УДК 624.073:046.3

Ю.С. КРУТИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Построено точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний прямого стержня с учетом сопротивлений для случая, когда поперечная жесткость и непрерывно распределенная масса стержня представляют собой произвольные непрерывные функции. Определена главная форма свободных поперечных колебаний стержня.

Ключевые слова: *стержень, свободные поперечные колебания, дифференциальное уравнение колебаний, точное решение, главная форма колебаний.*

Постановка задачи

Рассмотрим свободные (собственные) поперечные колебания упругого, вообще говоря, неоднородного, прямого стержня (балки) длины l с переменным поперечным сечением и переменной непрерывно распределенной массой. Направим ось x вдоль оси стержня и будем считать, что его концы находятся в точках $x=0$ и $x=l$. Положительными прогибами стержня будем считать прогибы вниз. Известно [1—3], что в общем виде дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня с учетом сопротивлений записывается так

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p(x,t)=0. \qquad (1)$$

Здесь $E(x)J(x)$ — переменная поперечная жесткость, где $E(x), J(x)$ — соответственно модуль упругости материала и момент инерции поперечного сечения стержня в точке x; $m(x)$ — интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня в точке x; $p(x,t)$ — интенсивность сил сопротивления движению; $y(x,t)$— неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение точки оси стержня (прогиб) с координатой x в момент времени t.

Уравнение (1) справедливо для модели, в которой принято пренебрегать продольными перемещениями сечений, их поворотами и сдвигами.

Будем приближенно считать, что сопротивление пропорционально массе стержня и скорости [1], то есть, полагаем $p(x,t)=2\alpha m(x)\frac{\partial y}{\partial t}$, где α — константа. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\alpha m(x)\frac{\partial y}{\partial t}=0. \qquad (2)$$

Далее будем рассматривать ситуацию, когда жесткость и погонная масса стержня являются произвольными непрерывными функциями, отличными от нуля всюду на отрезке $x\in[0,l]$.

Ставится задача: построить точное решение для дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний (2); определить главную форму свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с переменной непрерывно распределенной массой.

Результаты

Применим стандартную процедуру метода разделения переменных Фурье [4]. Для этого искомое решение представим в виде произведения двух функций $y(x,t)=v(x)T(t)$, где $v(x)$ — неизвестная амплитудная функция прогибов, зависящая только от координаты x, а $T(t)$ — неизвестная функция времени t. Подставляя в уравнение (2) представление для $y(x,t)$, после очевидных преобразований, будем иметь

$$\frac{1}{m(x)v(x)}\left(E(x)J(x)v''(x)\right)''=-\frac{1}{T(t)}(\ddot{T}(t)+2\alpha\dot{T}(t)).$$

Левая часть последнего равенства зависит только от переменной x, а правая — только от переменной t. Следовательно, обе эти части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через ω^2. Тогда получим два однородных обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}(t)+2\alpha\dot{T}(t)+\omega^2T(t)=0; \tag{3}$$

$$\left(E(x)J(x)v''(x)\right)''-\omega^2m(x)v(x)=0. \tag{4}$$

Будем полагать, что нам заданы начальные параметры. К ним относятся параметры начальных условий движения $T(0),\dot{T}(0)$ и граничные параметры $v(0),\varphi(0),M(0),Q(0)$ — соответственно перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в точке $x=0$. Решение уравнений (3), (4) будем выражать через начальные параметры.

Учитывая, что коэффициенты уравнения (3) постоянные, выписать для него общее решение не составляет труда. Оно имеет вид

$$T(t)=e^{-\alpha t}\left(T(0)\cos\bar{\omega}t+\frac{\dot{T}(0)+\alpha T(0)}{\bar{\omega}}\sin\bar{\omega}t\right)=Ae^{-\alpha t}\sin(\bar{\omega}t+t_0),$$

где обозначено $\bar{\omega}=\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$, $A=\sqrt{T^2(0)+\left(\frac{\dot{T}(0)+\alpha T(0)}{\bar{\omega}}\right)^2}$, $t_0=arctg\left(\frac{T(0)\bar{\omega}}{\dot{T}(0)+\alpha T(0)}\right)$. Это решение говорит о том, что свободные колебания во времени совершаются по затухающему гармоническому закону с частотой $\bar{\omega}$ и что введенная постоянная величина ω есть частота свободных колебаний без учета сопротивлений.

Главная форма колебаний определяется как решение уравнения (4). Наряду с этим уравнением будем рассматривать также равносильную ему систему дифференциальных уравнений.

Как известно, для исследования свободных колебаний стержня, помимо перемещения $v(x)$, необходимы еще такие элементы, как угол поворота $\varphi(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и поперечная сила $Q(x)$. Эти величины связаны между собою системой равенств [1]

$$\begin{cases} \varphi(x)=v'(x), \\ M(x)=-E(x)J(x)\varphi'(x)=-E(x)J(x)v''(x), \\ Q(x)=M'(x)=-\left(E(x)J(x)\varphi'(x)\right)'=-\left(E(x)J(x)v''(x)\right)'. \end{cases} \tag{5}$$

Присоединяя к системе (5) уравнение (4), будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dx}=P(x)V, \tag{6}$$

где

$$V(x)=\begin{pmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix},\quad P(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E(x)J(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2m(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— вектор неизвестных (вектор состояния) и матрица коэффициентов системы соответственно.

Пусть $\zeta_0(x),\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,...)$ — некоторая бесконечная система пока неизвестных четырежды непрерывно дифференцируемых функций. Образуем из этих функций следующие ряды:

$$\Lambda(x)=\zeta_0(x)+\omega^2\zeta_1(x)+\omega^4\zeta_2(x)+\omega^6\zeta_3(x)+\cdots; \tag{7}$$

$$\Lambda'(x)=\zeta_0'(x)+\omega^2\zeta_1'(x)+\omega^4\zeta_2'(x)+\omega^6\zeta_3'(x)+\cdots; \tag{8}$$

$$\Lambda''(x)=\zeta_0''(x)+\omega^2\zeta_1''(x)+\omega^4\zeta_2''(x)+\omega^6\zeta_3''(x)+\cdots; \tag{9}$$

$$\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)'=\left(E(x)J(x)\zeta_0''(x)\right)'+\omega^2\left(E(x)J(x)\zeta_1''(x)\right)'+\omega^4\left(E(x)J(x)\zeta_2''(x)\right)'+$$
$$+\omega^6\left(E(x)J(x)\zeta_3''(x)\right)'+\cdots; \tag{10}$$

$$\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)''=\left(E(x)J(x)\zeta_0''(x)\right)''+\omega^2\left(E(x)J(x)\zeta_1''(x)\right)''+\omega^4\left(E(x)J(x)\zeta_2''(x)\right)''+$$
$$+\omega^6\left(E(x)J(x)\zeta_3''(x)\right)''+\cdots. \tag{11}$$

Здесь предполагается, что все ряды равномерно сходятся на отрезке $[0,l]$. В таком случае возможна операция почленного дифференцирования рядов и, как следствие, обозначения $\Lambda'(x)$, $\Lambda''(x)$, $\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)'$, $\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)''$ для сумм рядов (8), (9), (10), (11) будут законными.

Неизвестные функции $\zeta_0(x),\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,...)$ будем искать из условия, что $\Lambda(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Тогда, с учетом формул (7), (11), приходим к необходимости выполнения равенства

$$\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)''-\omega^2 m(x)\Lambda(x)=\left(E(x)J(x)\zeta_0''(x)\right)''+\omega^2\left(\left(E(x)J(x)\zeta_1''(x)\right)''-m(x)\zeta_0(x)\right)+$$

$$+\omega^4\left(\left(E(x)J(x)\zeta_2''(x)\right)''-m(x)\zeta_1(x)\right)+\omega^6\left(\left(E(x)J(x)\zeta_3''(x)\right)''-m(x)\zeta_2(x)\right)+\cdots=0. \quad (12)$$

Очевидно, этому равенству можно удовлетворить, если положить

$$\left(E(x)J(x)\zeta_0''(x)\right)''=0, \quad (13)$$

$$\left(E(x)J(x)\zeta_i''(x)\right)''=m(x)\zeta_{i-1}(x) \quad (i=1,2,3,...). \quad (14)$$

Следовательно, для отыскания неизвестных функций $\zeta_0(x),\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,...)$ получили условия в виде дифференциальных уравнений (13), (14). Функция $\zeta_0(x)$ легко находится из уравнения (13) и поэтому ее можно считать известной. Прежде чем выразить $\zeta_i(x)$ зададим следующие граничные условия

$$\zeta_i(0)=\zeta_i'(0)=\zeta_i''(0)=\zeta_i'''(0)=0 \quad (i=1,2,3,...). \quad (15)$$

Тогда из уравнения (14), последовательным интегрированием будем иметь:

$$\zeta_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)\zeta_{i-1}(x)dxdxdxdx \quad (i=1,2,3,...). \quad (16)$$

Последняя формула представляет собою рекуррентное соотношение, согласно которому по известной начальной функции $\zeta_0(x)$ и заданным функциям $E(x)J(x),m(x)$ последовательно определяются $\zeta_i(x)$.

Таким образом, функции $\zeta_0(x)$, $\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,...)$ можно считать известными. В явном виде они будут выписаны ниже. Для этих функций равенство (12) принимает вид

$$\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)''-\omega^2 m(x)\Lambda(x)=0. \quad (17)$$

Осталось теперь доказать, что ряды (7)—(10) действительно равномерно сходятся. После этого равномерная сходимость ряда (11) будет следовать из равенства (17), согласно которому он отличается от ряда (9) только множителем $\omega^2 m(x)$. Ради краткости приведем доказательство только для ряда (7). Для этого построим соответствующий мажорантный ряд.

Определим три неотрицательные постоянные равенствами

$$g=\max_{x\in[0,l]}m(x),\ \ h=\max_{x\in[0,l]}\frac{1}{E(x)J(x)},\ \ s=\max_{x\in[0,l]}\left|\zeta_0(x)\right|.$$

Тогда для функций $\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,...)$ будут справедливы оценки:

$$\left|\zeta_1(x)\right|=\left|\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)\zeta_0(x)dxdxdxdx\right|\le gh\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x\left|\zeta_0(x)\right|dxdxdxdx\le ghs\frac{x^4}{4!},$$

$$\left|\zeta_2(x)\right|=\left|\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)\zeta_1(x)dxdxdxdx\right|\le gh\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x\left|\zeta_1(x)\right|dxdxdxdx\le (gh)^2 s\frac{x^8}{8!},\ \ \ldots .$$

Следовательно, для ряда, составленного из модулей, получаем:

$$\left|\zeta_0(x)\right|+\left|\omega^2\zeta_1(x)\right|+\left|\omega^4\zeta_2(x)\right|+\cdots\le s+ghs\omega^2\frac{x^4}{4!}+(gh)^2 s\omega^4\frac{x^8}{8!}+\cdots=\frac{s}{2}(ch\sqrt[4]{gh\omega^2}\,x+\cos\sqrt[4]{gh\omega^2}\,x).$$

Очевидно, мажорантой здесь с точностью до множителя выступает сумма элементарных функций. Каждая из них определяется рядом, который равномерно сходится. Следовательно, составленный из модулей ряд, также сходится равномерно. Тем самым доказано, что ряд (7) действительно абсолютно и равномерно сходится. Совершенно аналогично можно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (8)—(10).

Таким образом, фактически доказано, что всякое решение $\zeta_0(x)$ уравнения (13), порождает по формуле (16) такую бесконечную систему функций $\zeta_i(x)$ $(i=1,2,3,\ldots)$, что функция $\Lambda(x)$, определяемая абсолютно и равномерно сходящимся рядом (7), удовлетворяет равенству (17). Иначе говоря, $\Lambda(x)$ является решением дифференциального уравнения (4). Учитывая этот факт, непосредственной проверкой легко убедиться в том, что вектор

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \Lambda(x) \\ \Lambda'(x) \\ -E(x)J(x)\Lambda''(x) \\ -\left(E(x)J(x)\Lambda''(x)\right)' \end{pmatrix} \tag{18}$$

в свою очередь удовлетворяет системе (6), то есть $\dfrac{d\Psi}{dx}=P(x)\Psi$.

Определим значение вектора $\Psi(x)$ в точке $x=0$. Полагая в формулах (7)—(10) переменную x равной нулю и учитывая (15), получим

$$\Psi(0)=\begin{pmatrix} \zeta_0(0) \\ \zeta_0'(0) \\ -E(0)J(0)\zeta_0''(0) \\ -\left(E(0)J(0)\zeta_0''(0)\right)' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Обратимся теперь к уравнению (13). Непосредственным интегрированием найдем фундаментальную систему решений данного уравнения. Такая система, как известно, определяется неоднозначно и в этом смысле у нас есть выбор. Поэтому среди множества возможных фундаментальных систем выберем ту, при которой вектор $\Psi(0)$, вычисленный для каждой функции системы, всякий раз будет состоять только из одной единицы и трех нулей. Такую систему образуют функции:

$$\zeta_0(x)=a_0(x)=1;\quad \zeta_0(x)=b_0(x)=x;$$

$$\zeta_0(x)=c_0(x)=-\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}dxdx;\ \zeta_0(x)=d_0(x)=-\int_0^x\int_0^x\frac{x}{E(x)J(x)}dxdx.$$

Каждая из этих функций может быть принята в качестве начальной $\zeta_0(x)$ и значит, каждая из них порождает решение уравнения (4). Обозначим эти решения $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$. Основываясь на формулах (7), (16), выпишем сводку формул, которыми эти решения определяются:

$$\Omega_1(x)=a_0(x)+\omega^2a_1(x)+\omega^4a_2(x)+\omega^6a_3(x)+\cdots,$$

$$a_0(x)=1,\ a_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)a_{i-1}(x)dxdxdxdx;$$

$$\Omega_2(x)=b_0(x)+\omega^2b_1(x)+\omega^4b_2(x)+\omega^6b_3(x)+\cdots,$$

$$b_0(x)=x,\ b_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)b_{i-1}(x)dxdxdxdx;$$

$$\Omega_3(x)=c_0(x)+\omega^2c_1(x)+\omega^4c_2(x)+\omega^6c_3(x)+\cdots,$$

$$c_0(x)=-\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}dxdx,\ c_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)c_{i-1}(x)dxdxdxdx;$$

$$\Omega_4(x)=d_0(x)+\omega^2d_1(x)+\omega^4d_2(x)+\omega^6d_3(x)+\cdots,$$

$$d_0(x)=-\int_0^x\int_0^x\frac{x}{E(x)J(x)}dxdx,\ d_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{E(x)J(x)}\int_0^x\int_0^x m(x)d_{i-1}(x)dxdxdxdx.$$

Здесь везде $i=1,2,3,\ldots$.

Поскольку $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$– решения уравнения (4), то каждое из них по формуле, аналогичной (18), порождает вектор – решение системы (6). Тогда матрица, составленная из этих векторов

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) & \Omega_3(x) & \Omega_4(x) \\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x) & \Omega_3'(x) & \Omega_4'(x) \\ -E(x)J(x)\Omega_1''(x) & -E(x)J(x)\Omega_2''(x) & -E(x)J(x)\Omega_3''(x) & -E(x)J(x)\Omega_4''(x) \\ -\left(E(x)J(x)\Omega_1''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_2''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_3''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_4''(x)\right)' \end{pmatrix},$$

также является решением системы (6), то есть $\frac{d\Omega}{dx}=P(x)\Omega$.

Найдем значение матрицы $\Omega(x)$ в точке $x=0$. Столбцы матрицы $\Omega(0)$ вычислим по формуле (19), последовательно подставляя там вместо $\zeta_0(x)$ функции $a_0(x), b_0(x), c_0(x), d_0(x)$. В результате получим, что

$$\Omega(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $\Omega(x)$ представляет собою нормированное решение однородной системы (6). Такое решение системы дифференциальных уравнений определяется однозначно и называется матрицантом [5]. Определитель матрицанта найдем по формуле Якоби [5]

$$|\Omega(x)|=|\Omega(0)|e^{\int_0^x Sp\,P(x)dx}=1,$$

где $Sp\,P(x)$ — след матрицы $P(x)$, который в нашем случае равен нулю.

Выпишем для системы функций $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x), \Omega_3(x), \Omega_4(x)$ соответствующий ей определитель Вронского (вронскиан)

$$W(x)=\begin{vmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) & \Omega_3(x) & \Omega_4(x) \\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x) & \Omega_3'(x) & \Omega_4'(x) \\ \Omega_1''(x) & \Omega_2''(x) & \Omega_3''(x) & \Omega_4''(x) \\ \Omega_1'''(x) & \Omega_2'''(x) & \Omega_3'''(x) & \Omega_4'''(x) \end{vmatrix}.$$

Пользуясь свойствами определителей, легко показать, что $|\Omega(x)|=\left(E(x)J(x)\right)^2 W(x)$. Следовательно, $W(x)=\frac{1}{\left(E(x)J(x)\right)^2}\neq 0$. Как известно [6], из неравенства нулю вронскиана вытекает линейная независимость соответствующей системы функций. Поэтому функции $\Omega_1(x), \Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения (4).

Общее решение системы (6) выражается через матрицант по известной формуле [5] $V(x)=\Omega(x)C$, где C — постоянный вектор. Полагая в этой формуле переменную x равной нулю, получим $C=V(0)$. Поэтому решение системы (6), выраженное через начальные параметры, имеет вид

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) & \Omega_3(x) & \Omega_4(x) \\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x) & \Omega_3'(x) & \Omega_4'(x) \\ -E(x)J(x)\Omega_1''(x) & -E(x)J(x)\Omega_2''(x) & -E(x)J(x)\Omega_3''(x) & -E(x)J(x)\Omega_4''(x) \\ -\left(E(x)J(x)\Omega_1''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_2''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_3''(x)\right)' & -\left(E(x)J(x)\Omega_4''(x)\right)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найден вектор состояния, который характеризует свободные поперечные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой. В частности, построено точное решение уравнения (4), которое представляет собой главную форму свободных поперечных колебаний стержня

$$v(x)=v(0)\Omega_1(x)+\varphi(0)\Omega_2(x)+M(0)\Omega_3(x)+Q(0)\Omega_4(x). \qquad (20)$$

Протестируем полученные формулы на известном примере. До настоящего времени наиболее полно изучены поперечные колебания стержня для случая, когда $EJ = const$, $m = const$. Решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний стержня в амплитудном состоянии с постоянными коэффициентами общеизвестно [1—3] и имеет вид

$$\nu(x) = \nu(0)K_1(nx) + \frac{\varphi(0)}{n}K_2(nx) - \frac{M(0)}{n^2 EJ}K_3(nx) - \frac{Q(0)}{n^3 EJ}K_4(nx). \qquad (21)$$

Здесь K_1, K_2, K_3, K_4 — так называемые функции А.Н. Крылова, которые определяются формулами:

$$K_1(nx) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} nx + \cos nx), \quad K_2(nx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} nx + \sin nx),$$

$$K_3(nx) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} nx - \cos nx), \quad K_4(nx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} nx - \sin nx),$$

где $n = \sqrt[4]{\dfrac{\omega^2 m}{EJ}}$.

Покажем, что решение (21) вытекает из формулы (20), как частный случай. Действительно, когда поперечная жесткость и масса стержня постоянны, будем иметь:

$$a_0(x) = 1,\ a_1(x) = \frac{m}{EJ}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x dxdxdxdx = \frac{m}{EJ}\frac{x^4}{4!},\ a_2(x) = \left(\frac{m}{EJ}\right)^2\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^4}{4!}dxdxdxdx = \left(\frac{m}{EJ}\right)^2\frac{x^8}{8!}, \ldots;$$

$$\Omega_1(x) = 1 + \omega^2\frac{m}{EJ}\frac{x^4}{4!} + \omega^4\left(\frac{m}{EJ}\right)^2\frac{x^8}{8!} + \cdots = 1 + \frac{(nx)^4}{4!} + \frac{(nx)^8}{8!} + \cdots = K_1(nx);$$

$$b_0(x) = x,\ b_1(x) = \frac{m}{EJ}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x dxdxdxdx = \frac{m}{EJ}\frac{x^5}{5!},\ b_2(x) = \left(\frac{m}{EJ}\right)^2\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^5}{5!}dxdxdxdx = \left(\frac{m}{EJ}\right)^2\frac{x^9}{9!}, \ldots;$$

$$\Omega_2(x) = x + \omega^2\frac{m}{EJ}\frac{x^5}{5!} + \omega^4\left(\frac{m}{EJ}\right)^2\frac{x^9}{9!} + \cdots = \frac{1}{n}\left(nx + \frac{(nx)^5}{5!} + \frac{(nx)^9}{9!} + \cdots\right) = \frac{1}{n}K_2(nx);$$

$$c_0(x) = -\frac{1}{EJ}\int_0^x\int_0^x dxdx = -\frac{1}{EJ}\frac{x^2}{2!},\ c_1(x) = -\frac{m}{(EJ)^2}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^2}{2!}dxdxdxdx = -\frac{m}{(EJ)^2}\frac{x^6}{6!},$$

$$c_2(x) = -\frac{m^2}{(EJ)^3}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^6}{6!}dxdxdxdx = -\frac{m^2}{(EJ)^3}\frac{x^{10}}{10!}, \ldots;$$

$$\Omega_3(x) = -\frac{1}{EJ}\frac{x^2}{2!} - \omega^2\frac{m}{(EJ)^2}\frac{x^6}{6!} - \omega^4\frac{m^2}{(EJ)^3}\frac{x^{10}}{10!} - \cdots = -\frac{1}{n^2 EJ}\left(\frac{(nx)^2}{2!} + \frac{(nx)^6}{6!} + \frac{(nx)^{10}}{10!} + \cdots\right) = -\frac{1}{n^2 EJ}K_3(nx);$$

$$d_0(x) = -\frac{1}{EJ}\int_0^x\int_0^x xdxdx = -\frac{1}{EJ}\frac{x^3}{3!},\ d_1(x) = -\frac{m}{(EJ)^2}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^3}{3!}dxdxdxdx = -\frac{m}{(EJ)^2}\frac{x^7}{7!},$$

$$d_2(x) = -\frac{m^2}{(EJ)^3}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{x^7}{7!}dxdxdxdx = -\frac{m^2}{(EJ)^3}\frac{x^{11}}{11!}, \ldots;$$

$$\Omega_4(x) = -\frac{1}{EJ}\frac{x^3}{3!} - \omega^2\frac{m}{(EJ)^2}\frac{x^7}{7!} - \omega^4\frac{m^2}{(EJ)^3}\frac{x^{11}}{11!} - \cdots = -\frac{1}{n^3 EJ}\left(\frac{(nx)^3}{3!} + \frac{(nx)^7}{7!} + \frac{(nx)^{11}}{11!} + \cdots\right) = -\frac{1}{n^3 EJ}K_4(nx).$$

Подставляя в формулу (20) вместо функций $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$ найденные для них выражения, очевидно, получим формулу (21).

Окончательно, свободные поперечные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой и учетом сопротивлений описываются формулой

$$y(x,t) = \left(\nu(0)\Omega_1(x) + \varphi(0)\Omega_2(x) + M(0)\Omega_3(x) + Q(0)\Omega_4(x)\right)Ae^{-\alpha t}\sin(\overline{\omega}t + t_0).$$

Выводы

Трудно переоценить роль дифференциальных уравнений в современной науке и технике. В частности, именно такие уравнения играют первостепенную роль при построении математических моделей для задач строительной механики. Естественным методом решения такого рода задач является метод прямого интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. Однако отсутствие в подавляющем большинстве случаев точных решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами отодвинуло на задний план этот метод. В такой ситуации получили большое развитие приближенные методы. Очевидно, метод прямого интегрирования является эффективным только тогда, когда удается найти точные решения для соответствующих дифференциальных уравнений.

В данной работе построено точное решение дифференциального уравнения поперечных колебаний, когда погонная масса и поперечная жесткость стержня представляют собою произвольные непрерывные функции. Определена главная форма свободных поперечных колебаний стержня. Наличие точного решения в перспективе дает возможность создать алгоритм отыскания частот и собственных форм поперечных колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного сечения с произвольной непрерывно распределенной переменной массой. Этому вопросу планируется посвятить следующие статьи.

Заслуживает особого внимания метод построения точного решения дифференциального уравнения (4). Дело в том, что он применим не только в данном случае, а позволяет найти общие интегралы других обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольными непрерывными коэффициентами. В частности, точные решения дифференциальных уравнений изогнутой оси и продольных колебаний стержня, приведенные в работах автора [7, 8] в готовом виде, построены именно таким методом.

Очевидно, что наличие метода для отыскания точных решений дифференциальных уравнений открывает новые перспективы в решении самых разных классов задач строительной механики.

Литература

1. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

2. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

3. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Компьютерні технології. – Киев: Каравела 2009. – 696 с.

4. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 767 с.

5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

6. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

7. *Крутий Ю.С.* Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. №6, 2010. С. 22—29.

8. *Крутий Ю.С.* Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой // Строительная механика и расчет сооружений. № 1, 2011. С. 25—33.