

# НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Яременко О.Ф. (д.т.н., проф.), Будзул А.Я. (аспірант)  
(Одеська державна академія будівництва та архітектури)

В статті описане застосування скінченного елемента у вигляді зрізаного конуса для визначення напружено-деформованого стану різноманітних конструкцій обертання з урахуванням ортотропних властивостей матеріалу конструкцій; наведені приклади, а також аналіз отриманих результатів.

## 1. Вступ.

Досить вагому частку в проектуванні просторових конструкцій становлять оболонки обертання та круглі плити. У випадку досить складної геометрії подібних конструкцій чи складного описання фізичних властивостей матеріалу, розв'язання таких задач стає доволі складним, чи взагалі неможливим без використання наближених методів розрахунку.

## 2. Теоретичні основи.

Для розв'язання описаних вище задач ми використали чисельні методи, а саме метод скінчених елементів (МСЕ). Для вирішення вісесиметричних задач розрахунку різноманітних конструкцій обертання досить зручним і універсальним є скінчений елемент (СЕ) у вигляді зрізаного конуса (рис. 1),

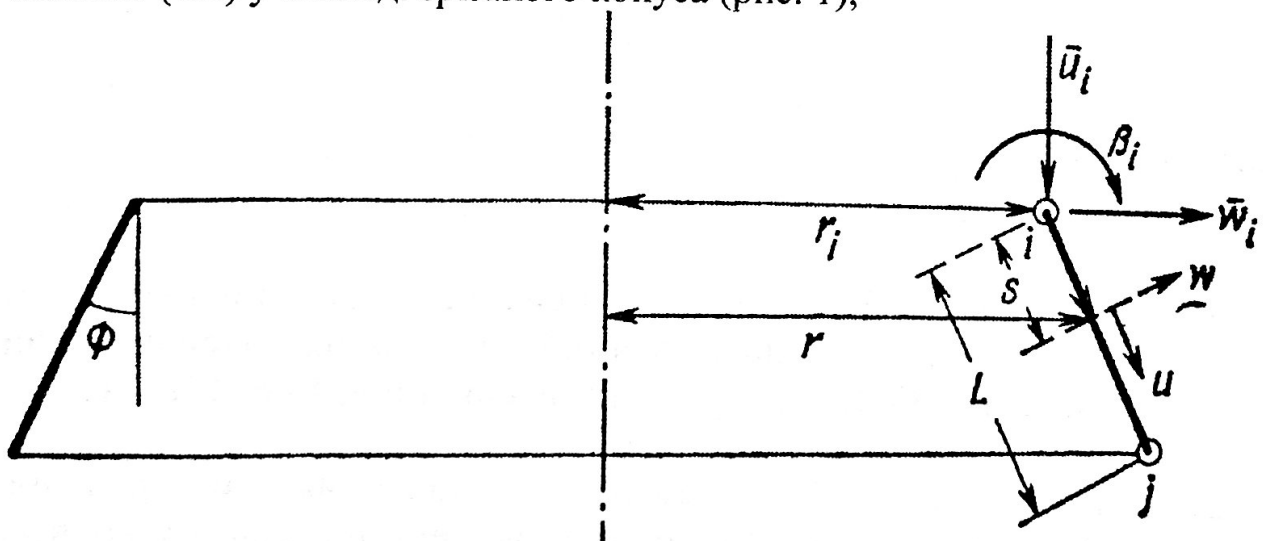


Рис.1.

де переміщення точок серединної поверхні визначається двома компонентами  $u$  і  $w$  по дотичній та нормалі до поверхні.

При умові що кут  $\varphi$  не змінюється маємо такі чотири компоненти деформацій

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_S \\ \varepsilon_\Theta \\ \chi_S \\ \chi_\Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} \\ \frac{w \cdot \cos \varphi + u \cdot \sin \varphi}{r} \\ -\frac{d^2 w}{ds^2} \\ -\frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix}$$

Їм відповідають чотири результуючі напруження, що зв'язані з деформаціями матрицею пружності  $[D]$ :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_S \\ N_\Theta \\ M_S \\ M_\Theta \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \text{ Матриця } [D]$$

формується, як відомо, в залежності від фізичних властивостей матеріалу. Оскільки задача розв'язується чисельними методами, елементи матриці  $[D]$  можуть бути не лише сталі величини, а й функції якоїсь змінної (наприклад, часу).

У випадку ортотропних властивостей матеріалу матриця  $[D]$  має вигляд:

$$[D] = \begin{bmatrix} C_L & C_{LC} & 0 & 0 \\ C_{CL} & C_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_L & D_{LC} \\ 0 & 0 & D_{CL} & D_C \end{bmatrix},$$

де:

$$C_L = \frac{E_L t}{1 - \mu_{LC} \mu_{CL}}, \quad C_C = \frac{E_C t}{1 - \mu_{LC} \mu_{CL}},$$

$$C_{CL} = \mu_{LC} C_C, \quad C_{CL} = \mu_{CL} C_L, \quad C_{LC} = C_{CL},$$

$$D_L = \frac{E_L t^3}{12(1 - \mu_{LC} \mu_{CL})}, \quad D_C = \frac{E_C t^3}{12(1 - \mu_{LC} \mu_{CL})},$$

$$D_{CL} = \mu_{LC} D_C, \quad D_{CL} = \mu_{CL} D_L, \quad D_{LC} = D_{CL},$$

Осі ортотропії орієнтовані вздовж радіального та кільцевого напрямків.

де:  $t$  – товщина пластинки чи оболонки;

$E_L, E_C$  – модулі пружності;

$\mu_{LC}, \mu_{CL}$  – коефіцієнти Пуассона;

$L$  – радіальний напрямок,  $C$  – кільцевий напрямок.

Використовуючи певні функції форми ми можемо зв'язати вектор переміщень будь-якої точки та вектор переміщень вузлових точок елемента наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\}^e,$$

$$\text{де } \{\delta\}^e = \{u_i \quad w_i \quad \beta_i \quad u_j \quad w_j \quad \beta_j\}^T$$

Далі переходимо до визначення градієнтної матриці:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}^e,$$

Після чого ми можемо отримати матрицю жорсткості  $[K]$  скінченного елемента:

$$[K] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L ds.$$

Інтегрування ведеться по всій площі елемента

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot r ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L ds,$$

де  $s$  змінюється від 0 до 1.

Перед інтегруванням необхідно виразити радіус  $r$  через  $s$ :

$$r = r_c + L \cdot s \cdot \sin \varphi.$$

В нашій роботі ми розглядаємо три випадки відношення радіального і кільцевого модулів пружності, що пов'язано з урахуванням ортотропності матеріалу. Це відношення становить:

$E_L / E_C = 1$  - перший випадок (на рисунках зображено суцільною лінією),

$E_L / E_C = 0.75$  - другий випадок (штрихова лінія),

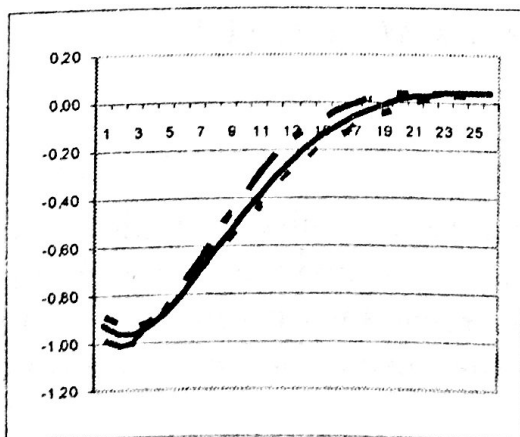
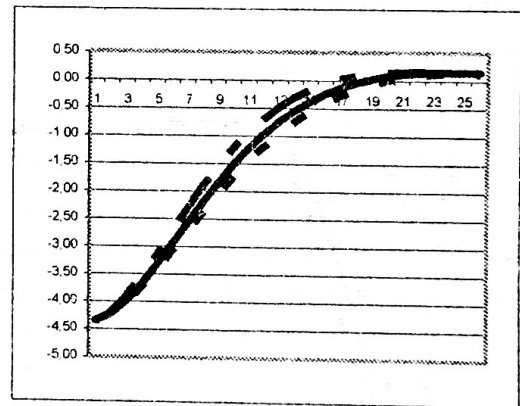
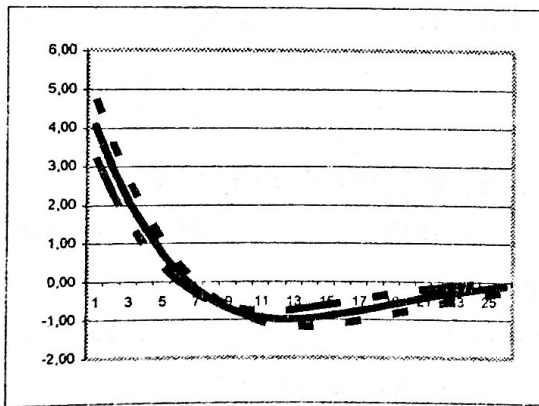
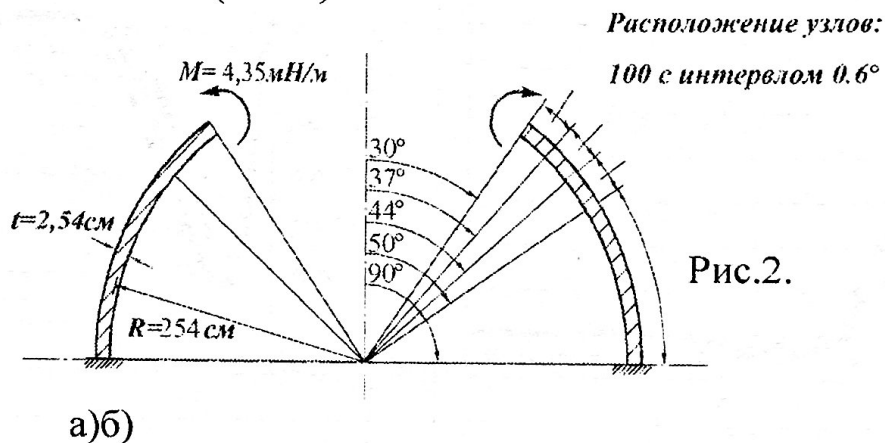
$E_L / E_C = 1.5$  - третій випадок (штрих пунктирна лінія).

### 3. Приклади.

Далі наведемо декілька прикладів розрахунку різноманітних вісесиметричних конструкцій на дію вісесиметричного навантаження. Ці дані наведені на схемах. Розрахунок проведено за допомогою написаної нами програми на мові програмування DELPHI.

#### Приклад 1.

Дано: Жорстко закріплена сферична оболонка, товщиною  $t = 2.54 \text{ см}$ , радіусом  $R = 2.54 \text{ м}$ . Модуль пружності  $E_L = 6.7 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$ , коефіцієнт Пуассона рівний 0,33. Зовнішнім навантаженням є момент, зосереджений біля верхнього отвору, з інтенсивністю  $4.32 \text{ кН/м}$ . (Рис.2)

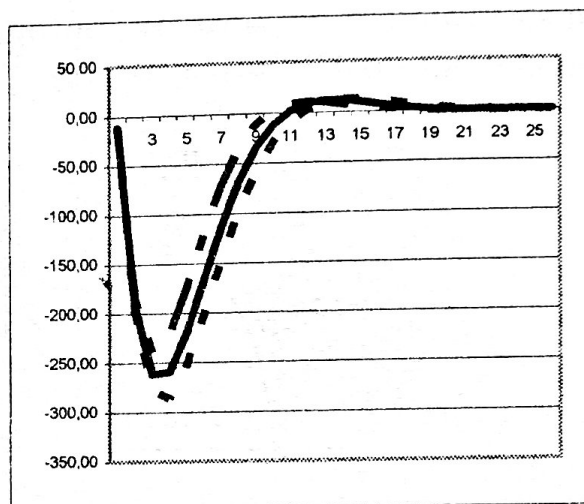
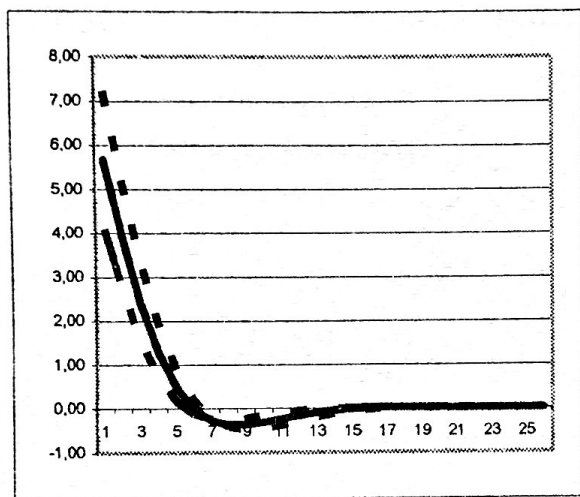


На рисунку 3 зображено:  
 а) епюру горизонтальних переміщень в  $\text{м} \cdot 10^7$ ,  
 б) епюру радіальних згинальних моментів  $M_L$  в Н,  
 в) епюру кільцевих згинальних моментів  $M_C$  в Н,

### Приклад 2.

Дано: Циліндрична оболонка, жорстко закріплена по нижньому краю, товщиною  $t = 0.0254\text{см}$ , висотою  $H = 0.1524\text{м}$ , радіусом  $R = 0.127\text{м}$ . Модуль пружності  $E_L = 6.7 \cdot 10^7 \text{кН/м}^2$ , коефіцієнт Пуассона приймаємо рівний 0,33. Навантаженням є горизонтальна вісесиметрична кільцева сила інтенсивністю 176 Н/м, яка зосереджена біля верхнього вільного краю.

а)б)



в)

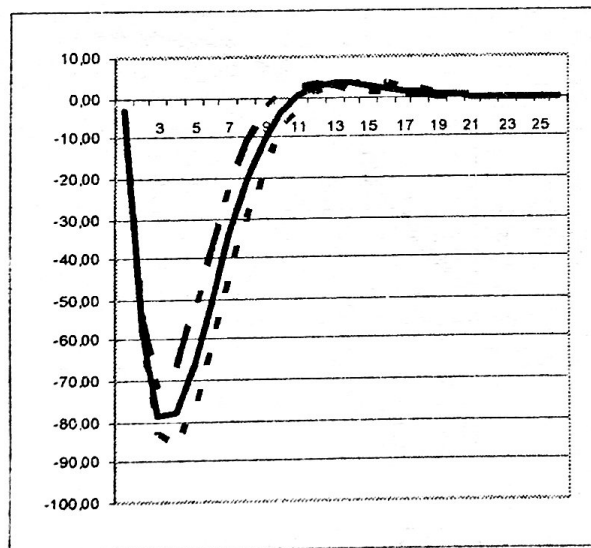


Рис.4.

- На рисунку 4 зображено:
- а) епюру горизонтальних переміщень в  $\text{м} \cdot 10^5$ ,
  - б) епюру радіальних згинальних моментів  $M_L$  в  $\text{Н} \cdot 10^3$ ,
  - в) епюру кільцевих згинальних моментів  $M_C$  в  $\text{Н} \cdot 10^3$ ,

### 4. Висновки.

На цих прикладах продемонстровано універсальність та потенціал методу скінчених елементів при розрахунку інженерних задач. За допомогою достатньо простого скінченого елемента можна розв'язати широке коло задач. Крім того, на відміну від аналітичного

розрахунку майже немає обмежень щодо геометрії конструкції та її фізичних властивостей.

Порівнюючи розрахунок в трьох різних випадках відношення модулів пружності матеріалу конструкції, можна зробити висновок про вплив даного явища на величини переміщень та зусиль. В нашому прикладі при збільшенні кільцевого модуля пружності ( $E_L / E_C = 0.75$ ) значення зусиль збільшувались в обох напрямках, в той час як переміщення приймали менші значення. І навпаки, з його зменшенням ( $E_L / E_C = 1.5$ ) значення зусиль зменшувались, а переміщення зростали.

Крім того змінюючи матрицю  $[D]$  даного СЕ, при проектуванні вісесиметричних конструкцій ми можемо врахувати не лише ортотропні властивості матеріалу, а й наявність можливих реологічних процесів, що має важливу роль при проектуванні конструкцій.

#### Список використаної літератури.

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – Москва: «Мир», 1975. – 540 с.
2. Большаков В.И., Яценко Е.А. и др. Основы метода конечных элементов. Днепропетровск, 2000. – 254 с.
3. Образцов И.Ф. и др. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – Москва: «Высшая школа», 1985. – 392 с.
4. Яременко О.О. Напружено-деформований стан пошкоджених куполів та склепінь. Автореферат дис. к.т.н. Одеса, 2003. – 24 с.

#### Анотація.

Стаття присвячена застосуванню методу скінчених елементів для розрахунку ортотропних оболонок обертання. Розглянутий скінчений елемент у вигляді зрізаного конуса. Наведені результати розрахунку купола та циліндричної оболонки, виконаних із ортотропного матеріалу.

#### Annotation.

The article is devoted to application of finite element method for the calculation of shells of rotation. Considered finite element as truncated cone. Resulted results of calculation of dome and cylinder shell executed from material taking into account orthotropy.