

## ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНИЧЕСКОГО И ПИРАМИДАЛЬНОГО СТЕРЖНЕЙ

*Крутий Ю.С. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

## FREQUENCIES AND FORMS OF OWN LONGITUDINAL FLUCTUATIONS OF CONIC AND PYRAMIDAL CORES

*Krutiy J. S. (The Odessa State Academy of Building and Architecture)*

В работе рассматривается задача о собственных продольных колебаниях конического и пирамидального стержней. Выписано точное решение соответствующего дифференциального уравнения продольных колебаний. Определены частоты и выписаны в явном виде формулы для собственных форм колебаний.

**Ключевые слова:** продольные колебания, конический стержень, пирамидальный стержень, частота колебаний, форма колебаний.

In work the problem about own longitudinal fluctuations of conic and pyramidal cores is considered. The exact decision of the corresponding differential equation of longitudinal fluctuations is written out. Frequencies are defined and formulas for own form of fluctuations are written out in an explicit form.

**Key words:** a conic core, a pyramidal core, longitudinal fluctuations, frequency of fluctuations, the form of fluctuations.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы два упругих однородных стержня длины  $l$ . Один из них в форме усеченного конуса с радиусами оснований  $R, r (R \geq r)$ , а другой в форме усеченной правильной пирамиды, основаниями которой являются квадраты со сторонами  $a, b (a \geq b)$ . В частности, когда  $r = 0$  или  $b = 0$ , будем иметь обычные остроконечные конус или пирамиду соответственно. Случай  $R = 0$  или  $a = 0$  исключаем, поскольку тогда стержень вырождается в отрезок. В дальнейшем под стержнем будем понимать один из этих заданных стержней.

Направим ось  $x$  вдоль оси стержня. Будем считать, что большее основание стержня находится в точке  $x = 0$ , а меньшее в точке  $x = l$ . Тогда в случае конуса, радиус поперечного сечения в точке  $x$  будет равен  $R - \frac{R-r}{l}x$ , а в случае пирамиды, сторона поперечного сечения в

точке  $x$  будет равна  $a - \frac{a-b}{l}x$ . Площадь поперечного сечения выразится единой формулой

$$F(x) = F_0 \left(1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l}\right)^2.$$

Здесь  $F_0 = \pi R^2$ ,  $\alpha = \frac{r}{R}$ , если стержень имеет форму конуса и  $F_0 = 4a^2$ ,  $\alpha = \frac{b}{a}$ , если стержень имеет форму пирамиды, причем в любом случае  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Уравнение собственных (свободных) продольных колебаний стержня, испытывающего деформации растяжения — сжатия, вызванные осевым продольным воздействием, в общем случае имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение справедливо для модели, которая не учитывает сил инерции, возникающих вследствие поперечных деформаций. Здесь  $k(x)$  — коэффициент упругости;  $m(x)$  — интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня;  $u(x, t)$  — неизвестная функция, представляющая собой продольное перемещение сечения стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

В нашем случае

$$k(x) = EF_0 \left(1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l}\right)^2, \quad m(x) = \rho F_0 \left(1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l}\right)^2,$$

где  $E$  — модуль упругости материала стержня,  $\rho$  — плотность материала стержня. Обозначим для краткости  $u = 1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l}$ ,  $k_0 = EF_0$ ,  $m_0 = \rho F_0$ . Тогда  $k(x) = k_0 u^2$ ,  $m(x) = m_0 u^2$ .

Ставится задача: найти частоты и формы собственных продольных колебаний стержня для разных случаев граничных условий.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Применяя стандартную процедуру метода разделения переменных (метод Фурье) [3], представим решение уравнения (1) в виде  $u(x, t) = v(x)T(t)$ , где  $v(x)$  — амплитудное значения перемещения, зависящее только от переменной  $x$ ,  $T(t)$  — неизвестная функция времени  $t$ . Подставляя в уравнение (1) вместо функции  $u(x, t)$  ее представление, после очевидных преобразований получим

$$\frac{E(u^2 v'(x))'}{\rho u^2 v(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от переменной  $x$ , а правая — только от переменной  $t$ . Следовательно, обе эти части равняются одной и той же постоянной, которую обозначим —  $\omega^2$ . В итоге получим два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \quad (2)$$

$$(u^2 v'(x))' + \lambda^2 u^2 v(x) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ .

Будем полагать, что нам заданы начальные параметры. К ним относятся параметры начальных условий движения  $T(0), \dot{T}(0)$  и граничные параметры  $v(0), v'(0)$ . Решения уравнений (2), (3), выразим через начальные параметры. Так как коэффициенты уравнения (2) постоянные, выписать для него общее решение не составляет труда

$$T(t) = T(0) \cos \omega t + \frac{\dot{T}(0)}{\omega} \sin \omega t = A \sin(\omega t + t_0),$$

где  $A = \sqrt{T^2(0) + \left(\frac{\dot{T}(0)}{\omega}\right)^2}$ ,  $t_0 = \arctg\left(\frac{T(0)}{\dot{T}(0)} \omega\right)$ . Это решение говорит о том, что колебания во времени совершаются по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ .

Главная форма колебаний определяется как решение дифференциального уравнения (3). Решение этого уравнения не тривиально и требует значительных математических выкладок. Опуская эти выкладки, приведем здесь только окончательную формулу, которой определяется общее решение уравнения (3), выраженное через граничные параметры

$$v(x) = \frac{1}{u} \left[ v(0) \left( \cos \lambda x - \frac{1-\alpha}{\lambda l} \sin \lambda x \right) + \frac{v'(0)}{\lambda} \sin \lambda x \right]. \quad (4)$$

В правильности этого решения можно убедиться непосредственной проверкой.

Известно, что напряженно-деформированное состояние стержня, испытывающего деформации растяжения-сжатия, характеризуется перемещением  $v(x)$  и продольной силой  $N(x) = k(x)v'(x)$ . Поэтому далее находим

$$N(x) = k_0 \left[ v(0) \left[ \left( \frac{1-\alpha}{l} \right)^2 x \cos \lambda x - \left( \left( \frac{1-\alpha}{l} \right)^2 \frac{1}{\lambda} + \lambda u \right) \sin \lambda x \right] + v'(0) \left[ \frac{1-\alpha}{\lambda l} \sin \lambda x + u \cos \lambda x \right] \right] \quad (5)$$

Для удобства введем обозначение  $K = \lambda l$ . Тогда формула для частоты в общем случае запишется так  $\omega = \frac{K}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Исходя из роли параметра  $K$  в этой формуле, будем называть его коэффициентом колебаний.

**Случай 1.** Пусть оба конца стержня жестко закреплены:  $v(0) = 0$ ,  $v(l) = 0$ . Формула (4) с учетом первого условия запишется так  $v(x) = \frac{v'(0)}{\lambda u} \sin \lambda x$ . Реализация второго условия приводит к частотному уравнению  $v(l) = \frac{v'(0)}{\lambda \alpha} \sin K = 0$ . Отсюда  $\sin K = 0$ ,  $K_j = \pi j$ , а значит,  $\omega_j = \frac{\pi j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Таким частотам соответствуют собственные формы колебаний  $v_j(x) = v'(0) \frac{l}{\pi j u} \sin \frac{\pi j}{l} x$ .

Из механических соображений понятно, что реализовать жесткое закрепление на конце стержня с нулевой площадью поперечного сечения невозможно. Другими словами, из самого факта жесткого закрепления вытекает, что параметр  $\alpha$  не может быть нулевым. В аналитическом виде этот факт нашел свое отражение в частотном уравнении, из которого следует, что  $\alpha \neq 0$ .

**Случай 2.** Конец  $x = 0$  закреплен, а конец  $x = l$  свободен:  $v(0) = 0$ ,  $N(l) = 0$ . Формула (5) с учетом первого условия запишется в виде  $N(x) = k_0 v'(0) \left[ \frac{1-\alpha}{K} \sin \lambda x + u \cos \lambda x \right]$ . Из второго условия получаем частотное уравнение

$$N(l) = k_0 v'(0) \left[ \frac{1-\alpha}{K} \sin K + \alpha \cos K \right] = 0.$$

Возможны две ситуации, когда это уравнение упрощается и становится элементарным.

Первая ситуация соответствует остроконечному стержню. Она возможна, поскольку конец  $x = l$  свободен. Поэтому, в отличие от первого случая, параметр  $\alpha$  может быть, в частности, равен нулю. Тогда  $\sin K = 0, K_j = \pi j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

Вторая ситуация соответствует стержню постоянного поперечного сечения. Тогда  $\alpha = 1, \cos K = 0, K_j = \frac{\pi(2j-1)}{2}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

Когда  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha \neq 1$  имеем трансцендентное уравнение

$$\frac{1-\alpha}{K} \sin K + \alpha \cos K = 0.$$

Корни  $K_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) такого уравнения легко находятся с помощью численных методов для любого заданного значения параметра  $\alpha$ . В таблице 1 приведены результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний для каждого значения  $\alpha$  с шагом 0,1.

Окончательно, в рассматриваемом случае для частот и форм собственных колебаний имеем:

$$\omega_j = \frac{K_j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_j(x) = v'(0) \frac{l}{K_j u} \sin \frac{K_j}{l} x \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

В частности, если  $\alpha = 0$ , то

$$\omega_j = \frac{\pi j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_j(x) = v'(0) \frac{l}{\pi j u} \sin \frac{\pi j}{l} x \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

а если  $\alpha = 1$ , то

$$\omega_j = \frac{\pi(2j-1)}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_j(x) = v'(0) \frac{2l}{\pi(2j-1)} \sin \frac{\pi(2j-1)}{2l} x \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

**Случай 3.** Концы стержня не закреплены:  $N(0) = 0, N(l) = 0$ . Равенство  $N(0) = k_0 v'(0) = 0$  равносильно условию  $v'(0) = 0$ . Поэтому из формулы (5), после реализации этого условия, будем иметь

$$N(x) = k_0 v(0) \left[ \left( \frac{1-\alpha}{l} \right)^2 x \cos \lambda x - \left( \left( \frac{1-\alpha}{l} \right)^2 \frac{1}{\lambda} + \lambda u \right) \sin \lambda x \right].$$

Второе условие приводит к частотному уравнению

$$N(l) = k_0 \frac{v(0)}{l} \left[ (1-\alpha)^2 \cos K - \left( (1-\alpha)^2 \frac{1}{K} + \alpha K \right) \sin K \right] = 0.$$

Полученное уравнение преобразуется к элементарному уравнению только в ситуации, когда поперечное сечение стержня постоянно. При этом  $\alpha = 1$ ,  $\sin K = 0$ ,  $K_j = \pi j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). В противном случае, для отыскания корней трансцендентного уравнения

$$(1 - \alpha)^2 \cos K - \left( (1 - \alpha)^2 \frac{1}{K} + \alpha K \right) \sin K = 0$$

необходимо обратиться к численным методам. В таблице 1 приведены результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний, соответствующих данному случаю, для каждого значения параметра  $\alpha$  с шагом 0,1.

Таким образом, в рассматриваемом случае для частот и форм собственных колебаний получаем:

$$\omega_j = \frac{K_j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, v_j(x) = \frac{v(0)}{u} \left( \cos \frac{K_j}{l} x - \frac{1-\alpha}{K_j} \sin \frac{K_j}{l} x \right) \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

В частности, если  $\alpha = 1$ , то будем иметь:

$$\omega_j = \frac{\pi j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, v_j(x) = v(0) \cos \frac{\pi j}{l} x \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Все полученные здесь результаты сведены воедино в таблице 1.

### ВЫВОДЫ

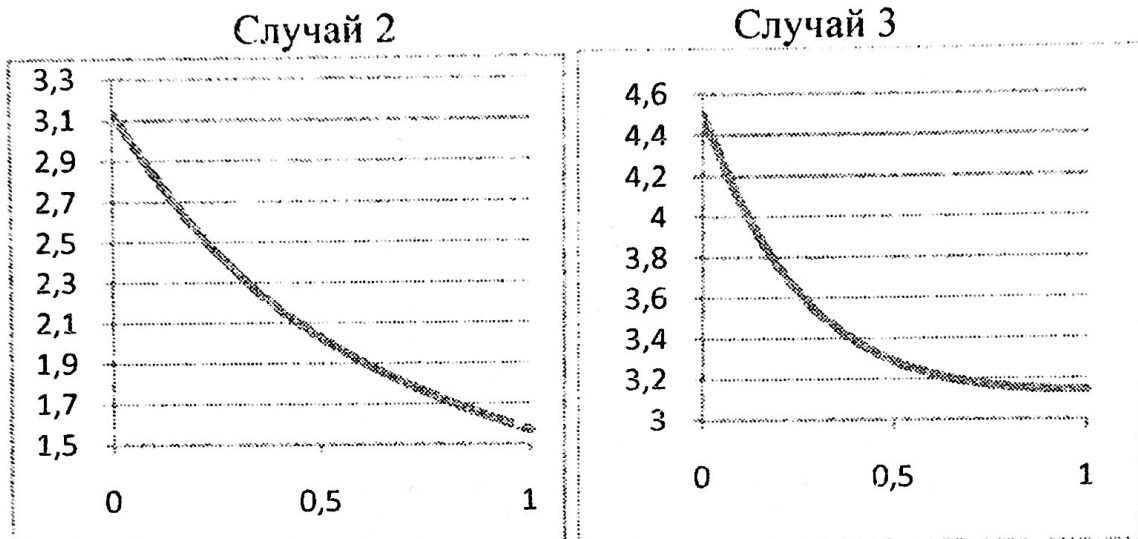
Основываясь на точном решении дифференциального уравнения колебаний, изучены собственные (свободные) продольные колебания конического и пирамидального стержней для трех случаев граничных условий. Вычислены первые три коэффициента колебаний, посредством которых определяются первые три частоты собственных колебаний. Выписаны соответствующие этим частотам формы собственных колебаний стержня.

Установлено, что коэффициенты колебаний  $K_j$  не зависят от длины стержня. Вследствие этого, частоты колебаний  $\omega_j = \frac{K_j}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , всегда обратно пропорциональны длине стержня, с коэффициентом пропорциональности  $K_j \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Таблица 1

| Частотное уравнение   | $\alpha$        | Коэффициенты колебаний |                  |                  | Формы собственных колебаний<br>( $j = 1, 2, 3$ )  |
|---|-----------------|------------------------|------------------|------------------|---|
|   |                 | $K_1$                  | $K_2$            | $K_3$            |   |
| Случай 1  |                 |                        |                  |                  |   |
| $\sin K = 0$  | $\alpha \neq 0$ | $\pi$                  | $2\pi$           | $3\pi$           | $v_j(x) = v'(0) \frac{l}{\pi j u} \sin \frac{\pi j}{l} x$   |
| Случай 2  |                 |                        |                  |                  |   |
| $\sin K = 0$  | 0               | $\pi$                  | $2\pi$           | $3\pi$           | $v_j(x) = v'(0) \frac{l}{\pi j u} \sin \frac{\pi j}{l} x$   |
| $\frac{1-\alpha}{K} \sin K + \alpha \cos K = 0$                                       | 0,1             | 2,836301               | 5,717249         | 8,658705         | $v_j(x) = v'(0) \frac{l}{K_j u} \sin \frac{K_j}{l} x$   |
|   | 0,2             | 2,570432               | 5,354032         | 8,302929         |   |
|   | 0,3             | 2,352173               | 5,138629         | 8,133362         |   |
|   | 0,4             | 2,174626               | 5,003645         | 8,038463         |   |
|   | 0,5             | 2,028758               | 4,913181         | 7,978666         |   |
|   | 0,6             | 1,907091               | 4,849017         | 7,937771         |   |
|   | 0,7             | 1,804035               | 4,801413         | 7,908122         |   |
|   | 0,8             | 1,715507               | 4,764809         | 7,885674         |   |
|   | 0,9             | 1,638505               | 4,735847         | 7,868102         |   |
| $\cos K = 0$  | 1               | $\frac{\pi}{2}$        | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $v_j(x) = \frac{2lv'(0)}{\pi(2j-1)} \sin \frac{\pi(2j-1)}{2l} x$  |
| Случай 3  |                 |                        |                  |                  |   |
| $(1-\alpha)^2 \cos K - \left( (1-\alpha)^2 \frac{1}{K} + \alpha K \right) \sin K = 0$ | 0               | 4,493409               | 7,725252         | 10,904122        | $v_j(x) = \frac{v(0)}{u} \left( \cos \frac{K_j}{l} x - \frac{1-\alpha}{K_j} \sin \frac{K_j}{l} x \right)$ |
|   | 0,1             | 4,070058               | 7,061906         | 10,065184        |   |
|   | 0,2             | 3,749124               | 6,702449         | 9,732705         |   |
|   | 0,3             | 3,529909               | 6,519908         | 9,590576         |   |
|   | 0,4             | 3,383384               | 6,419535         | 9,518132         |   |
|   | 0,5             | 3,286007               | 6,360678         | 9,477196         |   |
|   | 0,6             | 3,222107               | 6,325042         | 9,452896         |   |
|   | 0,7             | 3,181477               | 6,303514         | 9,438379         |   |
|   | 0,8             | 3,157348               | 6,291123         | 9,430077         |   |
|   | 0,9             | 3,145121               | 6,284953         | 9,425956         |   |
| $\sin K = 0$  | 1               | $\pi$                  | $2\pi$           | $3\pi$           | $v_j(x) = v(0) \cos \frac{\pi j}{l} x$  |

Коэффициенты колебаний, безусловно, зависят от характера краевых условий. Кроме того, во втором и третьем случаях коэффициенты колебаний (а значит, и частоты) зависят от геометрической характеристики стержня  $\alpha$ . А именно, чем больше  $\alpha$ , тем меньше коэффициенты колебаний, и наоборот, чем меньше  $\alpha$ , тем больше коэффициенты колебаний. Характер зависимости первого коэффициента колебаний (а значит, и первой частоты) от параметра  $\alpha$  представлен на следующих графиках:



### Литература

1. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971. – 512 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 767 с.