УДК 624.074.5

РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

CALCULATION OF ELEMENTARY SPACE FRAME CONSTRUCTIONS NUMERICAL-ANALYTICAL BOUNDARY ELEMENT METHOD

А.В.Ковров, А.М.Кушнир, А.В.Ковтуненко (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

A.V.Kovrov, A.M.Kushnir, A.V.Kovtunenko

Анотація: наведений приклад розрахунку найпростішої просторової рамної конструкції за допомогою чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

Аннотация: приведен пример расчета простейшей пространственной рамной конструкции при помощи численно-аналитического метода граничных элементов.

Abstract: the method of calculating the simplest of spatial frame construction with the help of numerical-analytical boundary element method is described.

Ключевые слова: пространственная рамная конструкция, численно-аналитический метод граничных элементов, граничные условия.

Key words: space frame structure, a numerical-analytical boundary element method, boundary conditions.

Актуальность исследований. Расчет пространственных рамных конструкций зданий и сооружений с использованием численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ) позволяет учесть действительную работу материалов конструкций.

В связи с этим методы расчета конструкций, которые основываются на ЧА МГЭ является задачей актуальной.

Цель работы – апробация применения разработанной авторами методики расчета пространственных рамных конструкций с использованием ЧА МГЭ.

Основная часть. В работах [1], [2] приведены основные соотношения и правила ЧА МГЭ.

В работе [3] предложена методика формирования матриц разрешающего уравнения ЧА МГЭ, при расчете пространственных рамных конструкций, сформулированы принципы нумерации узлов и элементов, выбора систем координат, соотношения статических и кинематических граничных параметров.

Рассмотрим применение разработанной авторами методики на примере расчета простейшей пространственной рамной конструкции, имеющей один этаж, один пролет и один шаг, расчетная схема, которой представлена на рис. 1.

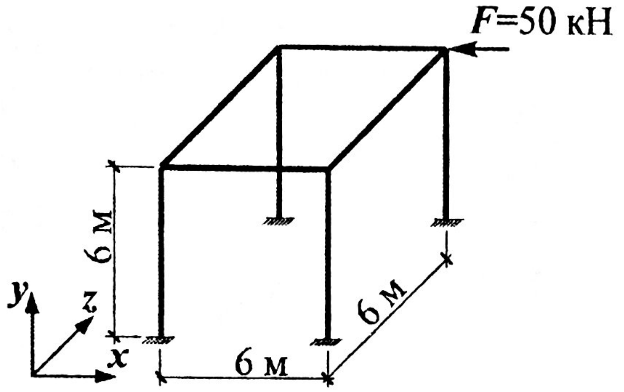

Рис. 1. Расчетная схема пространственной рамной конструкции

Порядок нумерации узлов и элементов пространственной рамной конструкции представлен на рис. 2.

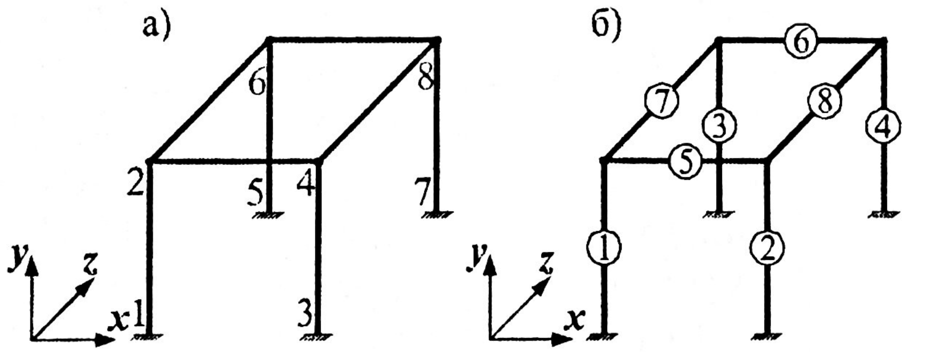

Рис. 2. а) - нумерация узлов пространственной рамной конструкции
б) - нумерация элементов

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние элементов пространственной рамной конструкции в матричной форме имеет вид:

$$Y(l) = A(l)X\left(0\right) + B(l) \qquad (1)$$

Входящие в выражение (1) векторы $Y(l)$, $X\left(0\right)$, $B(l)$ имеют следующий вид:

$$Y(l) = \begin{Vmatrix} Y_{01} \\ Y_{02} \\ Y_{03} \\ Y_{04} \\ Y_{05} \\ Y_{06} \\ Y_{07} \\ Y_{08} \end{Vmatrix} \quad X(0) = \begin{Vmatrix} X_{01} \\ X_{02} \\ X_{03} \\ X_{04} \\ X_{05} \\ X_{06} \\ X_{07} \\ X_{08} \end{Vmatrix} \quad B(l_i) = \begin{Vmatrix} B_{01} \\ B_{02} \\ B_{03} \\ B_{04} \\ B_{05} \\ B_{06} \\ B_{07} \\ B_{08} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

где

$$Y_{0i} = \begin{Vmatrix} EI_z v_y(l_i) \\ EI_z \varphi_z(l_i) \\ M_z(l_i) \\ Q_y(l_i) \\ EI_y v_z(l_i) \\ EI_y \varphi_y(l_i) \\ M_y(l_i) \\ Q_z(l_i) \\ EAu(l_i) \\ N(l_i) \\ GI_k \theta(l_i) \\ M_x(l_i) \end{Vmatrix} \quad X_{0i} = \begin{Vmatrix} EI_z v_y(0) \\ EI_z \varphi_z(0) \\ M_z(0) \\ Q_y(0) \\ EI_y v_z(0) \\ EI_y \varphi_y(0) \\ M_y(0) \\ Q_z(0) \\ EAu(0) \\ N(0) \\ GI_k \theta(0) \\ M_x(0) \end{Vmatrix} \quad B_{0i} = \begin{Vmatrix} B_1(l_i) \\ B_2(l_i) \\ B_3(l_i) \\ B_4(l_i) \\ B_5(l_i) \\ B_6(l_i) \\ B_7(l_i) \\ B_8(l_i) \\ B_9(l_i) \\ B_{10}(l_i) \\ B_{11}(l_i) \\ B_{12}(l_i) \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

здесь i изменяется от 1 до 8.

Рассмотрим граничные условия для элементов заданной пространственной рамной конструкции.

В узлах 1, 3, 5, 6 жестко защемлены стойки 1, 2, 3, 4. В соответствии с принятыми локальными системами координат, перечисленные узлы расположены в начале систем координат.

Таким образом, все линейные и угловые перемещения, входящие в вектор начальных параметров, данных элементов, равны нулю.

В узле 2 сходятся элементы 1, 5, 7. Узел является конечным для 1-го элемента и начальным для 5-го и 7-го элементов. Конечные параметры 1-го элемента, соответствующие внутренним усилиям, связываются с начальными параметрами 5-го и 7-го элементов, при помощи уравнений равновесия:

$$
\begin{aligned}
&Q_{y1}(l_1) = N_5(0) - Q_{z7}(0);\\
&Q_{z1}(l_1) = Q_{z5}(0) + N_7(0);\\
&N_1(l_1) = -Q_{y5}(0) - Q_{y7}(0).\\
&M_{y1}(l_1) = -M_{x5}(0) + M_{z7}(0);\\
&M_{x1}(l_1) = M_{y5}(0) + M_{y7}(0);\\
&M_{z1}(l_1) = M_{z5}(0) + M_{x7}(0).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Конечные параметры 1-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к соответствующим перемещениям начальных параметров 5-го элемента:

$$
\begin{aligned}
&u_1(l_1) = -v_{y5}(0);\quad v_{z1}(l_1) = v_{z5}(0);\quad v_{y1}(l_1) = u_5(0).\\
&\varphi_{z1}(l_a) = \varphi_{z5}(0);\quad \varphi_{y1}(l_1) = -\theta_5(0);\quad \theta_1(l_1) = \varphi_{y5}(0).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Начальные параметры 7-го элемента, соответствующие линейным и угловым перемещениям, приравниваются к соответствующим перемещениям начальных параметров 5-го элемента:

$$
\begin{aligned}
&v_{y7}(0) = v_{y5}(0);\quad u_7(0) = -v_{z5}(0);\quad v_{z7}(0) = u_5(0);\\
&\varphi_{z5}(0) = -\theta_7(0);\quad \theta_5(0) = \varphi_{z7}(0);\quad \varphi_{y5}(0) = \varphi_{y7}(0).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Граничные условия в узлах 4, 7, 8 определяются аналогично граничным условиям в узле 2.

В результате цепочки равносильных преобразований система уравнений (1) имеет вид:

$$A^{*}X^{*} = -B \tag{7}$$

При рассмотрении граничных условий в векторе начальных параметров $X(0)$ обнуляются 30 элементов, а в векторе конечных параметров $Y(l)$ остаются неизвестными 30 независимых элементов.

После переноса из вектора $Y(l)$ независимых конечных параметров на место нулевых элементов вектора $X(0)$ формируется вектор неизвестных граничных параметров X^* и матрица коэффициентов A^* которые имеют вид:

$$X^* = \begin{Vmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{24} \\ X_{05} \\ X_{06} \\ X_{37} \\ X_{08} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

$$A^* = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & A_6 & 0 \\ A_{11} & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_4 & 0 & 0 & A_8 & 0 \\ A_{15} & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & A_9 \\ 0 & A_{15} & 0 & A_{12} & 0 & A_2 & A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & A_{15} & 0 & A_{10} & A_{14} & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{16} & 0 & 0 & A_{17} & A_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Блоки X_{1i}, X_{24}, X_{37} относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия элементов.

Блок X_{0i} относится к элементам, все начальные параметры которых являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов.

Блок A_1 относят к элементу, который имеет нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия элементов.

Блок A_2 относят к элементу, все начальные параметры которого являются неизвестными и не связаны с граничными параметрами других элементов.

Блоки A_3, A_4 относятся к элементам, которые имеют нулевые начальные параметры, учитывающие граничные условия элементов и содержат компенсирующие элементы, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стоек 3, 4 и конечных параметров элементов продольных ригелей 6, 8.

Блоки A_5, A_6, A_7 состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элементов стоек 1, 3 и начальных параметров элементов ригелей 5, 6.

Блок A_8 состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для конечных параметров элемента стойки 2 и конечных параметров элементов поперечного ригеля 8.

Блок A_9 состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов продольного ригеля 5 и начальных параметров элементов поперечного ригеля 8.

Блок A_{10} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из уравнений равновесия и совместности перемещений для начальных параметров элементов продольного ригеля 5 и начальных параметров поперечного ригеля 7.

Блоки A_{11}, A_{12}, A_{13} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с участием независимых конечных параметров в уравнениях равновесия и совместности перемещений.

Блок A_{14} состоит из компенсирующих элементов, которые вводятся исходя из совместности перемещений для конечных параметров элементов поперечного ригеля 7 и начальных параметров элементов продольного ригеля 6.

Блоки A_{15}, A_{16} и A_{17} состоят из компенсирующих элементов, которые вводятся в связи с переносом независимых конечных параметров в матрицу начальных параметров.

В системе компьютерной математики MATLAB составлена программа, для определения внутренних усилий и перемещений в пространственной рамной конструкции в упругой стадии, расчетная схема которой приведена на рис. 1.

По значениям внутренних усилий, определенных для пространственной рамы при помощи ЧА МГЭ, построены эпюры, представленные на рис. 3…5.

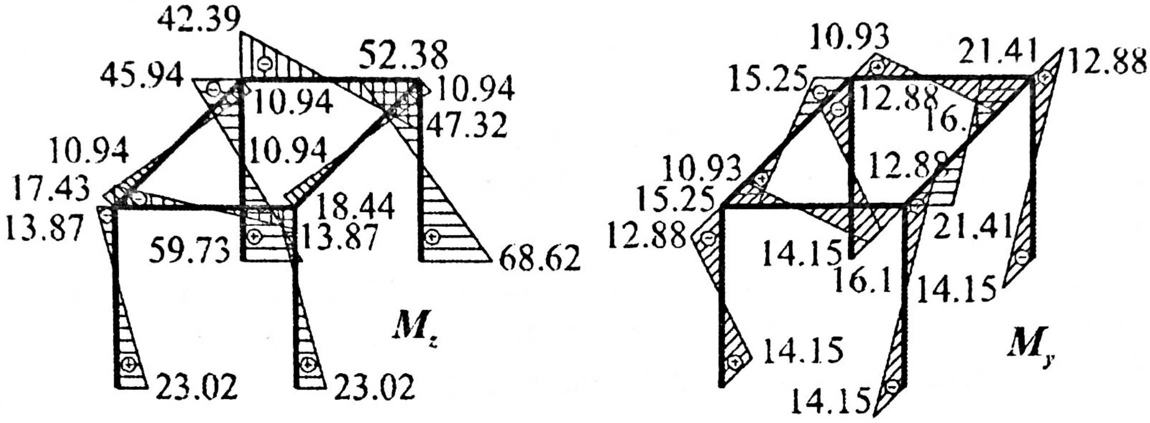

Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов M_z, M_y (кНм)

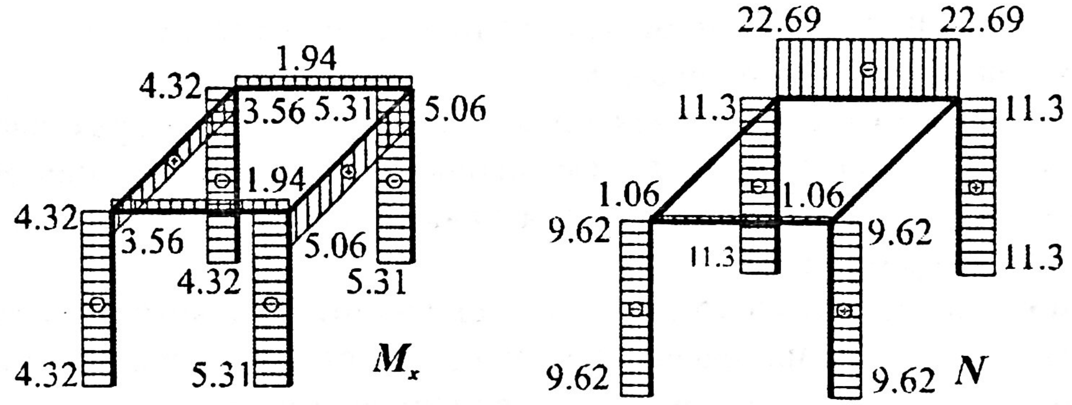

Рис. 4. Эпюры крутящих моментов M_x и продольных сил N (кНм)

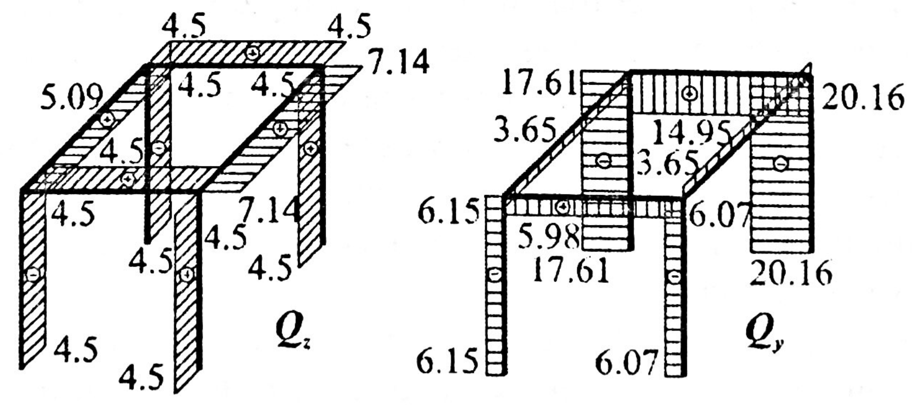

Рис. 5. Эпюры поперечных сил Q_z, Q_y (кН)

С целью сравнения выполнен расчет рассматриваемой конструкции с использованием программного комплекса SCAD. Результаты расчетов совпали.

Вывод

Разработанная авторами методика применения ЧА МГЭ, позволяет определять напряженно-деформированное состояние пространственных рамных конструкций в упругой стадии.

Литература:

1. Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численно-аналитический метод граничных элементов. Том 1, 2. ВМВ, Одесса, 2010. – 451 с.

2. Оробей В. Ф., Ковров А. В. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: Учебное пособие – Одесса, 2004. – 122 с.

3. Ковров А.В., Кушнир А.М., Ковтуненко А.В. К применению численно-аналитического метода граничных элементов для расчёта пространственных рамных конструкций. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №40, Одеса, ОДАБА, 2010. С.117-123.