УДК 624.03: 539.3

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

С. Я. Бекшаев

Многие инженерные сооружения обладают регулярностью или обобщенной симметрией, выражающейся в существовании группы G движений g, переводящих конструкцию в положение, неотличимое от исходного. Это обстоятельство вызвало ряд исследований [1 – 3], посвященных расчету таких сооружений методами, использующими теорию линейных представлений групп. Основная идея этих исследований опирается на возможность такого выбора неизвестных, при котором разрешающие уравнения метода распадаются на независимые подсистемы. При этом предварительно выбираются неизвестные, удовлетворяющие определенным требованиям симметрии, и упрощения достигаются за счет перехода к новым неизвестным с помощью некоторого линейного преобразования, означающего переход к новому базису в соответствующем линейном пространстве. Алгоритмы такого перехода, предложенные в [2] и [3], обладают рядом несовершенств, некоторые из которых отмечены в [4,5], где предложен иной, как представляется, идейно более ясный подход к формированию указанного базиса. Настоящая работа посвящена формулировке основных принципов этого подхода и иллюстрации его применения для расчетов регулярных линейно упругих механических систем. Ищется состояние линейно упругой конструкции под действием статического или стационарного динамического нагружения. Искомое состояние характеризуется тензорнозначной функцией $f(M)$ точки M конструкции, а нагружение – функцией $p(M)$. Задача приводится к решению линейного операторного уравнения

$$Cf = p, \tag{1}$$

где C - оператор статической или динамической жесткости.

Решая уравнение (1) по методу Бубнова – Галеркина [6], ищем f в виде линейной комбинации

$$f = q_1\varphi_1 + \ldots + q_s\varphi_s \tag{2}$$

известных базисных функций φ_k, число и вид которых подбираются из условия адекватного описания характерных состояний конструкции.

Рассматривая числа q_k как обобщенные координаты конструкции, получим для их определения систему уравнений [4,5]

$$\sum c_{ik} q_k = Q_i \, , \tag{3}$$

где $c_{ik} = (C\varphi_k, \varphi_i)$, $Q_i = (p, \varphi_i)$, (p, φ) - работа нагрузки p на перемещении конструкции, отвечающем состоянию φ.

Оператор C для симметричной конструкции обладает важным свойством [5]

$$\forall \varphi, \psi, \quad \forall g \in G: \ (Cg\varphi, g\psi) = (C\varphi, \psi), \tag{4}$$

где $g\varphi(M) = \varphi(g^{-1}M)$, g^{-1} - движение, обратное g.

Это свойство позволяет построить такой базис φ_k, для которого матрица системы (3) имеет блочно-диагональный вид. Построение осуществляется следующим образом.

Отправляясь от произвольных функций φ, ψ, ... и используя известные матрицы $\boldsymbol{\tau}^{(r)}(g) = \left\| \tau_{\alpha\beta}^{(r)}(g) \right\|$ неприводимых представлений группы G (r - номер представления), строим систему функций $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$, $\psi_{\mu\nu}^{(s)}$, ... по формулам вида

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(r)} = \sqrt{\frac{n_r}{N}} \sum_{g \in G} \overline{\tau}_{\alpha\beta}^{(r)}(g) g\varphi, \tag{5}$$

где n_r - размерность r-го представления группы G, N - порядок группы G (число различных движений $g \in G$), черта обозначает комплексное сопряжение. Для функций семейства (5) справедливы теоремы:

Теорема 1. *Функции $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$ при фиксированных r и β либо линейно независимы, либо все равны нулю.*

Теорема 2. *Если при некотором α система $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$, $\psi_{\alpha\beta}^{(r)}$, ... линейно* *зависима, то и система, получающаяся из нее при других* α *и тех же* r *и* β, *также линейно зависима.*

Теорема 3 (ортогональности). *Для любых* φ *и* ψ *(случай* $\varphi=\psi$ *не исключается) справедливы соотношения*

$$\left(C\varphi_{\alpha\beta}^{(r)},\psi_{\mu\nu}^{(s)}\right)=\delta_{rs}\delta_{\mu\alpha}\sum_{g\in G}\tau_{\beta\nu}^{(s)}(g)(C\varphi,g\psi), \tag{6}$$

где δ_{rs} *и* $\delta_{\mu\alpha}$ *- символы Кронекера.*

Доказательства теорем см. [4,5].

Теоремы 1 и 2 позволяют отбирать из семейства (5) базисные функции, а теорема 3 гарантирует квазидиагональность матрицы $\|c_{ik}\|$ системы (3) в выбранном базисе, а также явно определяет элементы диагональных блоков, поскольку из (6) следует (независимо от α)

$$\left(C\varphi_{\alpha\beta}^{(r)},\psi_{\alpha\nu}^{(r)}\right)=\sum_{g\in G}\tau_{\beta\nu}^{(r)}(g)(C\varphi,g\psi). \tag{7}$$

Рассмотрим построение системы (5) и соответствующей квазидиагонализованной системы (3) на примере регулярной конструкции, изображенной на рис.1, в которой сосредоточенные грузы массы m ,

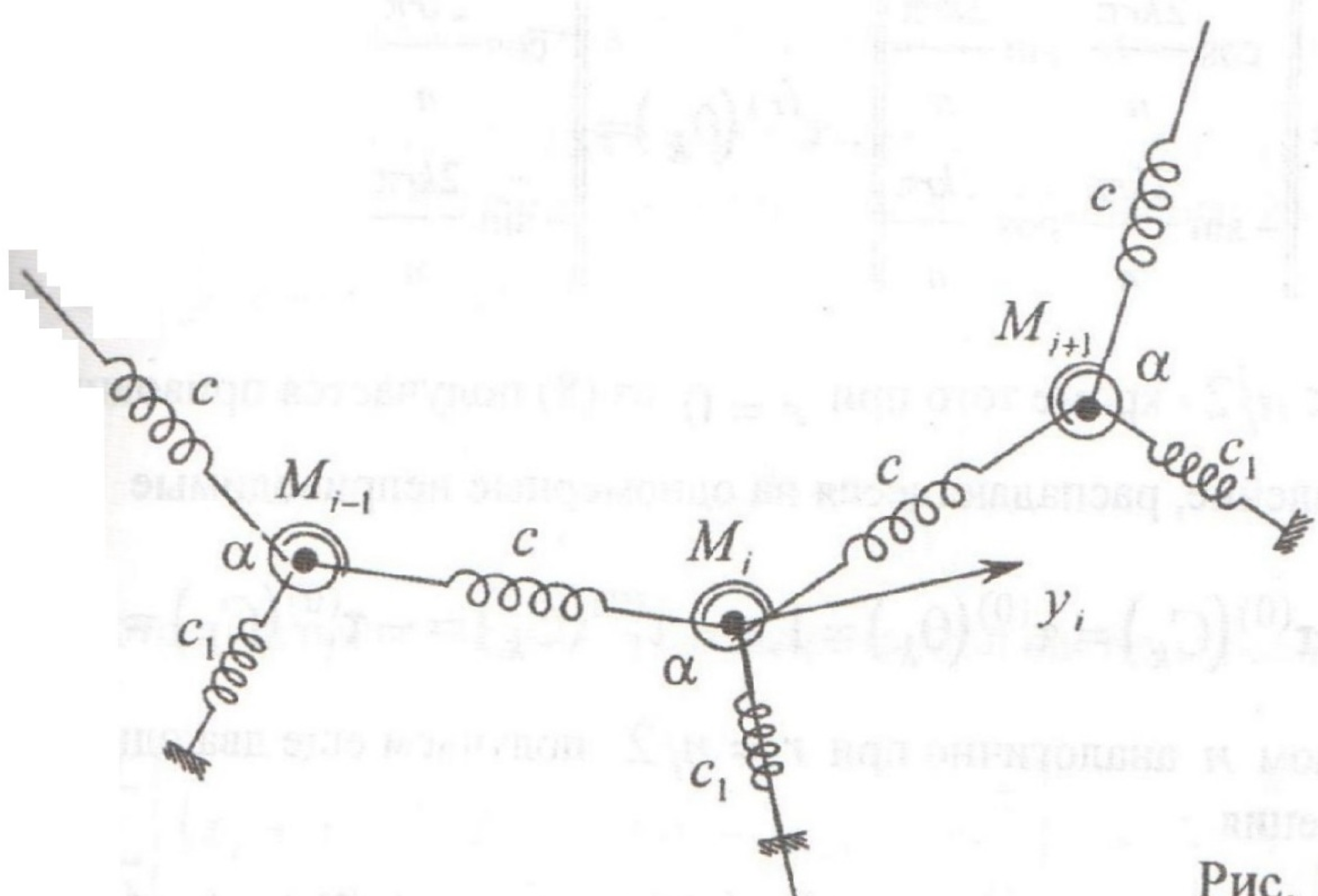

Рис. 1

расположенные в вершинах правильного n - угольника, соединены между собой одинаковыми пружинами жесткости c, оперты на радиальные пружины жесткости c_1 и, кроме того, смежные пружины, оставаясь прямолинейными, при относительном повороте на угол θ испытывают действие пары с моментом $\alpha\theta$ (α - жесткость соответствующей поворотной связи)

Положение конструкции определяется $2n$ переменными x_i и y_i, где x_i - радиальное, а y_i - трансверсальное смещения груза M_i. Эти величины образуют $2n$ -мерный вектор

$$f = (f_1, \dots, f_{2n}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Система обладает симметрией группы C_{nv}; самосовмещающими движениями являются повороты C_k на углы $2k\pi/n$ $(k = 1, \dots, n)$ вокруг оси симметрии и отражения θ_k в плоскостях Π_k, содержащих эту ось и образующих углы $k\pi/n$ $(k = 1, \dots, n)$ с плоскостью Π_0, содержащей точку M_1. Неприводимые представления группы C_{nv} имеют вид

$$\tau^{(r)}(C_k) = \begin{Vmatrix} \cos\frac{2kr\pi}{n} & \sin\frac{2kr\pi}{n} \\ -\sin\frac{2kr\pi}{n} & \cos\frac{2kr\pi}{n} \end{Vmatrix}, \quad \tau^{(r)}(\theta_k) = \begin{Vmatrix} \cos\frac{2kr\pi}{n} & -\sin\frac{2kr\pi}{n} \\ -\sin\frac{2kr\pi}{n} & -\cos\frac{2kr\pi}{n} \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

где $1 \le r < n/2$, кроме того при $r = 0$ из (8) получается приводимое представление, распадающееся на одномерные неприводимые

$$\tau^{(0)}(C_k) = \tau^{(0)}(\theta_k) = 1, \qquad \tau_1^{(0)}(C_k) = -\tau_1^{(0)}(C_k) = 1,$$

а при четном n аналогично при $r = n/2$ получаем еще два одномерных представления

$$\tau^{(n/2)}(C_k) = \tau^{(n/2)}(\theta_k) = (-1)^k, \quad \tau_1^{(n/2)}(C_k) = -\tau_1^{(n/2)}(\theta_k) = (-1)^k.$$

Для построения симметризованного базиса вида (5) введем в рассмотрение две функции φ и ψ с координатами $\varphi_k = \delta_{1k}$,

$\psi_k = \delta_{n+1,k}$ (δ - символ Кронекера). По формуле (5) функция φ порождает набор функций, компоненты которых при $i = 1,\ldots,n$ равны

$$\varphi_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{n}},\ \varphi_{11i}^{(r)} = \frac{2}{\sqrt{n}}\cos\frac{2ir\pi}{n},\ \varphi_{21i}^{(r)} = -\frac{2}{\sqrt{n}}\sin\frac{2ir\pi}{n},\ \varphi_i^{(n/2)} = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(-1\right)^i,$$

а при $i = n+1,\ldots,2n$ все равны нулю. Кроме того $\varphi_{12}^{(r)} = \varphi_{22}^{(r)} = 0$. Функция ψ порождает набор

$$\psi_{n+i}^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{n}},\ \psi_{12,n+i}^{(r)} = \frac{2}{\sqrt{n}}\sin\frac{2ir\pi}{n},\ \psi_{22,n+i}^{(r)} = \frac{2}{\sqrt{n}}\cos\frac{2ir\pi}{n},\ \psi_{n+i}^{(n/2)} = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(-1\right)^i,$$

компоненты с номерами с 1 по n все равны нулю. Кроме того

$\psi_{11}^{(r)} = \psi_{12}^{(r)} = 0$.

Таким образом n функций $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$ определяют подпространство радиальных смещений грузов, а n функций $\psi_{\alpha\beta}^{(r)}$ - подпространство трансверсальных смещений. Согласно теореме 1 все эти функции линейно независимы и могут служить базисом в $2n$-мерном пространстве конфигураций конструкции.

Для построения элементов (7) обобщенной матрицы жесткости в этом базисе необходимо установить явный вид оператора C в уравнении (1). Согласно теореме Лагранжа проекции силы, действующей на i-й груз, на оси x_i и y_i соответственно равны

$$p_i^x = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad p_i^y = \frac{\partial \Pi}{\partial y_i},$$

где Π - потенциальная энергия деформированной системы,равная

$$\Pi = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i + x_{i-1}\right)\sin\frac{\pi}{n} + \left(y_i - y_{i-1}\right)\cos\frac{\pi}{n}\right]^2 + \frac{c_1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 +$$

$$+\frac{\alpha}{2l^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_{i-1}-2x_i+x_{i+1}\right)\cos\frac{\pi}{n}+\left(y_{i-1}-y_{i+1}\right)\sin\frac{\pi}{n}\right]^2, \qquad (9)$$

где l – свободная длина внутренней пружины. Здесь первая сумма – потенциальная энергия внутренних пружин, вторая – опорных, третья – упругих поворотных связей. Опуская тривиальные выкладки, приведем результат

$$p_i^x=\left(\frac{\alpha}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(x_{i-2}+x_{i+2}\right)+\left(c\sin^2\frac{\pi}{n}-\frac{4\alpha}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(x_{i-1}+x_{i+1}\right)+$$

$$\left(2c\sin^2\frac{\pi}{n}+\frac{6\alpha}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}+c_1\right)x_i+$$

$$+\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\left[\frac{\alpha}{l^2}\left(y_{i-2}-y_{i+2}\right)+\left(c+\frac{2\alpha}{l^2}\right)\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)\right], \qquad (10а)$$

$$p_i^y=\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\left[\frac{\alpha}{l^2}\left(x_{i+2}-x_{i-2}\right)+\left(c+\frac{2\alpha}{l^2}\right)\left(x_{i-1}-x_{i+1}\right)\right]-$$

$$-\frac{\alpha}{l^2}\sin^2\frac{\pi}{n}\left(y_{i-2}+y_{i+2}\right)-c\cos^2\frac{\pi}{n}\left(y_{i-1}+y_{i+1}\right)+$$

$$+2\left(c\cos^2\frac{\pi}{n}+\frac{\alpha}{l^2}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)y_i. \qquad (10б)$$

Формулы (10) представляют собой запись системы (1) в координатах x_i, y_i. С их помощью вычисляются матричные элементы по формуле (7), где $\theta_k\varphi=C_k\varphi,\ \theta_k\psi=-C_k\psi$,

$$\left(C\varphi,C_k\varphi\right)=\frac{\partial p_i^x}{\partial x_{i-k}},\quad \left(C\varphi,C_k\psi\right)=\frac{\partial p_i^y}{\partial x_{i-k}},\quad \left(C\psi,C_k\psi\right)=\frac{\partial p_i^y}{\partial y_{i-k}}$$

Не приводя промежуточных элементарных выкладок, запишем окончательный вид элементов диагональных блоков:

двумерных (при $1\le r<n/2$):

$$C_{11}^{(r)}=\left(C\varphi_{11}^{(r)},\varphi_{11}^{(r)}\right)=2\left(4c\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{r\pi}{n}+16\frac{\alpha}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}\sin^4\frac{r\pi}{n}+c_1\right),$$

$$C_{12}^{(r)}=C_{21}^{(r)}=\left(C\varphi_{11}^{(r)},\psi_{12}^{(r)}\right)=4\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{2r\pi}{n}\left(c+\frac{4\alpha}{l^2}\sin^2\frac{r\pi}{n}\right),\qquad(11)$$

$$C_{22}^{(r)}=\left(C\psi_{12}^{(r)},\psi_{12}^{(r)}\right)=8\sin^2\frac{r\pi}{n}\left(c\cos^2\frac{\pi}{n}+\frac{4\alpha}{l^2}\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{r\pi}{n}\right)$$

и одномерных, которые вычисляются по этим же формулам при $r=0$ и (для четных n) при $r=n/2$:

$$C^{(0)}=C_{11}^{(0)}=8c\sin^2\frac{\pi}{n}+2c_1,\quad C_1^{(0)}=C_{22}^{(0)}=0,$$

$$C^{(n/2)}=C_{11}^{(n/2)}=32\frac{\alpha}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}+2c_1,\quad C_1^{(n/2)}=8c\cos^2\frac{\pi}{n}.$$

Соответствующие правые части уравнения (3) (обобщенные силы) равны при $1\le r<n/2$

$$Q_1^{(r)1}=\left(p,\varphi_{11}^{(r)}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^x\cos\frac{2ir\pi}{n},\quad Q_2^{(r)1}=\left(p,\psi_{12}^{(r)}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^y\sin\frac{2ir\pi}{n},$$

$$Q_1^{(r)2}=\left(p,\varphi_{21}^{(r)}\right)=-\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^x\sin\frac{2ir\pi}{n},\quad Q_2^{(r)2}=\left(p,\psi_{22}^{(r)}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^y\cos\frac{2ir\pi}{n},$$

и при $r=0$ и при $r=n/2$

$$Q^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^x,\ Q_1^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^y,\ Q^{(n/2)}=\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^x(-1)^i,\ Q_1^{(n/2)}=\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i^y(-1)^i.$$

Таким образом в новом базисе $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$, $\psi_{\alpha\beta}^{(r)}$ система (3) распадается на независимые подсистемы порядка ≤ 2. Для каждого целого r из диапазона $1\le r<n/2$ записываются две системы для пар функций $\varphi_{\alpha\beta}^{(r)}$, $\psi_{\alpha\beta}^{(r)}$, $\alpha=1,2$,

$$C_{11}^{(r)}q_1^{(r)\alpha} + C_{12}^{(r)}q_2^{(r)\alpha} = Q_1^{(r)\alpha},$$
$$C_{21}^{(r)}q_1^{(r)\alpha} + C_{22}^{(r)}q_2^{(r)\alpha} = Q_2^{(r)\alpha} \qquad (13)$$

с одной и той же матрицей, решение которых не составляет труда. Кроме них есть еще 2 либо 4 (при четном n) уравнения с одним неизвестным

$$C^{(0)}q^{(0)}=Q^{(0)},\ C_1^{(0)}q_1^{(0)}=Q_1^{(0)},\ C^{(n/2)}q^{(n/2)}=Q^{(n/2)},\ C_1^{(n/2)}q_1^{(n/2)}=Q_1^{(n/2)}.$$

Решение задачи (1) представляется в виде

$$f=\sum_{r=1}^{<n/2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(q_1^{(r)\alpha}\varphi_{\alpha1}^{(r)}+q_2^{(r)\alpha}\psi_{\alpha2}^{(r)}\right)+q^{(0)}\varphi^{(0)}+q_1^{(0)}\psi^{(0)}\left(+q^{(n/2)}\varphi^{(n/2)}+q_1^{(n/2)}\psi^{(n/2)}\right).$$

Уравнения (13) позволяют исследовать движение системы при гармоническом воздействии с частотой ω. Соответствующая матрица динамической жесткости имеет блочно-диагональный вид и получается из статической матрицы вычитанием $2m\omega^2$ из диагональных элементов (множитель 2 объясняется тем, что в сумме (7) силы инерции учитываются в 2-х слагаемых при $g=C_0$ и $g=\theta_0$).

Собственные частоты определяются как такие значения ω, при которых какая-либо из семейства матриц

$$C^{(r)}(\omega)=\left\| \begin{matrix} C_{11}^{(r)}-2m\omega^2 & C_{12}^{(r)} \\ C_{12}^{(r)} & C_{11}^{(r)}-2m\omega^2 \end{matrix} \right\| \qquad (14)$$

становится вырожденной ($C^{(0)}$ и $C^{(n/2)}$ являются диагональными), а собственные формы – как нетривиальные решения соответствующих однородных систем. Для $0< r<n/2$ каждая матрица $C^{(r)}$ записывается дважды и каждому нетривиальному решению $q_1^{(r)}$, $q_2^{(r)}$ отвечают две собственные формы

$$q_1^{(r)}\varphi_{11}^{(r)}+q_2^{(r)}\psi_{12}^{(r)} \quad \text{и} \quad q_1^{(r)}\varphi_{21}^{(r)}+q_2^{(r)}\psi_{22}^{(r)},$$

т. е. при $0< r<n/2$ каждая из частот ω_r является по меньшей мере двукратной.

Представляют интерес различные предельные случаи, когда некоторые из параметров c, c_1, α равны 0 или ∞.

Для исследования этих случаев установим алгебраическую лемму.

Пусть R и S - неотрицательно определенные эрмитовы матрицы одного порядка, причем R имеет дефект $d > 0 \cdot \widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_d$ - ортонормированные собственные векторы, отвечающие d-кратному нулевому собственному значению матрицы R, $\lambda_k(A)$ – собственные значения матрицы A, $\lambda_k^*(A)$ ($k = 1,\ldots,d$) – собственные значения матрицы $\left\|\left(A\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_j\right)\right\|$, $i, j = 1,\ldots,d$. Собственные значения всех рассматриваемых матриц нумеруются в порядке неубывания. Матрица $Q = aR + S$, где $a > 0$, является эрмитовой и неотрицательно определенной.

Лемма. *При неограниченном возрастании a первые d собственных значений матрицы Q стремятся к предельным значениям, равным $\lambda_k^*(S)$, соответствующие собственные векторы – к своим проекциям на $\ker R$, а собственные значения с номерами, большими d, возрастают неограниченно.*

Доказательство. На основании известных теорем о квадратичных формах [6, гл.X] из того что $(Qv, v) \geq (aRv, v)$ следует $\lambda_k(Q) \geq \lambda_k(aR) = a\lambda_k(R)$, откуда при $k > d$ $\lambda_k(Q) \to \infty$ вместе с a. Сужение области определения оператора к $\ker R$ можно рассматривать как наложение связей. Поэтому $\lambda_k(Q) \leq \lambda_k^*(Q) = \lambda_k^*(S)$, т. к. в суженной области определения $(Qv, v) = (Sv, v)$. Таким образом при $k \leq d$ собственные значения $\lambda_k(Q)$ ограничены числами $\lambda_k^*(S)$, не зависящими от a. Представим k-й нормированный собственный вектор v_k матрицы Q в виде суммы $v_k = u_k + \varepsilon_k w_k$, где $u_k \in \ker R$, $w_k \perp \ker R$, $|w_k|^2 = (w_k, w_k) = 1$. Тогда

$$\lambda_k(Q) = (Qv_k, v_k) = a(Rv_k, v_k) + (Sv_k, v_k) =$$
$$= a|\varepsilon_k|^2 (Rw_k, w_k) + (Sv_k, v_k) \geq a\lambda_{d+1}(R)|\varepsilon_k|^2 + \lambda_1(S),$$

откуда в сочетании с неравенством $\lambda_k(Q) \le \lambda_k^*(S)$ следует

$$|\varepsilon_k|^2 \le \frac{\lambda_k^*(S) - \lambda_1(S)}{a\lambda_{d+1}(R)},$$

т. е. ортогональная к $\ker R$ компонента собственного вектора v_k с ростом a стремится к 0. Векторы $u_k \in \ker R$ не образуют вообще говоря ортонормированной системы, т. к. из ортонормированности системы v_k следует $(u_i, u_k) = \delta_{ik} - \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_k (w_i, w_k)$. Обозначая $\max|\varepsilon_i| = \varepsilon$, можем записать $(u_i, u_k) = O(\varepsilon^2)$ при $i \ne k$ и $(u_i, u_i) = 1 - O(\varepsilon^2)$. Тогда для системы u_i можно построить (например, с помощью процедуры Грама – Шмидта) такую ортонормированную систему $u_i^* \in \ker R$, что

$u_i = u_i^* + \sum_j \eta_{ij} u_j^*$, где $|\eta_{ij}| = O(\varepsilon^2)$, и

$$\lambda_k(Q) = (Qv_k, v_k) = (Qu_k, u_k) + 2\operatorname{Re}\varepsilon_k (Qw_k, u_k) +$$

$$+ |\varepsilon_k|^2 (Qw_k, w_k) \ge (Su_k, u_k) - 2|\varepsilon_k| |(Sw_k, u_k)| \ge$$

$$\ge (Su_k, u_k) - 2|\varepsilon_k| \sqrt{(Su_k, u_k)(Sw_k, w_k)} \ge (Su_k, u_k) - 2\varepsilon\lambda_{\max}(S).$$

Выражая u_k через u_k^*, получим

$$(Su_k, u_k) = (Su_k^*, u_k^*) + 2\operatorname{Re}\left(Su_k, \sum \eta_{kj} u_j^*\right) + \left(S\sum \eta_{kj} u_j^*, \sum \eta_{kj} u_j^*\right) \ge$$

$$\ge (Su_k^*, u_k^*) + 2\operatorname{Re}\sum_j \bar{\eta}_{kj} (Su_k^*, u_j^*) \ge (Su_k^*, u_k^*) - O(\varepsilon^2),$$

откуда $\lambda_k(Q) \ge (Su_k^*, u_k^*) - O(\varepsilon)$. Суммируя по k от 1 до d и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{d} (Su_k^*, u_k^*) = \operatorname{Sp}\|(S\tilde{v}_i, \tilde{v}_k)\|_1^d = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^*(S),$$

приходим к выводу

$$\sum_{1}^{d}\lambda_k(Q) \;\ge\; \sum_{1}^{d}\lambda_k^*(S)-O(\varepsilon),$$

что в сочетании с оценками $\lambda_k(Q)\le\lambda_k^*(S)$ означает, что при $k\le d$ $\lambda_k(Q)\to\lambda_k^*(S)$, когда $a\to\infty$ $(\varepsilon\to 0)$. Лемма доказана.

При рассмотрении частных случаев удобно диагональные блоки матрицы жесткости представлять в виде $C=cB+\alpha D+c_1P$, где B, D и P определяются из (11), если одно из чисел $c,\ \alpha,\ c_1$ положить равным 1, а остальные – нулю. В виду того что благодаря симметрии задача свелась к сравнительно элементарному исследованию матриц второго порядка, приведем лишь окончательные результаты, относящиеся к свободным колебаниям.

1. $\alpha=0,\ c_1=0$. Собственные частоты: $\omega^{(r)}=0$ кратности n, которой отвечают формы $q_2^{(r)}/q_1^{(r)}=-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{n}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{r\pi}{n}$, и

$$\omega^{(r)}=2\sqrt{\frac{c}{m}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}\right)}$$ (2-кратная при $0<r<n/2$ и простая при $r=0,\ n/2$), которой отвечают формы

$$q_2^{(r)}/q_1^{(r)}=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{tg}\frac{r\pi}{n}.$$

2. $c=c_1=0$. Собственные частоты: $\omega^{(r)}=0$ кратности n, которой отвечают формы $q_2^{(r)}/q_1^{(r)}=-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{n}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{r\pi}{n}$, и

$$\omega^{(r)}=4\sqrt{\frac{\alpha}{ml^2}\sin^2\frac{r\pi}{n}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}\right)}$$ (2-кратная при $0<r<n/2$ и простая при $r=0,\ n/2$), которой отвечают формы

$q_2^{(r)}/q_1^{(r)} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{n}$. Как видим, в этом случае кратность нулевой частоты равна $n+1$.

3. $c=0,\ \alpha=0$. Собственные частоты: $\omega^{(r)}=0$ кратности n с формами $q_1=0$ и $\omega^{(r)}=\sqrt{\frac{c_1}{m}}$ кратности n с формами $q_2=0$.

4. $c=\infty$. Число степеней свободы равно n, собственные формы согласно лемме совпадают с нулевыми формами случая 1. Собственные частоты равны

$$\omega^{(r)}=\sqrt{\frac{16\frac{\alpha}{l^2}\sin^2\frac{r\pi}{n}\left(\sin^2\frac{r\pi}{n}-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)^2+c_1\cos^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}}{m\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}\right)}}$$

и 2-кратны при $0< r<n/2$ и просты при $r=0,\ n/2$.

5. $c_1=\infty$. Число степеней свободы равно n, собственные формы согласно лемме совпадают с нулевыми формами случая 3 ($q_1=0$). Собственные частоты равны

$$\omega^{(r)}=2\sqrt{\frac{1}{m}\left(c\sin^2\frac{r\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}+\frac{\alpha}{l^2}\sin^2\frac{2r\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)}$$

и 2-кратны при $0< r<n/2$ и просты при $r=0,\ n/2$.

6. $c_1=\infty,\ c=0$. Частоты вычисляются по предыдущей формуле, однако в случае четных n при $0< r<n/2$ они становятся 4-кратными, т. к. при $c=0$ эта формула дает $\omega^{(r)}=\omega^{(n/2-r)}$.

7. $\alpha=\infty$. Число степеней свободы $n+1$ (см. случай 2). Собственные частоты равны

$$\omega^{(r)} = \sqrt{\frac{4c\left(\sin^2\frac{r\pi}{n} - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)^2 + c_1\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{r\pi}{n}}{m\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n} + \sin^2\frac{\pi}{n}\right)}}$$

2-кратны при $0 < r < n/2$ и просты при $r = 0,\ n/2$. Формы совпадают с нулевыми формами случая 2, причем форме $q_1^{(0)} = 0$ отвечает частота $\omega^{(0)} = 0$.

8. $\alpha = \infty,\ c = \infty$. Матрица $cB + \alpha D$ имеет отличный от нуля дефект, равный 1, только при $r = 0$ и $r = 1$. Поэтому система имеет три степени свободы и две частоты $\omega^{(0)} = 0$ и $\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{c_1}{2m}}$, отвечающие повороту и двум поступательным перемещениям жесткого n - угольника в своей плоскости.

Литература

1. Фомин В.М. Применение методов теории линейных представлений групп к расчету и исследованию колебаний стержневых систем. Дисс. на соиск. уч. ст. к. т. н., ОИСИ.- Одесса, 1970.- 123 с.
2. Злокович Дж. Теория групп и G–векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций.- М.: Стройиздат, 1977.- 164 с.
3. Бурышкин М.Л., Гордеев В.Н. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций.- К.: Будівельник, 1984.- 120 с.
4. Бекшаев С.Я. Применение обобщенных координат в расчетах симметричных механических систем. – В кн.: Механика симметричных неоднородных сред и ее приложения. – Одесса, 1997, с. 18 – 26.
5. Бекшаев С.Я. Некоторые проблемы расчета симметричных конструкций. – В кн.: Строительные материалы и конструкции. – Одесса, 1999, с. 13 – 21.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.