

## ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ковров А.В., Чайковский Р.Э., Островидова Е.А. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Рассмотрены особенности распределения касательных напряжений в поперечных сечениях балок переменного поперечного сечения верхняя и нижняя грани которых произвольно наклонены к оси.

Для выяснения характера распределения касательных напряжений, в балках переменного поперечного сечения рассмотрим элемент балки (рис. 1), вырезанный двумя сечениями на бесконечно малом расстоянии  $dx$ . В поперечных сечениях участка действуют поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_y + dQ_y$ , а также изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_z + dM_z$ .

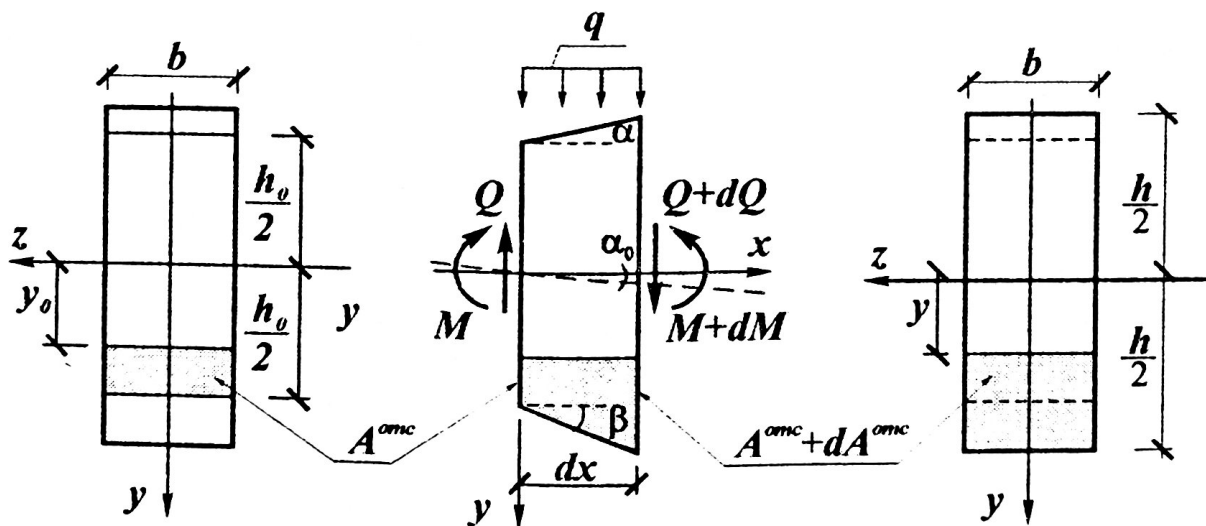


Рис. 1.

С помощью продольного сечения на расстоянии  $y$  вырежем нижнюю часть участка (рис. 1).

Рассмотрим равновесие вырезанной части в направлении продольной оси  $x$  (рис. 2) под действием равнодействующих частей нормаль-

ных напряжений  $N^{омс}$  и  $N^{омс} + dN^{омс}$  и равнодействующей касательных напряжений  $\tau_{yx}$ , возникающих в продольном сечении –  $dT$  (рис. 2).

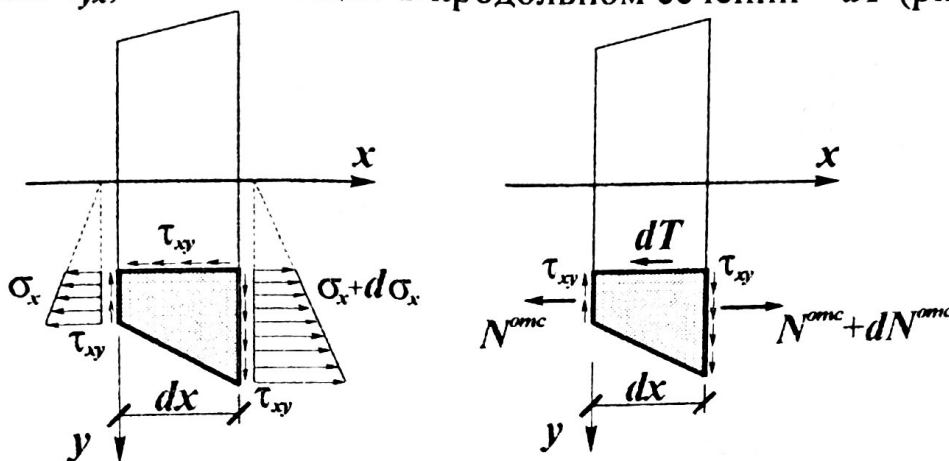


Рис. 2.

После традиционных преобразований, с учетом закона парности касательных напряжений, уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\tau = \frac{1}{b(y)} \frac{dN^{омс}}{dx}. \quad (1)$$

Физический смысл уравнения (1) заключается в том, что касательные напряжения возникают как необходимость уравновесить изменения равнодействующих нормальных напряжений вдоль оси балки.

Как известно, в том случае, если в стержне постоянного сечения нормальные напряжения по длине не изменяются ( $M_z = \text{const}$ ), то касательные напряжения в сечениях не возникают ( $Q_y = 0$ ).

После подстановки в формулу (2) выражения для равнодействующей части нормальных напряжений, действующих на площади  $A^{омс}$ , с последующим использованием формулы для определения нормальных напряжений получим и соответствующих преобразований, получим:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{омс}}{I_z b(y)} + \frac{M_z}{b(y)} \frac{d}{dx} \left( \frac{S_z^{омс}}{I_z} \right). \quad (2)$$

Таким образом, касательные напряжения в балке переменного сечения связаны как с поперечной силой  $Q_y$ , так и с изгибающим моментом  $M_z$ .

$$\tau = \tau^Q + \tau^M. \quad (3)$$

Рассмотрим балку прямоугольного сечения с переменной высотой  $h(x)$ , имеющей грани, различно расположенные относительно оси  $z$ , причем, пусть  $\alpha < \beta$ . Для такой балки необходимо учитывать, что от переменной  $x$  зависят высота и координата точки в направлении оси  $y$  (рис. 3).

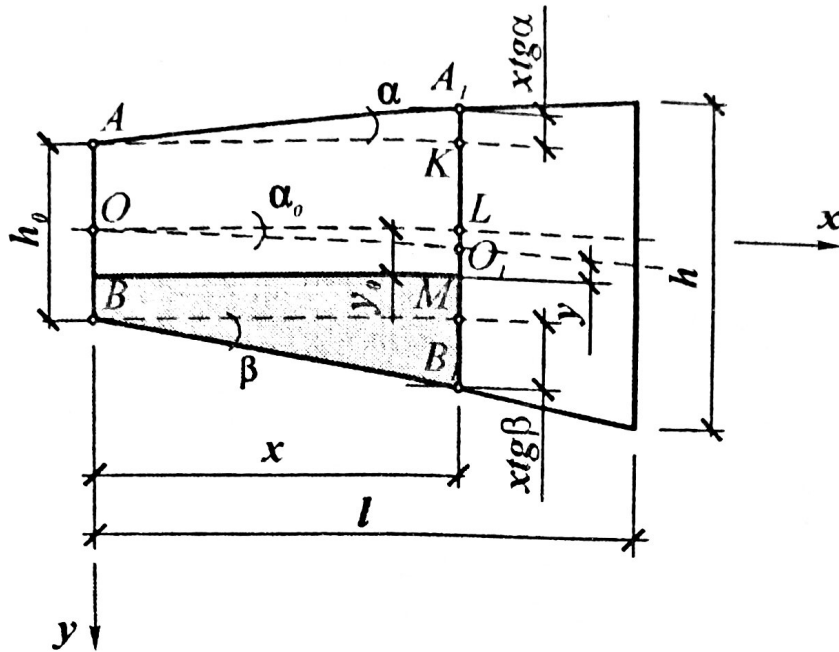


Рис. 3.

Очевидно, что соответствующее выражение функции высоты балки имеет вид:

$$h = h_0 + x(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta). \quad (4)$$

Из рассмотрения геометрических соотношений, в результате преобразований получим:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2}. \quad (5)$$

Из рис. 3 также очевидно, что:

$$y = y_0 - x\operatorname{tg}\alpha. \quad (6)$$

В том случае, если рассматриваются точки в верхней части балки, то в формулу (6) подставляются отрицательные значения переменной координаты  $y$ .

Если же в рассматриваемой балке  $\alpha > \beta$ , то формулы (5) и (6) принимают соответствующий вид:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{2}, \quad y = y_0 + x\operatorname{tg}\alpha. \quad (7)$$

Геометрические характеристики этого сечения:

$$\begin{aligned} A &= bh(x); \quad I_z = \frac{bh^3(x)}{12}; \quad W_z = \frac{bh^2(x)}{6}; \\ S_z^{\text{омс}} &= y_c^{\text{омс}} A^{\text{омс}} = \left( \frac{h(x)}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h(x)}{2} - y \right) \right) \cdot b \left( \frac{h(x)}{2} - y \right) = \\ &= \frac{b}{2} \left( \frac{h(x)}{2} + y \right) \left( \frac{h(x)}{2} - y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2(x)}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда, подставляя выражения (5), (6) и (7) в формулу отношения статического момента к осевому, берем от него производную. После преобразований полученное выражение подставляем в (2), и выделяя в знаменателе первого слагаемого площадь  $A(x)$ , а в знаменателе второго – момент сопротивления  $W_z(x)$ , получим:

$$\tau = \frac{Q_y}{A} \left( \frac{3}{2} - 6 \frac{y^2}{h^2(x)} \right) + \frac{M_z}{W_z} \left( 3 \frac{y(x)^2}{h(x)^2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) + \frac{y(x)}{h(x)} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{4} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \right). \quad (9)$$

Первое слагаемое в (10) представляет собой выражение касательных напряжений, связанных с поперечной силой  $\tau_Q$ . Их эпюра представляет собой параболу. Значения на гранях при  $y = \frac{h(x)}{2}$  равны:

$$\tau_Q = \frac{Q_y}{A} \left( \frac{3}{2} - 6 \frac{h^2(x)}{4h^2(x)} \right) = 0.$$

Максимальные значения возникают на уровне нейтральной линии ( $y = 0$ ):

$$\tau_{Q_{max}} = \frac{Q_y}{A} \left( \frac{3}{2} - 6 \frac{Q}{h^2(x)} \right) = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A}.$$

Таким образом, вид эпюры  $\tau_Q$  (рис. 5) совпадает с эпюрой касательных напряжений, возникающих в прямоугольном сечении постоянном по длине балки. Площадь эпюры  $\tau_Q$  равна поперечной силе  $Q_y$ .

Второе слагаемое в (10) представляет собой выражение касательных напряжений, связанных с изменением нормальных напряжений, создающих изгибающий момент  $\tau_M$ . Их эпюра так же имеет вид параболы.

Значения на гранях:

– при  $y = \frac{h(x)}{2}$  равны:

$$\begin{aligned} \tau_M &= \frac{M_z}{W_z} \left( \frac{3}{4} \frac{h(x)^2}{h(x)^2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) + \frac{1}{2} \frac{h(x)}{h(x)} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{4} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \right) = \\ &= \frac{M_z}{W_z} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

– при  $y = -\frac{h(x)}{2}$  равны:

$$\tau_M = \frac{M_z}{W_z} \left( \frac{3 h(x)^2}{4 h(x)^2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \frac{1 h(x)}{2 h(x)} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{4} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \right) =$$

$$= \frac{M_z}{W_z} \operatorname{tg} \alpha.$$

На уровне нейтральной линии ( $y = 0$ ) напряжения равны:

$$\tau_M = \frac{M_z}{W_z} \left( 0 + 0 - \frac{1}{4} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \right) = -\frac{1}{4} \frac{M_z}{W_z} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Эпюра касательных напряжений  $\tau_M$  разнозначна (рис. 4), соответственно напряжения меняют направление по высоте сечения, самоуравновешиваясь. Площадь эпюры  $\tau_M$  равна нулю.

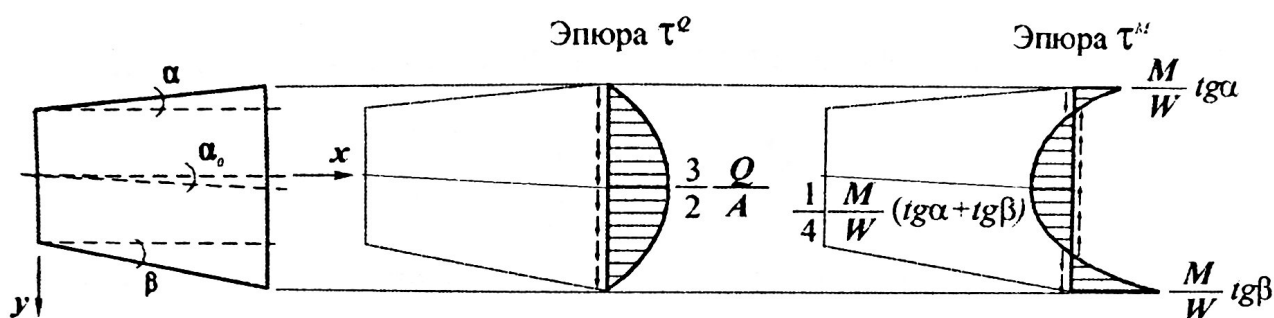


Рис. 4.

### Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
2. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций – М.: «Наука», 1976. – 704 с.
3. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов – М.: «Наука», 1975 – 376 с.
4. Ковров А.В., Болгар А.Ю., Чайковский Р.Э. К определению напряжений в балках переменного поперечного сечения // Вісник ОДАБА. Вип. №7. – Одеса: 2003 – С. 104–108.
5. Ковров А.В. К определению напряжений в односкатных балках // Научно-технич. Сборник ХГАГХ „Коммунальное хозяйство городов”. Вып. 53. – Киев: „Техника”, 2003. – С. 333-338.