УДК 624.073.046.3

Ю.С. КРУТИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. (ОГАСА, г. Одесса, Украина)

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

В статье изучаются продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения. Построено точное решение соответствующего дифференциального уравнения продольных колебаний для случая, когда коэффициент упругости и погонная масса стержня представляют собой произвольные непрерывные функции. Определена главная форма свободных колебаний стержня. В качестве примера исследованы свободные колебания конического стержня для разных случаев граничных условий.

Ключевые слова: *продольные колебания, стержень, точное решение, частота, формы колебаний, конический стержень, коэффициенты колебаний.*

Постановка задачи

Рассмотрим продольные колебания упругого, вообще говоря, неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения длины l. Масса стержня непрерывно распределена вдоль его длины. Направим ось x вдоль оси стержня, и будем считать, что его концы находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Уравнение продольных колебаний стержня, испытывающего деформации растяжения — сжатия, вызванные осевым продольным воздействием, имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q(x,t). \qquad (1)$$

Здесь $k(x) = E(x)F(x)$ — коэффициент упругости, где $E(x), F(x)$ — соответственно модуль упругости материала стержня и площадь поперечного сечения стержня в точке x; $m(x) = \rho(x)F(x)$ — интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня, где $\rho(x)$ — плотность материала стержня в точке x; $q(x,t)$ — интенсивность продольной динамической нагрузки, направленной по оси стержня; $u(x,t)$ — неизвестная функция, представляющая собою продольное перемещение сечения стержня с координатой x в момент времени t.

Уравнение (1) справедливо для модели, которая не учитывает сил инерции, возникающих вследствие поперечных деформаций. Далее будем рассматривать ситуацию, когда коэффициент упругости и погонная масса стержня являются произвольными непрерывными функциями, отличными от нуля всюду на отрезке $x \in [0,l]$.

Ставится задача: построить точное решение для дифференциального уравнения продольных колебаний (1); определить главную форму свободных продольных колебаний стержня; выписать формулу для вынужденных продольных колебаний; исследовать, в качестве примера, свободные колебания конического стержня для разных случаев граничных условий.

Результаты

Точное решение дифференциального уравнения продольных колебаний. Согласно методу разделения переменных Фурье [3], представим решение уравнения (1) и нагрузку в виде $u(x,t) = v(x)T(t)$, $q(x,t) = q(x)T(t)$, где $v(x)$ и $q(x)$ – амплитудные значения перемещения и нагрузки соответственно, зависящие только от переменной x, $T(t)$ – неизвестная функция времени t. Функция $q(x)$ также предполагается непрерывной на отрезке $[0,l]$. Подставляя в уравнение (1) вместо функций $u(x,t)$ и $q(x,t)$ их представления, после очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{m(x)v(x)}\Big(\big(k(x)v'(x)\big)' + q(x)\Big) = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от переменной x, а правая – только от переменной t. Следовательно, обе эти части равны одной и той же постоянной, которую обозначим $-\omega^2$. В итоге получим два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T} + \omega^2 T(t) = 0; \tag{2}$$

$$\left(k(x)v'(x)\right)' + \omega^2 m(x)v(x) = -q(x). \tag{3}$$

Будем далее полагать, что нам заданы начальные параметры. К ним относятся параметры начальных условий движения $T(0), \dot{T}(0)$ и граничные параметры $v(0)$, $v'(0)$. Решения уравнений (2), (3), будем выражать через начальные параметры. Выписать общее решение для уравнения (2) не составляет труда. Оно имеет вид

$$T(t) = T(0)\cos\omega t + \frac{\dot{T}(0)}{\omega}\sin\omega t = A\sin\left(\omega t + t_0\right),$$

где $A = \sqrt{T^2(0) + \left(\dfrac{\dot{T}(0)}{\omega}\right)^2}$, $t_0 = arctg\left(\dfrac{T(0)}{\dot{T}(0)}\omega\right)$. Это решение говорит о том, что колебания во времени совершаются по гармоническому закону с круговой частотой ω. Главная форма колебаний определяется как решение дифференциального уравнения (3).

Наряду с уравнением (3) будем рассматривать равносильную ему систему дифференциальных уравнений. Напряженно-деформированное состояние стержня, испытывающего деформации растяжения – сжатия, характеризуется перемещением $v(x)$ и продольной силой $N(x)$. Эти две величины связаны между собой формулой $N(x) = k(x)v'(x)$. Поэтому, с учетом уравнения (3), для двух неизвестных функций $v(x)$ и $N(x)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dx} = P(x)V + f(x), \tag{4}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v(x) \\ N(x) \end{pmatrix}, \; f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -q(x) \end{pmatrix}, \; P(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{k(x)} \\ -\omega^2 m(x) & 0 \end{pmatrix}$$

— соответственно вектор неизвестных, вектор правой части и матрица коэффициентов системы.

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$\left(k(x)v'(x)\right)' + \omega^2 m(x)v(x) = 0 \tag{5}$$

и соответствующую ему однородную систему

$$\frac{dV}{dx} = P(x)V. \tag{6}$$

По заданным функциям $k(x)$, $m(x)$ определим две бесконечных системы функций такими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered} a_0(x) = 1, \; a_i(x) = \int_0^x \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x)a_{i-1}(x)dxdx; \\ b_0(x) = \int_0^x \frac{1}{k(x)}dx, \; b_i(x) = \int_0^x \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x)b_{i-1}(x)dxdx, \end{gathered} \tag{7}$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots$. Заметим при этом, что введенные функции обладают следующими свойствами, которые легко проверяются:

$$a_0'(x) = 0,\ a_i'(x) = \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x) a_{i-1}(x) dx;\ b_0'(x) = \frac{1}{k(x)},\ b_i'(x) = \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x) b_{i-1}(x) dx; \quad (8)$$

$$\left(k(x) a_i'(x)\right)' = m(x) a_{i-1}(x);\ \left(k(x) b_i'(x)\right)' = m(x) b_{i-1}(x); \quad (9)$$

$$a_i(0) = a_i'(0) = b_i(0) = b_i'(0) = 0 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots). \quad (10)$$

Из бесконечных систем функций (7), (8) образуем четыре функциональных ряда:

$$\Omega_1(x) = a_0(x) - \omega^2 a_1(x) + \omega^4 a_2(x) - \omega^6 a_3(x) + \ldots\ ; \quad (11)$$

$$\Omega_2(x) = b_0(x) - \omega^2 b_1(x) + \omega^4 b_2(x) - \omega^6 b_3(x) + \ldots\ ; \quad (12)$$

$$\Omega_1'(x) = -\omega^2 a_1'(x) + \omega^4 a_2'(x) - \omega^6 a_3'(x) + \ \ldots; \quad (13)$$

$$\Omega_2'(x) = \frac{1}{k(x)} - \omega^2 b_1'(x) + \omega^4 b_2'(x) - \omega^6 b_3'(x) + \ldots. \quad (14)$$

Суммы рядов (13), (14) обозначены $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ пока только формально. Такие обозначения будут законны, если доказать, что все четыре ряда сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0, l]$. Ради краткости приведем доказательство только для ряда (11). Для этого построим соответствующий мажорантный ряд.

Определим две неотрицательные постоянные g и h равенствами $g = \max\limits_{x \in [0,l]} m(x)$, $h = \max\limits_{x \in [0,l]} \frac{1}{k(x)}$. Тогда для функций $a_i(x)$ будут справедливы оценки:

$$|a_1(x)| = \left| \int_0^x \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x) dx dx \right| \le gh \int_0^x \int_0^x dx dx = gh \frac{x^2}{2!},$$

$$|a_2(x)| = \left| \int_0^x \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x) a_1(x) dx dx \right| \le gh \int_0^x \int_0^x |a_1(x)| dx dx \le (gh)^2 \int_0^x \int_0^x \frac{x^2}{2!} dx dx = (gh)^2 \frac{x^4}{4!}, \ \ldots .$$

Следовательно, для ряда, составленного из модулей, получаем:

$$|a_0(x)| + |\omega^2 a_1(x)| + |\omega^4 a_2(x)| + \ldots \le 1 + gh\omega^2 \frac{x^2}{2!} + (gh)^2 \omega^4 \frac{x^4}{4!} + \ldots = ch\sqrt{gh}\omega x .$$

Мажорантой здесь выступает элементарная функция $ch\sqrt{gh}\omega x$, определяемая равномерно сходящимся на всей числовой оси рядом. Поэтому ряд из модулей сходятся, причем сходятся равномерно. Тем самым доказано, что ряд (11), сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0, l]$. Доказательство абсолютной и равномерной сходимости рядов (12), (13), (14) аналогично. Из этого факта следует, что ряды (11), (12) можно почленно дифференцировать и обозначения $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ для рядов (13), (14) законны.

Далее умножим каждое из равенств (13), (14) на $k(x)$ и результат почленно продифференцируем. Тогда, с учетом формул (9), получим:

$$\left(k(x)\Omega_1'(x)\right)' = -\omega^2 \left(k(x) a_1'(x)\right)' + \omega^4 \left(k(x) a_2'(x)\right)' - \omega^6 \left(k(x) a_3'(x)\right)' + \ldots =$$
$$= -\omega^2 m(x) + \omega^4 m(x) a_1(x) - \omega^6 m(x) a_2(x) + \ldots = -\omega^2 m(x) \Omega_1(x);$$

$$\left(k(x)\Omega_2'(x)\right)' = -\omega^2\left(k(x)b_1'(x)\right)' + \omega^4\left(k(x)b_2'(x)\right)' - \omega^6\left(k(x)b_3'(x)\right)' + \ldots =$$
$$= -\omega^2 m(x)b_0(x) + \omega^4 m(x)b_1(x) - \omega^6 m(x)b_2(x) + \ldots = -\omega^2 m(x)\Omega_2(x).$$

Следовательно, функции $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ — решения однородного уравнения (5).

Рассмотрим теперь матрицу

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ k(x)\Omega_1'(x) & k(x)\Omega_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\Omega(x)$ удовлетворяет (6). Кроме того, на основании свойств (10) заключаем, что

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} \Omega_1(0) & \Omega_2(0) \\ k(0)\Omega_1'(0) & k(0)\Omega_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

а значит, $\Omega(x)$ является нормированным решением однородной системы (6). Такое решение системы дифференциальных уравнений принято называть матрицантом [4]. Определитель матрицанта найдем по формуле Якоби [4]

$$|\Omega(x)| = |\Omega(0)|\, e^{\int\limits_0^x Sp P(x)dx} = 1,$$

где $Sp\,P(x)$ — след матрицы $P(x)$. Заметим, что из неравенства нулю $|\Omega(x)|$ вытекает линейная независимость функций $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, а значит, эти функции образуют фундаментальную систему решений уравнения (5).

Вернемся теперь к неоднородному уравнению (3). Знание матрицанта позволяет найти общее решение неоднородной системы (4) по известной формуле [4]

$$V(x) = \Omega(x)C + \Omega(x)\int\limits_0^x \Omega^{-1}(\tau) f(\tau)d\tau,$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – произвольный постоянный вектор. Запишем эту формулу в явном виде

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ k(x)\Omega_1'(x) & k(x)\Omega_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} -$$
$$-\int\limits_0^x \begin{pmatrix} \Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x) \\ k(x)(\Omega_1(\tau)\Omega_2'(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1'(x)) \end{pmatrix} q(\tau)d\tau \qquad (16)$$

и выразим здесь постоянные интегрирования C_1, C_2 через начальные параметры. Полагая в формуле (16) переменную x равной нулю и учитывая (15), легко находим $C_1 = v(0)$, $C_2 = N(0) = k(0)v'(0)$. В итоге, имеем следующее решение уравнения (3), выраженное через начальные параметры

$$v(x) = v(0)\Omega_1(x) + N(0)\Omega_2(x) - \int\limits_0^x \left(\Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x)\right) q(\tau)d\tau.$$

Этим равенством в общем случае определяется амплитудное значение продольного перемещения точки оси стержня с координатой x. В случае свободных колебаний стержня в уравнении (1) внешняя нагрузка отсутствует $q(x,t)\equiv 0$. Следовательно, главная форма свободных продольных колебаний стержня определяется равенством

$$v(x)=v(0)\Omega_1(x)+N(0)\Omega_2(x). \qquad (17)$$

Окончательно, вынужденные продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с непрерывно распределенной массой в общем случае описываются формулой

$$u(x,t)=\left(\begin{array}{l} v(0)\Omega_1(x)+N(0)\Omega_2(x)- \\ -\int\limits_0^x\big(\Omega_1(\tau)\Omega_2(x)-\Omega_2(\tau)\Omega_1(x)\big)q(\tau)d\tau \end{array}\right)A\sin\big(\omega t+t_0\big).$$

Специальное представление решения. На практике, когда исходные параметры являются переменными, их удобно представлять в виде:

$$E(x)=E_0\phi(x),\ F(x)=F_0\psi_1(x),\ \rho(x)=\rho_0\psi_2(x),$$

где E_0,F_0,ρ_0 — некоторые постоянные, соответственно модуль упругости, площадь поперечного сечения и плотность материала стержня, а $\phi(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x)$ — безразмерные функции. Тогда

$$k(x)=k_0A(x),\ m(x)=m_0B(x),$$

где $k_0=E_0F_0,\ m_0=\rho_0F_0,\quad A(x)=\phi(x)\psi_1(x),\quad B(x)=\psi_1(x)\psi_2(x)$. Сообразно таким представлениям, формулы, которыми определены функции $\Omega_1(x),\ \Omega_2(x)$, перепишем в виде:

$$\Omega_1(x)=\alpha_0(x)-\lambda^2\alpha_1(x)+\lambda^4\alpha_2(x)-\lambda^6\alpha_3(x)+\ldots\ ;$$

$$\Omega_2(x)=\frac{1}{k_0}\Big(\beta_0(x)-\lambda^2\beta_1(x)+\lambda^4\beta_2(x)-\lambda^6\beta_3(x)+\ldots\Big);$$

$$\alpha_0(x)=1,\ \alpha_i(x)=\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\int\limits_0^x B(x)\alpha_{i-1}(x)dxdx;$$

$$\beta_0(x)=\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}dx,\ \ \beta_i(x)=\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\int\limits_0^x B(x)\beta_{i-1}(x)dxdx\ \ (i=1,2,3,\ldots).$$

Здесь обозначено $\lambda=\omega\sqrt{\dfrac{\rho_0}{E_0}}$. Вид остальных формул останется неизменным.

Продольные колебания конического стержня. Пусть задан однородный стержень в форме усеченного конуса с высотой l и радиусами оснований $R,r\big(R\ge r\big)$. В частности, когда $r=0$, будем иметь обычный конус. Очевидно, случай $R=0$ исключается, поскольку тогда и $r=0$, а значит, стержень вырождается в отрезок. Найдем частоты и формы собственных колебаний заданного стержня для разных случаев граничных условий.

Будем считать, что большее основание конуса находится в точке $x=0$, а меньшее в точке $x=l$. Тогда радиус поперечного сечения в точке x будет равен $R-\dfrac{R-r}{l}x$. Соответственно, в формуле для площади сечения $F(x)=F_0\psi_1(x)$, полагаем:

$F_0 = \pi R^2$, $\psi_1(x) = \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^2$, где $\gamma = 1 - \frac{r}{R}$. В силу однородности стержня также будем иметь: $\phi(x) \equiv 1$, $E = E_0$, $\psi_2(x) \equiv 1$, $\rho = \rho_0$. Следовательно, $A(x) = B(x) = \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^2$.

Обозначим ради краткости $u = 1 - \gamma \frac{x}{l}$. Для вычисления соответствующих этому случаю функций

$$\alpha_i(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \alpha_{i-1}(x)\,dxdx; \quad \beta_i(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \beta_{i-1}(x)\,dxdx \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

будем использовать специально выведенную формулу

$$\int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u x^p\,dxdx = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)u} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (18)$$

Вывод этой формулы оставляем за рамками изложения в силу его громоздкости. В ситуации, когда формула уже известна проще доказать ее справедливость непосредственным дифференцированием.

Интегрируя, находим

$$\alpha_1(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2\,dxdx = -\frac{l}{3\gamma} \int_0^x \frac{1}{u^2}\left(u^3 - 1\right) dx = -\frac{l}{3\gamma} \int_0^x \left(u - \frac{1}{u^2}\right) dx = \frac{1}{u}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^3}{3!}\right).$$

Применяя теперь формулу (18), будем иметь:

$$\alpha_2(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \alpha_1(x)\,dxdx = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^3}{3!}\right) dxdx = \frac{1}{u}\left(\frac{x^4}{4!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^5}{5!}\right),$$

$$\alpha_3(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \alpha_2(x)\,dxdx = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u\left(\frac{x^4}{4!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^5}{5!}\right) dxdx = \frac{1}{u}\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^7}{7!}\right), \ldots;$$

$$\Omega_1(x) = \alpha_0(x) - \lambda^2 \alpha_1(x) + \lambda^4 \alpha_2(x) - \lambda^6 \alpha_3(x) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{u}\left[u - \lambda^2\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^3}{3!}\right) + \lambda^4\left(\frac{x^4}{4!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^5}{5!}\right) - \lambda^6\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{\gamma}{l}\frac{x^7}{7!}\right) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{u}\left[\left(1 - \lambda^2\frac{x^2}{2!} + \lambda^4\frac{x^4}{4!} - \lambda^6\frac{x^6}{6!} + \ldots\right) - \frac{\gamma}{l}\left(x - \lambda^2\frac{x^3}{3!} + \lambda^4\frac{x^5}{5!} - \lambda^6\frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\right] = \frac{1}{u}\left(\cos\lambda x - \frac{\gamma}{\lambda l}\sin\lambda x\right)$$

Далее учитывая, что

$$\beta_0(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2}\,dx = \frac{l}{\gamma}\left(\frac{1}{u} - 1\right) = \frac{x}{u}$$

и снова используя формулу (18), получим:

$$\beta_1(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \beta_0(x)\,dxdx = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x ux\,dxdx = \frac{x^3}{3!u};$$

$$\beta_2(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \beta_1(x)\,dxdx = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u\frac{x^3}{3!}\,dxdx = \frac{x^5}{5!u};$$

$$\beta_3(x) = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u^2 \beta_2(x)\,dxdx = \int_0^x \frac{1}{u^2} \int_0^x u\frac{x^5}{5!}\,dxdx = \frac{x^7}{7!u}, \ldots;$$

$$\Omega_2(x)=\frac{1}{k_0}\left(\beta_0(x)-\lambda^2\beta_1(x)+\lambda^4\beta_2(x)-\lambda^6\beta_3(x)+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{k_0 u}\left(x-\lambda^2\frac{x^3}{3!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}-\lambda^6\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)=\frac{1}{k_0\lambda u}\sin\lambda x.$$

В результате формула (17) для конического стержня принимает вид

$$v(x)=\frac{1}{u}\left[v(0)\left(\cos\lambda x-\frac{\gamma}{\lambda l}\sin\lambda x\right)+\frac{N(0)}{k_0\lambda}\sin\lambda x\right], \qquad (19)$$

а значит

$$N(x)=v(0)k_0\left[\left(\frac{\gamma}{l}\right)^2 x\cos\lambda x-\left(\left(\frac{\gamma}{l}\right)^2\frac{1}{\lambda}+\lambda u\right)\sin\lambda x\right]+$$
$$+N(0)\left[\frac{\gamma}{\lambda l}\sin\lambda x+u\cos\lambda x\right]. \qquad (20)$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение $K=\lambda l$. Тогда формула для частоты в общем случае запишется так $\omega=\frac{K}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Исходя из роли параметра K в этой формуле, его естественно назвать коэффициентом колебаний.

Случай 1. Пусть оба конца стержня жестко закреплены: $v(0)=0$, $v(l)=0$. Формула (19) с учетом первого условия запишется так $v(x)=\frac{N(0)}{k_0\lambda u}\sin\lambda x$. Реализация второго условия приводит к частотному уравнению $v(l)=\frac{N(0)R}{k_0\lambda r}\sin K=0$. Следовательно, $\sin K=0$, $K_j=\pi j$, $\omega_j=\frac{\pi j}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $(j=1,2,3,\ldots)$. Таким частотам соответствуют собственные формы колебаний $v_j(x)=\frac{D_j}{u}\sin\frac{\pi j}{l}x$, где $D_j=\frac{N(0)l}{k_0\pi j}$.

Из механических соображений понятно, что реализовать жесткое закрепление на конце стержня с нулевой площадью поперечного сечения невозможно. Этот факт нашел отражение в частотном уравнении, из которого следует, что r не может быть нулевым.

Случай 2. Конец $x=0$ закреплен, а конец $x=l$ свободен: $v(0)=0$, $N(l)=0$. Формула (20) с учетом первого условия запишется в виде $N(x)=N(0)\left[\frac{\gamma}{K}\sin\lambda x+u\cos\lambda x\right]$. Из второго условия получаем уравнение $N(l)=N(0)\left[\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{1}{K}\sin K+\frac{r}{R}\cos K\right]=0$. Отсюда видно, что радиус r может быть в частности равен нулю. Это следствие того, что конец стержня, соответствующий сечению с таким радиусом, свободен. В такой ситуации приходим к уравнению $\sin K=0$. В другой ситуации, когда $R=r$ (стержень представляет собой цилиндр), также получаем элементарное уравнение $\cos K=0$. Соответственно, для коэффициентов колебаний получаем: $K_j = \pi j$, если $r = 0$ и $K_j = \frac{\pi(2j-1)}{2}$, если $R = r$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$.

Когда $r \neq 0$ и $R \neq r$ имеем трансцендентное уравнение $\left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{1}{K}\sin K + \frac{r}{R}\cos K = 0$, корни которого K_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ легко находятся с помощью численных методов для любого заданного значения $\frac{r}{R}$. Очевидно, все значения выражения $\frac{r}{R}$ содержатся на отрезке $0 \leq \frac{r}{R} \leq 1$. В таблице приведены результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний для каждого значения $\frac{r}{R}$ с шагом 0,1.

Окончательно, в рассматриваемом случае, для частот и форм собственных колебаний, имеем $\omega_j = \frac{K_j}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $v_j(x) = \frac{D_j}{u}\sin\frac{K_j}{l}x$, где $D_j = \frac{lN(0)}{k_0 K_j}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$.

В частности, $\omega_j = \frac{\pi j}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $v_j(x) = \frac{D_j}{u}\sin\frac{\pi j}{l}x$, $D_j = \frac{lN(0)}{k_0 \pi j}$, если $r = 0$ и $\omega_j = \frac{\pi(2j-1)}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $v_j(x) = D_j \sin\frac{\pi(2j-1)}{2l}x$, $D_j = \frac{2lN(0)}{\pi(2j-1)k_0}$, если $R = r$.

Случай 3. Концы стержня не закреплены: $N(0) = 0$, $N(l) = 0$. В этом случае формула (20) после реализации первого условия будет иметь вид $N(x) = v(0)k_0\left[\left(\frac{\gamma}{l}\right)^2 x\cos\lambda x - \left(\left(\frac{\gamma}{l}\right)^2\frac{1}{\lambda} + \lambda u\right)\sin\lambda x\right]$. Второе условие дает частотное уравнение $N(l) = v(0)\frac{k_0}{l}\left[\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\cos K - \left(\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\frac{1}{K} + \frac{r}{R}K\right)\sin K\right] = 0$. В ситуации, когда $R = r$, получаем $\sin K = 0$, $K_j = \pi j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. Если $R \neq r$, то для отыскания корней трансцендентного уравнения $\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\cos K - \left(\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\frac{1}{K} + \frac{r}{R}K\right)\sin K = 0$ снова необходимо прибегнуть к численным методам. Результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний, соответствующих данному случаю, приведены таблице.

Таким образом, в рассматриваемом случае, для частот и форм собственных колебаний, получаем

$$\omega_j = \frac{K_j}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ v_j(x) = \frac{v(0)}{u}\left(\cos\frac{K_j}{l}x - \left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{1}{K_j}\sin\frac{K_j}{l}x\right)\ (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

$\frac{r}{R}$	Коэффициенты колебаний конического стержня								
	Случай 1			Случай 2			Случай 3		
	K_1	K_2	K_3	K_1	K_2	K_3	K_1	K_2	K_3
0	-	-	-	π	2π	3π	4,493409	7,725252	10,904122
0,1	π	2π	3π	2,836301	5,717249	8,658705	4,070058	7,061906	10,065184
0,2	π	2π	3π	2,570432	5,354032	8,302929	3,749124	6,702449	9,7327058
0,3	π	2π	3π	2,352173	5,138629	8,133362	3,529909	6,519908	9,5905764
0,4	π	2π	3π	2,174626	5,003645	8,038463	3,383384	6,419535	9,518132
0,5	π	2π	3π	2,028758	4,913181	7,978666	3,286007	6,360678	9,477196
0,6	π	2π	3π	1,907091	4,849017	7,937771	3,222107	6,325042	9,4528967
0,7	π	2π	3π	1,804035	4,801413	7,908122	3,181477	6,303514	9,4383797
0,8	π	2π	3π	1,715507	4,764809	7,885674	3,157348	6,291123	9,4300771
0,9	π	2π	3π	1,638505	4,735847	7,868102	3,145121	6,284953	9,4259566
1	π	2π	3π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	π	2π	3π

В частности, если $R = r$, то будем иметь $\omega_j = \frac{\pi j}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $v_j(x) = v(0)\cos\frac{\pi j}{l}x$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$.

Несмотря на то, что в первом случае коэффициенты колебаний не зависят от параметра $\frac{r}{R}$, ради полноты картины, этот случай также отражен в таблице. Следует особо подчеркнуть, что коэффициенты колебаний K_j не зависят от длины стержня, а зависят от характера краевых условий и, вообще говоря, от отношения $\frac{r}{R}$. Следовательно, частоты колебаний ω_j всегда обратно пропорциональны длине стержня.

Пользуясь точным решением дифференциального уравнения (1), можно исследовать продольные колебания и для некоторых других частных видов стержней. Однако более важно, на взгляд автора, основываясь на точном решении, выписать частотные уравнения и формы собственных колебаний в общем случае и указать способ их численной реализации. Этому вопросу автор планирует посвятить отдельную статью.

Выводы

Проинтегрировано неоднородное дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня, когда коэффициент упругости и погонная масса являются произвольными непрерывными функциями. Определена главная форма свободных колебаний стержня. Выписана формула для вынужденных колебаний.

Исследованы свободные продольные колебания конического стержня. Найдены частоты и выписаны соответствующие им формы собственных колебаний для разных случаев граничных условий.

В связи с наличием точного решения для уравнения продольных колебаний, в перспективе становится возможным создание алгоритма отыскания частот и собственных форм колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой.

Литература

1. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М. : Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971. – 512 с.
3. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М. : Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1962. – 767 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.