

УДК 624.073

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ НА КОНТУРЕ

к.т.н. Заврак Н.В. (г. Одесса ОГАСА)

CALCULATION OF NON-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATES WITH ARBITRARY FIXATION ON THE CONTOUR

Zavrak N.V.

Аннотация: Излагается методика расчета неоднородных анизотропных прямоугольных пластин с произвольным закреплением на контуре. В качестве примеров приведены результаты расчета для серии квадратных ортотропных пластин с жестко закрепленным краем под действием равномерно распределенной нагрузки.

Annotation: Methods of calculating the non-homogeneous anisotropic rectangular plates with arbitrary fixation on the contour is set forth.. Given as examples are the results of calculations for a series of square orthotropic plates with a fixed boundary under the action of a uniformly distributed load.

Несмотря на большое разнообразие методов расчета неоднородных анизотропных пластин, встречаются существенные трудности при их практической реализации. Они определяются не только сложностью интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, но и сложностью удовлетворения сопутствующих им граничных условий. Очень редко при решении практических задач такой расчет может быть проведен в аналитическом виде. Целесообразно, а иногда и единственно возможно использовать современные численные методы. Наиболее простым из них является метод конечных разностей /МКР/. Причем, при использовании этого метода, оказывается, что решение может быть найдено с достаточной степенью точности в одних случаях опорного закрепления, например, -шарнирно-подвижного,- на простой и достаточно редкой сетке, в других же, например - жестком защемлении,- только на сложной или весьма густой сетке, что делает соответствующий расчет очень трудоемким даже при использовании современной вычислительной техники.

Для ослабления указанного недостатка целесообразно строить численное решение так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и погружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загрузки, при разыскании которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. Такая методика расчета хотя и несколько усложняет нахождение искомого решения для сложных случаев закрепления, так как его приходится осуществлять в два шага, тем не менее, в конечном счете, оказывается более эффективной, поскольку позволяет находить составные части искомого решения с применением аналитических соотношений или сравнительно простых по структуре и небольшим по числу систем конечноразностных уравнений.

Изложим методику расчета, реализующую сформулированную идею и результаты ее использования проиллюстрируем на примере.

Задача расчета неоднородной анизотропной прямоугольной пластины с произвольным закреплением на контуре может сводиться к нахождению решения краевой задачи общего вида:

$$L(w) \Big|_{\Omega} = f, \quad R_i(w) \Big|_{S_i^k} = \rho_i, \quad \Gamma_i(w) \Big|_{S_i^r} = \varphi_i \quad (1)$$

где

$$L(w) = \bar{B}^T D \bar{B} w, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad R_1(w) = \begin{cases} \mp \frac{\partial w}{\partial x} & \text{при } x=0 \text{ и } a \\ \mp \frac{\partial w}{\partial y} & \text{при } y=0 \text{ и } b \end{cases};$$

$$R_2(w) = w \begin{cases} \text{при } x=0 \text{ и } a \\ \text{при } y=0 \text{ и } b \end{cases}; \quad \Gamma_{23} = \begin{cases} Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} & \text{при } x=0 \text{ и } a \\ Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} & \text{при } y=0 \text{ и } b \end{cases}; \quad (2)$$

$$\Gamma_1(w) = \begin{cases} M_x & \text{при } x=0 \text{ и } a \\ M_y & \text{при } y=0 \text{ и } b. \end{cases}$$

$\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ - прямоугольная область, которую занимает пластина; $S = \{x = 0 \text{ и } a, y = 0 \text{ и } b\}$ - ограничивающие эту область прямолинейные части контура; f - интенсивность приложенной к

пластине поперечной нагрузки; ρ_i и φ_i - заданные на участках $S_i^R < S$ и $S_i^F = S - S_i^R$ контура значения угла поворота, прогиба, изгибных моментов и приведенных поперечных сил; D – квадратная матрица жесткости порядка 3 с элементами, зависящими от координат x и y .

Меняя S_i^R и S_i^F , из формул (1) и (2) можно получить краевые дифференциальные задачи, описывающие состояние рассматриваемой пластинки при всех возможных способах закрепления и загрузки ее края.

Предположим, что ищется решение задачи (1), причем известно решение соответствующей “жесткой” задачи

$$L(v)|_{\Omega} = f, \quad R_i(v)|_S = \rho_i. \quad (3)$$

В работе (1) показано, что между решениями (1) и (3) имеет место зависимость

$$u(x, y) = v(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \chi_j(x, y), \quad (4)$$

где

$$X_j = \iint_{\Omega} \chi_j f d\omega - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i^R} T_i(\chi_j) \rho_i ds - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i^F} \Gamma_i(\chi_j) \rho_i ds + \sum_{i=1}^2 \int_{S_i^F} R_i(\chi_j) \rho_i ds, \quad (5)$$

а $\chi_j(x, y)$, ($j=1, 2, \dots$) – система специальным образом построенных координатных функций. Для их составления нужно найти полную систему решений вспомогательной однородной краевой задачи

$$L(\psi_k)|_{\Omega} = 0, \quad R_i(\psi_k)|_{S_i^R} = 0 \quad (6)$$

и проортонормировать ее по билинейному выражению

$$F(p, q) = \iint_{\Omega} (\bar{B}p)^T D \bar{B}q d\omega \quad (7)$$

Последнее может быть выполнено по формуле

$$\chi_j(x, y) = \sum_{k=j}^1 b_{jk} \psi_k(x, y) \quad j = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где

$$b_{jk} = c_j \text{ при } k = j; \quad b_{jk} = -c_j \sum_{i=j-1}^k \alpha_{jl} b_{lk} \text{ при } k = j-1, \dots, 2, 1, \quad (9)$$

далее

$$\alpha_{jl} = c_l \left\{ \beta_{jl} - \sum_{m=l-1}^1 \alpha_{jm} \alpha_{lm} \right\}; \quad c_j = \left(\beta_{jj} - \sum_{l=j-1}^1 \alpha_{jl}^2 \right)^{-1/2} \quad (10)$$

и, наконец, $\beta_{jk} = F(\psi_j, \psi_l)$.

Важная особенность описанного способа решения заключается в следующем: если построена система координатных элементов χ_j , то с ее помощью можно легко получить функцию прогибов u при любых нагрузках f , φ_i и смещениях ρ_i . Для этого необходимо лишь вычислить соответствующие коэффициенты X_j по формуле (5).

В случае, когда пластина однородна, элементы матрицы жесткости D не зависят от координат x , y ; при этом решения задачи (6) могут быть построены в аналитическом виде [1]. Значительно сложнее дело обстоит в рассматриваемом сейчас случае неоднородной пластины. Так как при этом коэффициенты уравнения (6) переменные, то решения его могут быть, как правило, найдены только в результате применения какого-нибудь численного метода. С этой целью используется метод конечных разностей.

Очевидно, что формула (4) может быть использована не только для нахождения функции u по известной функции v , но и для определения функции v , если мы знаем какую-нибудь функцию u . Последняя может быть иногда построена и в аналитической форме для неоднородной пластины, все четыре кромки которой прикреплены шарнирно к недеформируемой опоре.

Здесь приведены результаты расчета квадратной ортотропной пластины с жесткостями $D_{12} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$ и при различных $\varepsilon = \sqrt[4]{D_{22}/D_{11}}$ под действием равномерно распределенной нагрузки q при жестком закреплении, напряженно-деформированное состояние которой в случае шарнирного закрепления всех сторон уже исследовано [3].

Для удобного применения результатов расчета численные значения прогибов и изгибающих моментов в центре и в середине опорных кромок ортотропной квадратной пластины приведены в таблице 1 для $\nu = 0,3$.

Таблица 1

$\varepsilon = 4\sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}}$	Прогиб в центре	Моменты в середине опорных сторон		Моменты в центре	
	$w = \alpha \frac{qa^4}{D_{22}}$	$M_x = \beta_1 qa^2$ $x = \pm \frac{a}{2},$ $y = 0$	$M_y = \beta_2 qa^2$ $y = \pm \frac{b}{2},$ $x = 0$	$M_x = \gamma_1 qa^2$ $x = 0,$ $y = 0$	$M_y = \gamma_2 qa^2$ $y = 0,$ $x = 0$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2
1	0,00126	-0,0517	-0,0517	0,01777	0,01777
1,1	0,00151	-0,0538	-0,0581	0,01668	0,02140
1,2	0,00175	-0,0554	-0,0639	0,01520	0,02534
1,3	0,00192	-0,0563	-0,0687	0,01362	0,02862
1,4	0,00208	-0,0568	-0,0726	0,01179	0,03136
1,5	0,00221	-0,0570	-0,0757	0,01018	0,03375
1,6	0,00230	-0,0571	-0,0780	0,00865	0,03550
1,7	0,00238	-0,0571	-0,0799	0,00708	0,03708
1,8	0,00244	-0,0571	-0,0812	0,00590	0,03833
1,9	0,00249	-0,0571	-0,0822	0,00471	0,03929
2,0	0,00253	-0,0571	-0,0829	0,00378	0,04007

Из данных, указанных в этой таблице, вытекает, что при всех $\varepsilon = 4\sqrt{D_{22}/D_{11}}$, т.е. соотношениях жесткостей, с увеличением ε прогиб в центре, момент M_y в центре и моменты M_x, M_y на краях растут; момент же M_x в центре в случае жесткого закрепления пластинки по всему контуру уменьшается.

Список литературы

1. Слезингер И.Н. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа. – Прикладная математика и механика, т. 20, вып. 6, 1956.
2. Заврак Н.В., Малахова Н.А. Об одном способе расчета неоднородных анизотропных пологих оболочек с различными закреплениями на краях // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. докладов Международного симпозиума. –Одесса. 1995. –С.172-177.
3. Тимошенко С. П. , Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963.