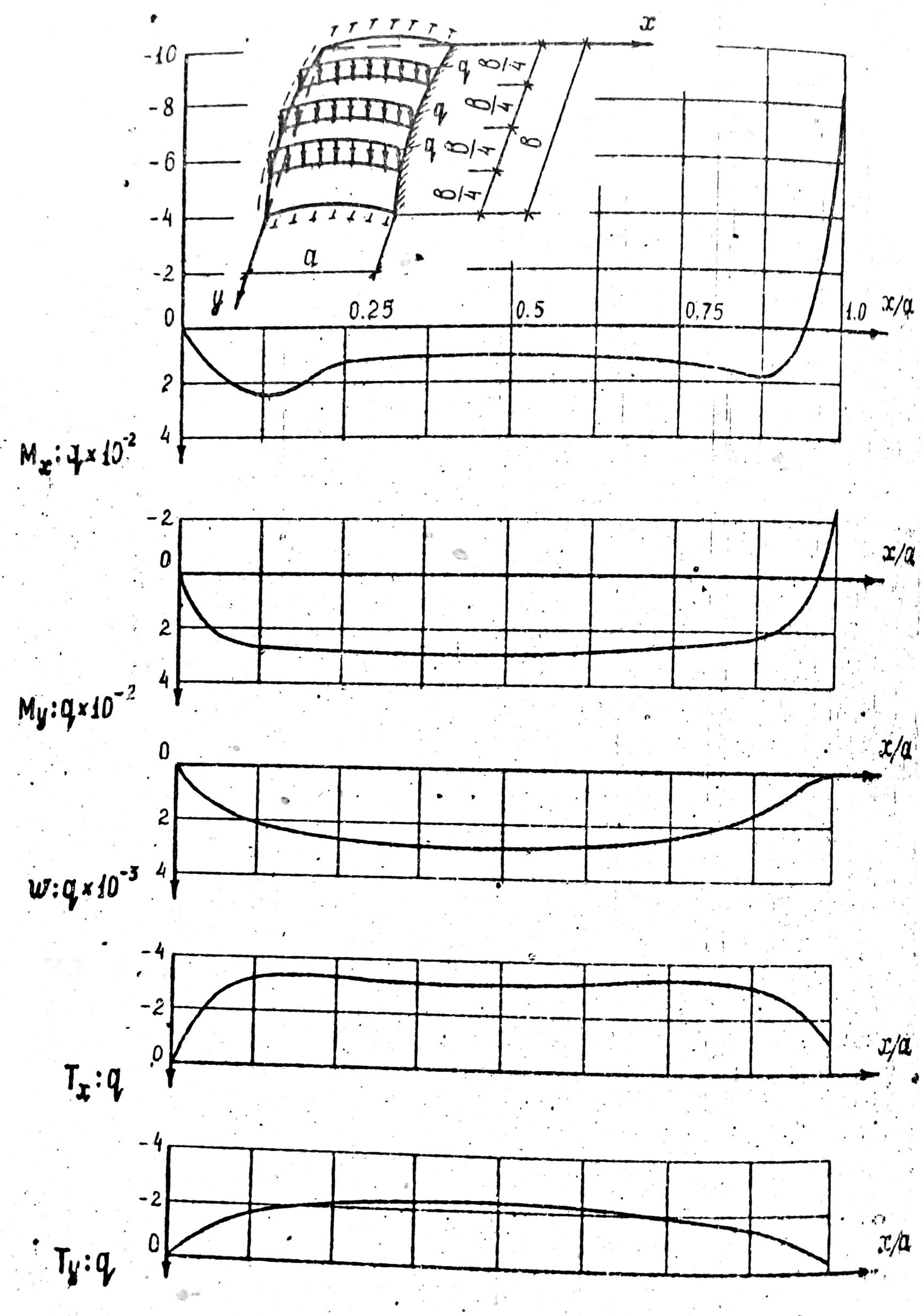

Рис. I. Прогиб и усилия в оболочке вдоль сечения $y = b/2$

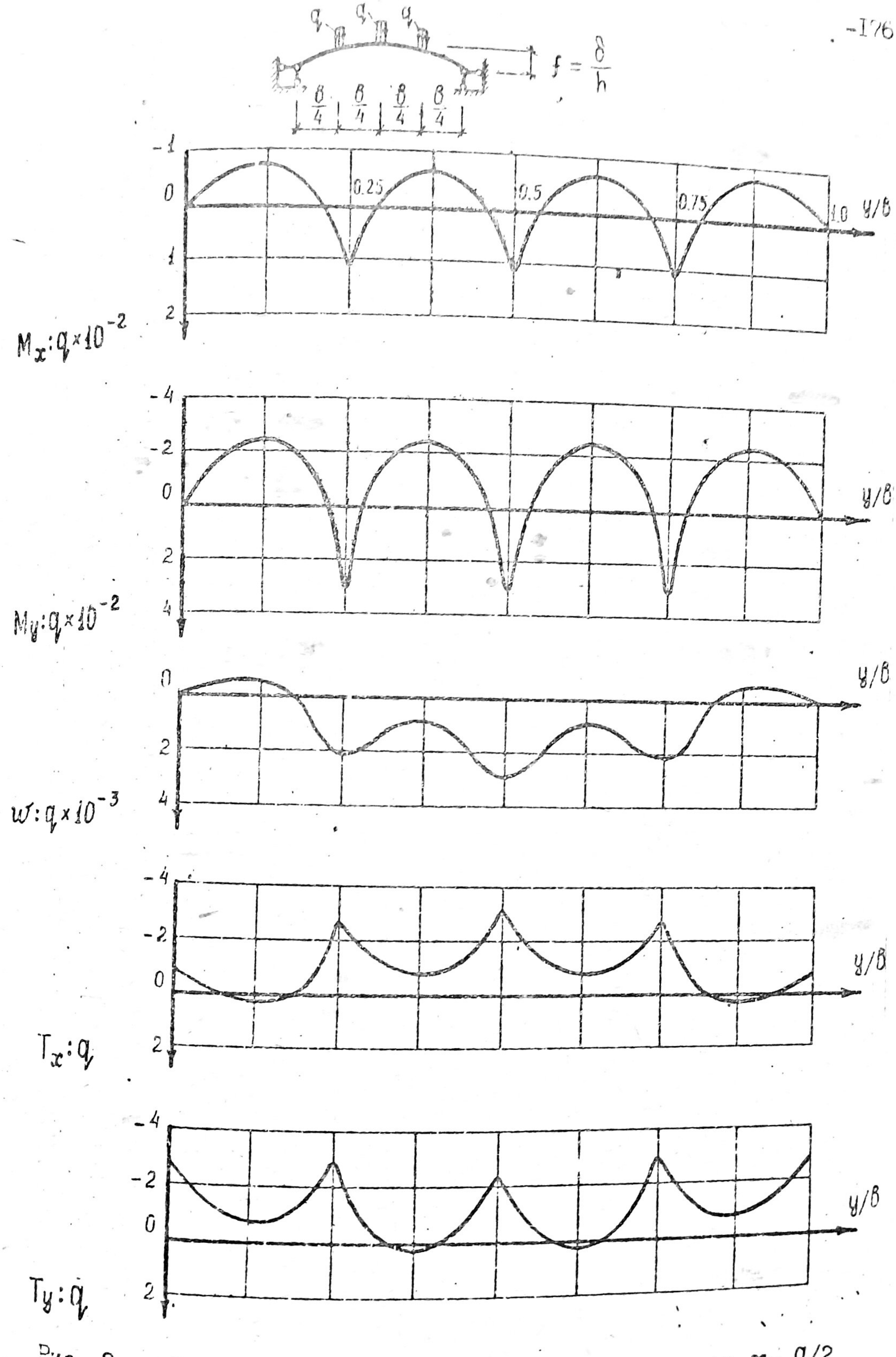

Рис. 2. Прогиб и усилия в оболочке вдоль сечения $x = a/2$

ками, свободно опертой третьей и жестко закрепленной четвертой кромкой с соотношением сторон $b:a=1,25$, толщина оболочки увеличивалась от 1/8 пролета и 7/8 пролета к опорам /свободно опертой и жестко закрепленной/ в два раза. При этом нагрузка принималась равномерно распределенной вдоль оси симметрии и вдоль осей, проходящих в 1/4 и 3/4 пролета относительно шарнирно закрепленных кромок; соотношение подъемистости $\delta/h=20$; толщина оболочки в средней части $h=10$ см; размеры в плане $b=30$ м, $a=24$ м. Счет производился при $\nu=0,3$. В задаче вначале осуществлялся переход от шарнирного закрепления к жесткому защемлению /вдоль всей границы оболочки/, а затем от жесткого защемления к комбинированному закреплению, при котором две кромки оболочки /$y=0$ и $y=b$/ закреплены шарнирно, кромка /$x=0$/ свободно оперта, кромка /$x=a$/ жестко закреплена.

На рис. 1 и 2 приведены результаты вычисления прогибов, изгибающих моментов и нормальных усилий вдоль сечения $y=b/2$ и $x=a/2$.

Список литературы

1. Слезингер И.Н., Заврак Н.В. Расчет неоднородных анизотропных пологих оболочек на прямоугольном плане с различными условиями на краях // Изв. вузов. Стр-во и архит. -1988. -№ 4. -С.28-32