**Ю.С. КРУТИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц.**
ОГАСА, г. Одесса

# ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

*Построено точное решение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости. Рассмотрена задача устойчивости упругого неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения, шарнирно опертого по краям. В явном виде выписана формула для искривленных форм равновесия стержня и характеристическое уравнение для продольной силы. Предлагается метод отыскания критических сил.*

***Ключевые слова:*** *устойчивость, стержень, переменная жесткость, точное решение, критическая сила.*

## Постановка задачи

Пусть задан упругий, вообще говоря, неоднородный прямой стержень переменного поперечного сечения длины $l$, сжатый осевой продольной силой $N$ и шарнирно опертый по концам. Рассмотрим задачу устойчивости такого стержня.

Направим ось $x$ вдоль оси стержня, а ось $y$ – по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения. При этом будем считать, что концы стержня находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Очевидно, в силу переменного поперечного сечения, момент инерции стержня будет меняться вдоль его длины. В такой ситуации закон изменения момента инерции принято представлять в виде $J(x) = J_0\psi(x)$, где $J_0$ – некоторый постоянный момент инерции, а $\psi(x)$ – безразмерная функция [1]. Запишем аналогичное представление и для модуля упругости, который в общем случае также будем считать переменным. Пусть $E(x) = E_0\phi(x)$, где $E_0$ – постоянный модуль упругости, а $\phi(x)$ – безразмерная функция. Тогда переменная поперечная жесткость стержня (жесткость на изгиб) запишется в виде $E(x)J(x) = E_0J_0A(x)$, где обозначено $A(x) = \psi(x)\phi(x)$. Далее будем рассматривать ситуацию, когда жесткость является произвольной непрерывной функцией, отличной от нуля всюду на отрезке $x\epsilon[0, l]$.

Считая прогибы малыми по сравнению с длиной стержня, а также пренебрегая продольными деформациями, дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (уравнения продольного изгиба) запишется в виде [2]

$$E(x)J(x)y''(x) + Ny(x) = 0$$

или

$$A(x)y''(x) + Py(x) = 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения стержня в точке $x$; $P = \frac{N}{E_0J_0}$ К уравнению (1) присоединим граничные условия, соответствующие рассматриваемому случаю

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Известно [3], что одним из важнейших способов определения критической силы является прямое интегрирование соответствующего дифференциального уравнения равновесия стержня. В частности, как отмечается в [3], такой способ наиболее удобный, если требуется большая точность. Однако когда жесткость стержня изменяется непрерывно, известны лишь редкие случаи построения точного (аналитического) решения дифференциального уравнения (1). Как отмечается в [4, 5], в общем случае при произвольном непрерывном законе изменения жесткости, данное уравнение не удается проинтегрировать.

Ставится задача: для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости требуется построить точное решение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (1); выписать характеристическое уравнение для продольной силы; указать способ определения значений продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня, а также выписать уравнения, которыми эти формы определяются.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

**Точное решение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.** Построим общее решение дифференциального уравнения (1). Для этого определим две бесконечных системы функций такими рекуррентными соотношениями:

$$\alpha_0(x) = 1,\ \alpha_i(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)dxdx;\ \beta_0(x) = x,\ \beta_i(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x)dxdx\ (i = 1,2,3,\dots). \quad (2)$$

Заметим при этом, что введенные функции обладают следующими свойствами, которые легко проверяются:

$$\alpha_0'(x) = 0, \alpha_i'(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)\,dx;\ \beta_0'(x) = 1, \beta_i'(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x)\,dx;$$

$$\alpha_i''(x) = \frac{1}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)\ ,\ \beta_i''(x) = \frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x); \quad (3)$$

$$\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0\ (i = 1,2,3,\dots)\ . \quad (4)$$

Образуем из этих систем четыре функциональных ряда:

$$\Omega_1(x) = \alpha_0(x) - P\alpha_1(x) + P^2\alpha_2(x) - P^3\alpha_3(x) + \cdots, \quad (5)$$

$$\Omega_2(x) = \beta_0(x) - P\beta_1(x) + P^2\beta_2(x) - P^3\beta_3(x) + \cdots, \quad (6)$$

$$\Omega_1'(x) = -P\alpha_1'(x) + P^2\alpha_2'(x) - P^3\alpha_3'(x) + \cdots, \quad (7)$$

$$\Omega_2'(x) = 1 - P\beta_1'(x) + P^2\beta_2'(x) - P^3\beta_3'(x) + \cdots. \quad (8)$$

Суммы рядов (7), (8) обозначены $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ пока только формально. Такие обозначения будут законными, если доказать, что все четыре ряда сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0, l]$. Ради краткости приведем доказательство только для ряда (6). Для этого построим соответствующий мажорантный ряд.

Определим неотрицательную постоянную $h$ равенством $h = \max_{x\in[0,l]}\frac{1}{A(x)}$. Тогда для функций $\beta_i(x)$, $(i = 1,2,3,\dots)$ будут справедливы оценки:

$$|\beta_1(x)| = \left|\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_0(x)\,dxdx\right| \le \int_0^x\int_0^x \left|\frac{1}{A(x)}\beta_0(x)\right| dxdx \le h\int_0^x\int_0^x xdxdx = h\frac{x^3}{3!},$$

$$|\beta_2(x)| = \left|\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_1(x)dxdx\right| \le \int_0^x\int_0^x \left|\frac{1}{A(x)}\beta_1(x)\right| dxdx \le h^2\int_0^x\int_0^x \frac{x^3}{3!}dxdx = h^2\frac{x^5}{5!}, \dots .$$

Следовательно, для ряда, составленного из модулей, получим:

$$|\beta_0(x)| + |P\beta_1(x)| + |P^2\beta_2(x)| + \cdots \le x + Ph\frac{x^3}{3!} + P^2h^2\frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{Ph}}\,sh\sqrt{Ph}x,$$

Мажорантой здесь с точностью до множителя выступает элементарная функция $sh\sqrt{Ph}x$, определяемая равномерно сходящимся рядом. Поэтому ряд из модулей сходится, причем сходится равномерно. Тем самым доказано, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, l]$. Совершенно аналогично можно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (5), (7), (8). Это означает, что ряды (5), (6) можно почленно дифференцировать и обозначения $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ для рядов (7), (8) законны.

Дифференцируя теперь почленно ряды (7), (8), с учетом формул (3), получим:

$$\Omega_1''(x) = -P\alpha_1''(x) + P^2\alpha_2''(x) - P^3\alpha_3''(x) + \cdots =$$
$$= -\frac{P}{A(x)}\alpha_0(x) + \frac{P^2}{A(x)}\alpha_1(x) - \frac{P^3}{A(x)}\alpha_2(x) + \cdots = -\frac{P}{A(x)}\Omega_1(x),$$
$$\Omega_2''(x) = -P\beta_1''(x) + P^2\beta_2''(x) - P^3\beta_3''(x) + \cdots =$$
$$= -\frac{P}{A(x)}\beta_0(x) + \frac{P^2}{A(x)}\beta_1(x) - \frac{P^3}{A(x)}\beta_2(x) + \cdots = -\frac{P}{A(x)}\Omega_2(x).$$

Следовательно, функции $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ – решения дифференциального уравнения (1). Очевидно $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Таким образом, общее решение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (1) имеет вид

$$y(x) = C\Omega_1(x) + D\Omega_2(x), \tag{9}$$

где $C, D$ – постоянные интегрирования.

**Характеристическое уравнение и смежные искривленные формы равновесия.** Реализуем заданные граничные условия. Учитывая равенства (4), из формул (5), (6) заключаем, что $\Omega_1(0) = 1$; $\Omega_2(0) = 0$. Поэтому из условия $y(0) = 0$ получаем, что $C = 0$. Следовательно, уравнение изогнутой оси стержня запишется так

$$y(x) = D\Omega_2(x). \tag{10}$$

Второе условие $y(l) = 0$ приводит к равенству $D\Omega_2(l) = 0$, которое имеет два возможных решения: либо $D = 0$, либо $\Omega_2(l) = 0$. В первом случае получается, что $C = D = 0$ и перемещения, согласно формуле (9) тождественно равны нулю. Такое решение, очевидно, соответствует первоначальному равновесному состоянию стержня, которое нас не интересует. Во втором случае, с учетом формул (6), (2) получаем уравнение

$$l - \beta_1(l)P + \beta_2(l)P^2 - \beta_3(l)P^3 + \cdots = 0, \tag{11}$$

где

$$\beta_i(l) = \int_0^l \int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x)dxdx \ (i = 1,2,3, \dots).$$

Это и есть в общем случае характеристическое уравнение для отыскания нагрузок, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня.

Предположим пока, что уравнение (11) всегда разрешимо на множестве вещественных строго положительных чисел. Обозначим такие его корни через $P_1, P_2, P_3, \dots$, располагая их в порядке возрастания. Тогда $N_j = P_jE_0J_0$ $(j = 1,2,3 \dots)$, причем каждому такому значению продольной силы, согласно формулам (10), (6), будет соответствовать своя искривленная форма равновесия

$$y_j(x) = D\left(\beta_0(x) - P_j\beta_1(x) + P_j^2\beta_2(x) - P_j^3\beta_3(x) + \cdots\right). \tag{12}$$

**Случай Эйлера.** Для случая однородного стержня постоянной жесткости широко известна формула Эйлера для первой критической силы. Покажем, что эта формула и соответствующая ей искривленная форма равновесия могут быть получены из приведенных выше формул, как частный случай. Действительно, полагая $\phi(x) \equiv 1, E = E_0, \psi(x) \equiv 1, J = J_0, A(x) \equiv 1$, по формулам (2), будем иметь:

$$\beta_0(x) = x, \beta_1(x) = \int_0^x \int_0^x x dxdx = \frac{x^3}{3!}, \beta_2(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{x^3}{3!}dxdx =$$
$$= \frac{x^5}{5!}, \beta_3(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{x^5}{5!}dxdx = \frac{x^7}{7!}, \dots .$$

Уравнение (11) теперь принимает вид

$$l-\beta_1(l)P+\beta_2(l)P^2-\beta_3(l)P^3+\cdots=l-\frac{l^3}{3!}P+\frac{l^5}{5!}P^2-\frac{l^7}{7!}P^3+\cdots=\frac{1}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}l=0.$$

Отсюда находим $P_j=\left(\frac{\pi j}{l}\right)^2$, а значит $N_j=\left(\frac{\pi j}{l}\right)^2 EJ$ ($j=1,2,3,\dots$). Соответствующие таким значениям продольной силы искривленные формы равновесия, на основании формулы (12), запишутся в виде

$$y_j(x)=D\left(x-P_j\frac{x^3}{3!}+P_j^2\frac{x^5}{5!}-P_j^3\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=D_j\ \sin\frac{\pi j}{l}x,$$

где $D_j=\frac{l}{\pi j}D$. Полагая $j=1$, получаем формулу Эйлера $N_{\text{кр}}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ$ и соответствующую ей искривленную форму равновесия $y_1(x)=D_1\ \sin\frac{\pi}{l}x$.

**Случай, когда жесткость изменяется по закону четвертой степени.** Помимо случая постоянной жесткости, известны случаи непрерывной переменной жесткости, когда удается получить формулы для точного значения критической силы [3, 6]. В силу общности характеристического уравнения (11), все такие формулы должны вытекать из него как частный случай. Как это происходит, продемонстрируем на следующем примере.

Рассмотрим однородный стержень, момент инерции которого изменяется по закону [6]

$$J(x)=J_0\left(1-\gamma\frac{x}{l}\right)^4,$$

где $J_0$ – момент инерции поперечного сечения стержня в точке $x=0$, а $\gamma$ – константа, отличная от единицы. По такому закону изменяется момент инерции конического и пирамидального стержня. В этом случае, очевидно, следует положить: $\phi(x)\equiv 1, E=E_0, A(x)=$ $=\psi(x)=\left(1-\gamma\frac{x}{l}\right)^4$.

Обозначим $u=1-\gamma\frac{x}{l}$. Для вычисления соответствующих рассматриваемому случаю функций

$$\beta_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^4}\beta_{i-1}(x)dxdx\ (i=1,2,3,\dots),$$

воспользуемся специально выведенной формулой

$$\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{u}-1\right)^p dxdx=\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^2 u\left(\frac{1}{u}-1\right)^{p+2}\quad (p=1,2,3,\dots). \tag{13}$$

Строгое доказательство этой формулы оставляем за рамками изложения. Укажем только на один из возможных вариантов такого доказательства. Дифференцируя дважды обе части формулы (13), мы придем к тождеству. Это будет означать, что левая часть формулы равна правой с точностью до произвольного многочлена первой степени. Однако, учитывая тот факт, что обе эти части вместе со своими первыми производными при $x=0$ обращаются в ноль, заключаем, что указанный многочлен есть тождественный ноль.

В итоге, с учетом формулы (13), будем иметь:

$$\beta_0(x)=x=\frac{l}{\gamma}u\left(\frac{1}{u}-1\right),$$

$$\beta_1(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^4}\ \beta_0(x)dxdx=\frac{l}{\gamma}\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{u}-1\right)dxdx=\frac{1}{3!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^3 u\left(\frac{1}{u}-1\right)^3,$$

$$\beta_2(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^4}\ \beta_1(x)\,dxdx=\frac{1}{3!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^3\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{u}-1\right)^3 dxdx=\frac{1}{5!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^5 u\left(\frac{1}{u}-1\right)^5,$$

$$\beta_3(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^4}\ \beta_2(x)\,dxdx=\frac{1}{5!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^5\int_0^x\int_0^x\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{u}-1\right)^5 dxdx=\frac{1}{7!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^7 u\left(\frac{1}{u}-1\right)^7,\ \dots;$$

$$\Omega_2(x) = \beta_0(x) - P\beta_1(x) + P^2\beta_2(x) - P^3\beta_3(x) + \cdots =$$

$$= u\left[\frac{l}{\gamma}\left(\frac{1}{u}-1\right) - \frac{P}{3!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^3\left(\frac{1}{u}-1\right)^3 + \frac{P^2}{5!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^5\left(\frac{1}{u}-1\right)^5 - \frac{P^3}{7!}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^7\left(\frac{1}{u}-1\right)^7 + \cdots\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\, u \sin\, \frac{l}{\gamma}\sqrt{P}\left(\frac{1}{u}-1\right).$$

Уравнение (11) теперь запишется в виде $\frac{1}{\sqrt{P}}\,(1-\gamma)\sin\,\frac{l}{1-\gamma}\sqrt{P} = 0$. Отсюда находим, что $P_j = \left(\frac{1-\gamma}{l}\pi j\right)^2$ $(j = 1,2,3,\ldots)$. Следовательно, для продольной силы получаем $N_j = \left(\frac{1-\gamma}{l}\pi j\right)^2 EJ_0$. Согласно формуле (12), искривленные формы равновесия для данного случая определятся равенствами

$$y_j(x) = D_j u \sin\left[\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\left(\frac{1}{u}-1\right)\pi j\right],$$

где обозначено $D_j = \frac{l}{(1-\gamma)\pi j} D$. Окончательно, полагая $j = 1$, получаем формулу для первой критической силы

$$N_{\text{кр}} = \left(\frac{1-\gamma}{l}\pi\right)^2 EJ_0. \tag{14}$$

Существуют и другие частные случаи непрерывной жесткости, когда критическую силу можно определить точно. Однако важно указать такой способ определения критических сил, который был бы пригодным для любой непрерывной жесткости. В таком общем случае, безусловно, придется прибегнуть к численным методам. Но заметим, что их применение здесь связано лишь с необходимостью численной реализации уже построенных точных решений.

**Общий случай непрерывной переменной жесткости.** Следуя [3], формулу для критической силы в общем случае запишем в виде

$$N_{\text{кр}} = K\,\frac{E_0 J_0}{l^2}, \tag{15}$$

где $K$ – так называемый коэффициент устойчивости. Очевидно, приведенные выше формулы для точного значения критической силы имеют именно такую структуру. В общем же случае, если мы численно определим наименьший положительный корень $P$ непосредственно из уравнения (11), то для критической силы будем иметь $N_{\text{кр}} = PE_0J_0$. Для того чтобы получить окончательный ответ в виде формулы (15), осуществим в уравнении (11) замену переменных $P = \frac{K}{l^2}$. Получим равносильное характеристическое уравнение, записанное для коэффициента устойчивости

$$1 - \gamma_1(l)K + \gamma_2(l)K^2 - \gamma_3(l)K^3 + \cdots = 0, \tag{16}$$

где $\gamma_i(l) = \frac{\beta_i(l)}{l^{2i+1}}$ $(i = 1,2,3,\ldots)$. Исследуем это уравнение разрешимость.

Прежде всего, заметим, что $\beta_i(l) > 0$ $(i = 1,2,3,\ldots)$. Это следует из неравенства $A(x) > 0$ и свойств определенных интегралов. Но тогда и $\gamma_i(l) > 0$. Следовательно, в случае отрицательного значения переменной $K$, левая часть уравнения (16) является суммой положительных чисел, а значит, никогда не равна нулю. Поэтому уравнение (16) не может иметь отрицательных корней. Очевидно, что и число ноль также не может быть корнем. Таким образом, корнями уравнения (16) могут быть либо вещественные строго положительные числа, либо комплексные числа.

Левая часть уравнения (11) представляет собой абсолютно сходящийся числовой ряд $\Omega_2(l)$. Следовательно, левая часть уравнения (16) также является абсолютно сходящимся рядом. Это означает, что какой сколь угодно малой ни была бы задана точность $\varepsilon$ для вычисления корня, ее всегда можно достичь, удерживая конечное число $n+1$ первых членов ряда и пренебрегая остальными, которые в силу своей малости, практически не будут влиять на значение корня. В результате такой процедуры, для неизвестной $K$ получим приближенное характеристическое уравнение, которое будет представлять собой алгебраическое уравнение степени $n$ с вещественными коэффициентами

$$f_n(K) = 1 - \gamma_1(l)K + \gamma_2(l)K^2 - \gamma_3(l)K^3 + \cdots + (-1)^n \gamma_n(l)K^n = 0. \tag{17}$$

Число перемен знаков многочлена $f_n(K)$ равно $n$. Следовательно, выбирая $n$ нечетным, мы гарантируем тем самым, согласно теореме Декарта [7], наличие как минимум одного положительного корня уравнения (17). Таким образом, уравнение (16), а значит и уравнение (11), всегда приближенно разрешимо на множестве вещественных строго положительных чисел.

Обозначим через $K_1^{(n)}$, $K_1^{(n+2)}$ наименьшие положительные корни многочленов $f_n(K)$, $f_{n+2}(K)$ соответственно. Если для некоторого текущего значения $n = 1,3,5,\ldots$ выполнено условие $\left|K_1^{(n+2)} - K_1^{(n)}\right| < \varepsilon$, то будем полагать, что первый корень уравнения (16) найден, а именно $K_1 = K_1^{(n)}$. Из аналогичных соображений, можно определить и другие вещественные корни уравнения (16) с заданной точностью. Запишем их в порядке возрастания $K_1, K_2, \ldots, K_m$ $(m \leq n)$. Здесь $K_j = K_j^{(n)}$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ при условии

$$\left|K_j^{(n+2)} - K_j^{(n)}\right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Тогда будем иметь коэффициент устойчивости $K = K_1$ и значения продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня

$$N_j = K_j \frac{E_0 J_0}{l^2} \; (j = 1,2,3,\ldots,m), \tag{19}$$

причем $N_{\text{кр}} = N_1$.

Для практических вычислений (например, для построения графиков искривленных форм равновесия) формулу (12) также можно заменить приближенной. Удерживая там некоторое конечное число первых $k+1$ членов ряда, и пренебрегая остальными, получим

$$y_j(x) = D\left(\beta_0(x) - P_j\beta_1(x) + P_j^2\beta_2(x) - P_j^3\beta_3(x) + \cdots + (-1)^k P_j^k \beta_k(x)\right), P_j = \frac{K_j}{l^2}. \tag{20}$$

Достичь здесь любой точности вычислений можно за счет выбора подходящего значения параметра $k$. При этом, полезно иметь в виду неравенство $\beta_{k+1}(x) \leq \beta_{k+1}(l)$, справедливое для любого $x \in [0, l]$ и любого $k$. Оно следует из того факта, что первая производная функции $\beta_{k+1}(x)$ неотрицательна на отрезке $[0, l]$, а значит $\beta_{k+1}(x)$ является монотонно возрастающей.

**Численная реализация.** Поскольку вопрос отыскания корней многочленов хорошо изучен и не может вызывать принципиальных затруднений, то осталось лишь указать способ вычисления коэффициентов этих многочленов $\gamma_i(l)$ $(i = 1,2,3,\ldots,n+2)$ . С точки зрения программной реализации, наиболее эффективным автору представляется подход, который позволит избежать многократного численного интегрирования. Идея такого подхода заключается в аппроксимации функции $\frac{1}{A(x)}$ многочленом

$$\frac{1}{A(x)} = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_s \, . \tag{21}$$

Из определения функции $\beta_i(x)$ вытекает, что она представима в виде

$$\beta_i(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x \frac{x}{A(x)} dxdxdxdx \dots dxdx$$

и содержит всего $2i$ интегралов. Поэтому, когда функция $\frac{1}{A(x)}$ представима многочленом степени $s$, то $\beta_i(x)$ также является многочленом, причем наибольшая степень этого многочлена равна $is + 2i + 1$, а наименьшая $2i + 1$. Следовательно, имеет место представление

$$\beta_i(x) = x^{2i+1} \sum_{j=0}^{is} c_{ij} x^{is-j} , \tag{22}$$

где $c_{ij}$ – коэффициенты, подлежащие определению. Но тогда

$$\beta_{i-1}(x) = x^{2i-1} \sum_{j=0}^{is-s} c_{i-1,j} x^{is-s-j} ,$$

причем при $i = 1$ получаем $\beta_0(x) = c_{00}x$, откуда следует, что $c_{00} = 1$. Далее, на основании формулы для произведения двух многочленов, будем иметь

$$\frac{1}{A(x)} \beta_{i-1}(x) = x^{2i-1} \left(\sum_{j=0}^{s} b_j x^{s-j}\right) \left(\sum_{j=0}^{is-s} c_{i-1,j} x^{is-s-j}\right) = x^{2i-1} \sum_{j=0}^{is} d_{i-1,j} x^{is-j} ,$$

где

$$d_{i-1,j} = \sum_{k=0}^{j} b_k \, c_{i-1,j-k} , \tag{23}$$

причем $b_k = 0$, если $k > s$ и $c_{i-1,j-k} = 0$, если $j - k > is - s$. Непосредственным интегрированием, теперь получаем

$$\beta_i(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B(x)} \beta_{i-1}(x) dxdx = x^{2i+1} \sum_{j=0}^{is} \frac{d_{i-1,j}}{(is+2i-j)(is+2i+1-j)} x^{is-j} .$$

Сопоставляя последнюю формулу с представлением (22), приходим к рекуррентному соотношению для последовательного вычисления неизвестных $c_{ij}$ в виде

$$c_{ij} = \frac{d_{i-1,j}}{(is+2i-j)(is+2i+1-j)} \; (i = 1,2, \dots, n+2) \; (j = 0,1, \dots, is). \tag{24}$$

После этого, согласно формуле (22), имеем

$$\beta_i(l) = l^{2i+1} \sum_{j=0}^{is} c_{ij} l^{is-j} ,$$

а значит,

$$\gamma_i(l) = \sum_{j=0}^{is} c_{ij} l^{is-j} \; (i = 1,2, \dots, n+2) . \tag{25}$$

Окончательно, предлагается следующий алгоритм для отыскания критических сил и соответствующих искривленных форм равновесия для общего случая непрерывной переменной жесткости стержня:

1. Аппроксимируем заданную функцию $\frac{1}{A(x)}$ многочленом. При этом степень $s$ в формуле (21) выбираем в каждом конкретном случае из условия адекватного приближения;

2. Для текущего значения $n = 1,3,5, \dots$ вычисляем по формуле (25) коэффициенты $\gamma_i(l)$ $(i = 1,2, \dots, n+2)$. При этом, для каждого значения $i$ вначале вычисляем числа $c_{ij}$ $(j = 0,1, \dots, is)$, последовательно применяя формулы (23), (24). Формируем пару многочленов $f_n(K)$ и $f_{n+2}(K)$.

3. Задаем точность $\varepsilon$. Находим корни $K_j^{(n)}$ $(j = 1,2, \dots, m)(m \leq n)$ многочлена $f_n(K)$, удовлетворяющие условию (18), и записываем их в порядке возрастания. Тогда, относительно корней характеристического уравнения (16), полагаем $K_j = K_j^{(n)}$ $(j = 1,2, \dots, m)$.

4. По формулам (20), (22) строим графики искривленных форм равновесия, соответствующих найденным по формуле (19) значениям продольной силы $N_j$ $(j = 1,2, \dots, m)$.

Указанный алгоритм реализован программно. Для оценки точности предлагаемого метода программно вычислялся коэффициент устойчивости для ряда случаев, когда его точное значение известно наперед. Сравнение программно вычисленных и точных значений коэффициента устойчивости указывают на высокую точность метода. При этом можно добиться сколь угодно малой погрешности между точным и вычисляемым значениями, выбирая надлежащим образом параметры $s$ и $\varepsilon$. Так например, в рассмотренном выше случае, для которого справедлива формула (14), точное значение коэффициента устойчивости при $\gamma = 0{,}5$ будет равно $K = ((1-\gamma)\pi)^2 = 2{,}46740110$. Этот же коэффициент устойчивости, вычисленный программно при $s = 4$ и $\varepsilon = 0{,}001$ равен $K = K_1^{(5)} = 2{,}469778461$ . Относительная погрешность в этом случае не превосходит $0{,}1\%$.

## Выводы

Проинтегрировано дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня для случая произвольной непрерывной жесткости. Основываясь на полученном аналитическом решении, предлагается решение задачи устойчивости шарнирно опертого по концам стержня. К главным преимуществам изложенного в работе подхода, на взгляд автора, следует отнести:

1. Наличие единых общих формул, применимых для отыскания критических сил в любом случае непрерывной жесткости стержня;
2. Наличие в явном виде уравнений искривленных форм равновесия стержня;
3. Возможность сравнительно простой программной реализации полученных формул.

## Литература


1. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 544 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 984 с.
3. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. Кручение. – М. : Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. т.3. – М. : «Машиностроение», 1968. – 576 с.
5. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: «Машиностроение», 1978. – 312 с.
6. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М. : Издательство «Наука», 1968. – 431 с.