Ю.С. КРУТИИ, канд. фйз.-мат. наук, доц.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ (продолжение)

Рассмотрена задача устойчивости равновесия упругого неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения для пяти а\учаев идеальных граничных условий. Построено точное решение дифференциального уравнения равновесия стержня четвертого порядка. В явном аналитическом виде записаны характеристические уравнения и формулы для искривленных форм равновесия стержня. Предложен метод отыскания критических сил, пригодный для любой непрерывной поперечной жесткости.

Kii/очевые слови: *устойчивость, стержень, переменная жесткость, точное решение, критическая сила.*

Статья посвящена задаче устойчивости равновесия стержня и является продолжением ранее опубликованной работы [1]. Объектом исследования является упругий, вообще говоря, неоднородный прямой стержень переменного поперечного сечения длины /, сжатый осевой продольной постоянной силой N и свободный от внешних изгибающих воздействий. Общей конечной целью двух публикаций является исследование всех возможных шести случаев идеальных граничных условий, что по замыслу должно придать определенную завершенность рассматриваемому вопросу. Поскольку ранее в [1J был рассмотрен только случай шарнирного опирания концов стержня, то круг новых вопросов, дополняющих первую статью, сводится к рассмотрению остальных пяти случаев. Метод исследования в обеих работах один и тот же. Это метод прямого интегрирования дифференциального уравнения равновесия. Однако в отличие от первой работы, где можно было использовать уравнения равновесия второго порядка, здесь приходится иметь дело с уравнением четвертого порядка. Вместе с тем, общие интегралы этих уравнений взаимосвязаны и выражаются один через другой. Поэтому предлагаемые здесь решения были бы невозможны без результатов работы [1J.

Постановка задачи

Будем придерживаться принятых в [1] представлений для момента инерции $J(x)-J_0\\i(x)$, модуля упругости $E\{x)$ — E_0 ф(x) и поперечной жесткости стержня $E(x)J(x)= E_0J_0A(x)$, где J_a и $E_{[]}$ — некоторые постоянные момент инерции и модуль упругости, а \|/(x) и **ф(лг)** — безразмерные функции, у4(л') = \|/(x)ф(x).

В общем случае, при любых граничных условиях, дифференциальное уравнение равновесия стержня в искривленном состоянии имеет вид [2—4] $(E(x)J(x)y''(x))'' + N y''(x)$ — 0, или

$$\{A(x)y\x))''+Py'\x) = 0, \qquad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения стержня в точке x, P = -~-. Как известно [4], это уравнение определяет линеаризованную
o

постановку задачи устойчивости равновесия сжато-изогнутого стержня. Далее рассматривается ситуация, когда жесткость является произвольной непрерывной функцией, отличной от нуля всюду на отрезке хе [0,/].

Ставится задача: для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости требуется построить точное решение дифференциального уравнения равновесия стержня (1); выписать характеристические уравнения для продольной силы, соответствующие разным случаям граничных условий; указать способ определения значений продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня, а также выписать уравнения, которыми эти формы определяются.

Результаты

Точное решение дифференциального уравнения равновесия стержня. В частном случае, когда концы стержня шарнирно оперты, вместо дифференциального уравнения четвертого порядка {!), обычно используют уравнение равновесия второго порядка, которое с учетом принятых выше обозначений имеет вид [5, 6|

$$A\{x)y''(x) + Py(x) = 0. \qquad (2)$$

Точное решение этого уравнения построено в [1]. Выпишем формулы, которыми это решение определяется:

$$y(x)=C_1\Omega_1(x)+C_2\Omega_2(x),\quad \Omega_1(x)=\alpha_0(x)-P\alpha_1(x)+P^2\alpha_2(x)-P^3\alpha_3(x)+\ldots,\tag{3}$$

$$\Omega_2(x)=\beta_0(x)-P\beta_1(x)+P^2\beta_2(x)-P^3\beta_3(x)+\ldots,\tag{4}$$

$$\alpha_0(x)=1,\ \ \alpha_i(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)dxdx;\ \ \beta_0(x)=x,\ \ \beta_i(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x)dxdx,\tag{5}$$

$$\alpha_i(0)=\alpha_i'(0)=\beta_i(0)=\beta_i'(0)=0\ \ (i=1,2,3,\ldots).\tag{6}$$

Помимо рекуррентных формул (5), функции $\alpha_i(x),\beta_i(x)$ можно представить в явном виде:

$$\alpha_i(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\ldots\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}dxdxdxdx\ldots dxdx,\tag{7}$$

$$\beta_i(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\ldots\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{1}{A(x)}\int\limits_0^x\int\limits_0^x\frac{x}{A(x)}dxdx\,dxdx\ldots dxdx.\tag{8}$$

Каждая из двух последних формул содержит всего $2i$ интегралов. Заметим, что $\alpha_i(x)\geq 0,\alpha_i'(x)\geq 0,\beta_i(x)\geq 0,\beta_i'(x)\geq 0\ \ (i=1,2,3,\ldots)$, причем равенство нулю достигается, только в точке $x=0$. Это вытекает из неравенства $A(x)>0$ и свойств определенных интегралов.

Поскольку $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, помимо переменной x, зависят еще от параметра P, то в случаях, когда это важно подчеркнуть, будем писать $\Omega_1(x,P)$, $\Omega_2(x,P)$.

Учитывая, что $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ — решения уравнения (2), непосредственной проверкой легко убедиться в том, что каждая из четырех функций $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, x, 1 удовлетворяет уравнению (1). Наряду с уравнением (2), рассмотрим равносильную ему систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dY'}{dx}=R(x)Y,\tag{9}$$

где $Y=\begin{pmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}$, $R(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{P}{A(x)} & 0\end{pmatrix}$ — соответственно вектор неизвестных и матрица коэффициентов системы. Этой системе удовлетворяет матрица $\Omega(x)=\begin{pmatrix}\Omega_1(x) & \Omega_2(x)\\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x)\end{pmatrix}$, в чем легко убедиться подстановкой. Кроме того, на основании формул (3)—(6) заключаем, что $\Omega(0)=\begin{pmatrix}\Omega_1(0) & \Omega_2(0)\\ \Omega_1'(0) & \Omega_2'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Следовательно, матрица $\Omega(x)$ является нормированным решением системы (9). Такое решение системы дифференциальных уравнений называется матрицантом, а его определитель находится по формуле Якоби [7]

$$|\Omega(x)|=|\Omega(0)|e^{\int\limits_0^x Sp\,R(x)dx},$$

где $Sp\,R(x)$ — след матрицы $R(x)$. Учитывая, что в нашем случае $Sp\,R(x)=0$, получаем тождество

$$\Omega_1(x)\Omega_2'(x)-\Omega_2(x)\Omega_1'(x)=1.\tag{10}$$

Тогда, для вронскиана системы функций $\Omega_1(x),\Omega_2(x),x,1$, с учетом (10), будем иметь

$$\begin{vmatrix}\Omega_1(x) & \Omega_2(x) & x & 1\\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x) & 1 & 0\\ \Omega_1''(x) & \Omega_2''(x) & 0 & 0\\ \Omega_1'''(x) & \Omega_2'''(x) & 0 & 0\end{vmatrix}=-\frac{P^2}{A^2(x)}(\Omega_1(x)\Omega_2'(x)-\Omega_2(x)\Omega_1'(x))=-\frac{P^2}{A^2(x)}\neq 0.$$

Известно [8], что из неравенства нулю вронскиана вытекает факт линейной независимости соответствующей системы функций. Следовательно, $\Omega_1(x),\Omega_2(x),x,1$ образуют фундаментальную систему решений уравнения равновесия (1), а значит, его общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1\Omega_1(x) + C_2\Omega_2(x) + C_3 x + C_4, \tag{11}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования.

Случай постоянной жесткости. Протестируем наши формулы для стержня постоянной жесткости. Очевидно, здесь следует положить: $\varphi(x) \equiv 1$, $E = E_0$, $\psi(x) \equiv 1$, $J = J_0$, $A(x) \equiv 1$. Тогда по формулам (3)—(5) будем иметь:

$$\alpha_0(x) = 1,\ \ \alpha_1(x) = \int_0^x\int_0^x dxdx = \frac{x^2}{2!},\ \ \ \alpha_2(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{x^2}{2!}dxdx = \frac{x^4}{4!}, \dots;$$

$$\beta_0(x) = x,\ \ \beta_1(x) = \int_0^x\int_0^x xdxdx = \frac{x^3}{3!},\ \ \beta_2(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{x^3}{3!}dxdx = \frac{x^5}{5!}, \dots;$$

$$\Omega_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}P + \frac{x^4}{4!}P^2 - \dots = \cos\sqrt{P}x,\ \ \ \Omega_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}P + \frac{x^5}{5!}P^2 - \dots = \frac{1}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}x.$$

В результате по формуле (11) получим общеизвестное [2, 4] решение уравнения (1) для данного случая $y(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx + C_3 x + C_4$, где обозначено $k = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$. Заметим также, что формула (10) в этом случае вырождается в основное тригонометрическое тождество.

Решение, выраженное через начальные параметры. В дальнейшем удобно, вместо общего решения в виде (11), использовать решение исходного уравнения (1), выраженное через начальные параметры

$$y(x) = y(0) + \varphi(0)\Omega_2(x) - \frac{M(0)}{N}(1 - \Omega_1(x)) - \frac{Q(0)}{N}(x - \Omega_2(x)), \tag{12}$$

где $y(0), \varphi(0), M(0), Q(0)$ — перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в точке $x = 0$.

Помимо формулы для перемещения, потребуются еще формулы для угла поворота $\varphi(x) = y'(x)$, изгибающего момента $M(x) = -E(x)J(x)\varphi'(x)$ и поперечной силы $Q(x) = M'(x) - Ny'(x)$ [2]. Поэтому непосредственным дифференцированием находим:

$$\varphi(x) = \varphi(0)\Omega_2'(x) + \frac{M(0)}{N}\Omega_1'(x) - \frac{Q(0)}{N}(1 - \Omega_2'(x)), \tag{13}$$

$$M(x) = N\varphi(0)\Omega_2(x) + M(0)\Omega_1(x) + Q(0)\Omega_2(x), \tag{14}$$

$$Q(x) \equiv Q(0). \tag{15}$$

Следует обратить внимание на тот факт, что поперечная сила является постоянной всюду вдоль длины стержня.

Характеристические уравнения и смежные искривленные формы равновесия. Рассмотрим далее все возможные случаи идеальных граничных условий [4]. При этом, как и в работе [1], для критической силы примем форму записи

$$N_{кр} = K\frac{E_0J_0}{l^2}, \tag{16}$$

где K — коэффициент устойчивости [5], подлежащий определению. Соответственно, характеристические уравнения в их окончательном варианте будем записывать для неизвестного K.

Ниже будет показано, что во всех случаях характеристическому уравнению можно придать единый вид

$$\gamma_0(l) - \gamma_1(l)K + \gamma_2(l)K^2 - \gamma_3(l)K^3 + \dots = 0, \tag{17}$$

где $\gamma_i(l)(i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ — строго положительные коэффициенты. Способ вычисления этих коэффициентов будет зависеть от случая граничных условий. При переходе от исходного характеристического уравнения, записанного для параметра P, к равносильному характеристическому уравнению в виде (17), будем использовать формулу

$$P = K/l^2, \tag{18}$$

которая непосредственно вытекает из (16).

Пусть $K_1, K_2, K_3, \dots$ — корни уравнения (17). Если эти корни найдены и записаны в порядке возрастания, то будем иметь коэффициент устойчивости $K = K_1$ и значения продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня

$$N_j = K_j \frac{E_0 J_0}{l^2} (j = 1,2,3,\ldots), \tag{19}$$

причем $N_{кр} = N_1$.

Забегая вперед, определим необходимые числовые последовательности следующими равенствами:

$$\alpha_i(l) = \int_0^l \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{i-1}(x) dx dx, \; \beta_i(l) = \int_0^l \int_0^x \frac{1}{A(x)} \beta_{i-1}(x) dx dx,$$

$$\alpha_i'(l) = \int_0^l \frac{1}{A(x)} \alpha_{i-1}(x) dx, \; \beta_i'(l) = \int_0^l \frac{1}{A(x)} \beta_{i-1}(x) dx \; (i = 1,2,3,\ldots).$$

Заметим, что все эти числа строго положительные: $\alpha_i(l) > 0$, $\beta_i(l) > 0$, $\alpha_i'(l) > 0$, $\beta_i'(l) > 0$.

Случай 1, когда оба конца стержня шарнирно оперты, ранее уже был рассмотрен в работе [1].

Случай 2. Конец $x = 0$ заделан, а конец $x = l$ свободен: $y(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $M(l) = 0$, $Q(l) = 0$. В таком случае из формулы (15), имеем $Q(l) = Q(0) = 0$. Тогда, посредством формулы (14), приходим к характеристическому уравнению $M(l) = M(0)\Omega_1(l) = 0$, или в явном виде

$$1 - \alpha_1(l)P + \alpha_2(l)P^2 - \alpha_3(l)P^3 + \ldots = 0.$$

Замена (18) приводит характеристическое уравнение к виду (17), где

$$\gamma_i(l) = \frac{\alpha_i(l)}{l^{2i}} > 0 \; (i = 0,1,2,3,\ldots).$$

Формула (12) в этом случае запишется так $y(x) = -\frac{M(0)}{N}(1 - \Omega_1(x,P))$. Отсюда заключаем, что для каждого значения N_j, соответствующая ему искривленная форма равновесия стержня дается формулой

$$y_j(x) = -\frac{M(0)}{N_j}(1 - \Omega_1(x, P_j)) = -\frac{M(0)}{E_0 J_0}\left(\alpha_1(x) - P_j \alpha_2(x) + P_j^2 \alpha_3(x) - P_j^3 \alpha_4(x) + \ldots\right). \tag{20}$$

Здесь и далее $P_j = \frac{K_j}{l^2} (j = 1,2,3,\ldots)$.

Случай 3. Оба конца стержня заделаны: $y(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $y(l) = 0$, $\varphi(l) = 0$. Реализация заданных условий с помощью формул (12), (13) приводит к системе

$$\begin{cases} (\Omega_1(l) - 1)M(0) + (\Omega_2(l) - l)Q(0) = 0, \\ \Omega_1'(l)M(0) + (\Omega_2'(l) - 1)Q(0) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Раскрывая определитель этой системы, и учитывая тождество (10), получим характеристическое уравнение $2 - \Omega_1(l) - \Omega_2'(l) + l\Omega_1'(l) = 0$, или в явном виде

$$-\left(l\alpha_1'(l) - \alpha_1(l) - \beta_1'(l)\right)P + \left(l\alpha_2'(l) - \alpha_2(l) - \beta_2'(l)\right)P^2 - \left(l\alpha_3'(l) - \alpha_3(l) - \beta_3'(l)\right)P^3 + \ldots = 0.$$

Покажем, что $l\alpha_1'(l) - \alpha_1(l) - \beta_1'(l) = 0$ и $l\alpha_i'(l) - \alpha_i(l) - \beta_i'(l) > 0$ $(i = 2,3,4,\ldots)$. Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\alpha_i(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{i-1}(x) dx dx = x\alpha_i'(x) - \int_0^x \frac{x}{A(x)} \alpha_{i-1}(x) dx. \tag{22}$$

Тогда

$$x\alpha_i'(x) - \alpha_i(x) - \beta_i'(x) = \int_0^x \frac{x\alpha_{i-1}(x) - \beta_{i-1}(x)}{A(x)} dx \; (i = 1,2,3,\ldots), \tag{23}$$

причем, поскольку $x\alpha_0(x) - \beta_0(x) \equiv 0$, то приходим к тождеству $x\alpha_1'(x) - \alpha_1(x) - \beta_1'(x) \equiv 0$.

Можно привести другое доказательство полученного тождества. Если выражение $\Omega_1(x)\Omega_2'(x) - \Omega_2(x)\Omega_1'(x)$ представить в явном виде, то на основании (10), все коэффициенты при степенях P обязаны тождественно равняться нулю. При этом коэффициент при первой степени P как раз будет равен $x\alpha_1'(x) - \alpha_1(x) - \beta_1'(x)$.

Итак, в частности получаем $l\alpha_1'(l) - \alpha_1(l) - \beta_1'(l) = 0$.

Далее из (22) будем иметь $x\alpha_i'(x) - \alpha_i(x) = (x\alpha_i(x))' - 2\alpha_i(x) = \int_0^x \frac{x}{A(x)} \alpha_{i-1}(x) dx$. Следовательно,

$$x\alpha_i(x) = 2\int_0^x \alpha_i(x)dx + \int_0^x\int_0^x \frac{x}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)dxdx,$$

$$x\alpha_i(x)-\beta_i(x) = 2\int_0^x \alpha_i(x)dx + \int_0^x\int_0^x \frac{x\alpha_{i-1}(x)-\beta_{i-1}(x)}{A(x)}dxdx \ (i=1,2,3,\dots). \tag{24}$$

Отсюда находим, что $x\alpha_1(x)-\beta_1(x) = 2\int_0^x \alpha_1(x)dx \geq 0$. Затем, на основании формулы (24), последовательно шаг за шагом заключаем, что $x\alpha_i(x)-\beta_i(x) \geq 0$ $(i=2,3,4,\dots)$, так как всякий раз для подинтегрального выражения будет справедливо неравенство $x\alpha_{i-1}(x)-\beta_{i-1}(x) \geq 0$, полученное на предыдущем шаге. Тогда на основании (23) получаем, что

$$l\alpha_i'(l)-\alpha_i(l)-\beta_i'(l) = \int_0^l \frac{x\alpha_{i-1}(x)-\beta_{i-1}(x)}{A(x)}dx > 0 \ (i=2,3,4,\dots).$$

В итоге характеристическое уравнение перепишется следующим образом

$$\left(l\alpha_2'(l)-\alpha_2(l)-\beta_2'(l)\right)P^2-\left(l\alpha_3'(l)-\alpha_3(l)-\beta_3'(l)\right)P^3+\left(l\alpha_4'(l)-\alpha_4(l)-\beta_4'(l)\right)P^4-\dots=0.$$

Осуществив замену (18) и сокращая на величину K^2, приведем его к виду (17), где

$$\gamma_i(l) = \frac{l\alpha'_{i+2}(l)-\alpha_{i+2}(l)-\beta'_{i+2}(l)}{l^{2i+4}} > 0 \ (i=0,1,2,3,\dots).$$

Формулу (12) в данном случае можно записать так $y(x) = -\frac{M(0)}{N}\left(1-\Omega_1(x,P)+\eta(x-\Omega_2(x,P))\right)$, где $\eta = \frac{Q(0)}{M(0)}$. При этом из системы (21) вытекает формула $\eta = -\frac{1-\Omega_1(l,P)}{l-\Omega_2(l,P)} = \frac{\Omega_1'(l,P)}{1-\Omega_2'(l,P)}$. В итоге для искривленных форм равновесия стержня, соответствующих значению N_j, получим

$$y_j(x) = -\frac{M(0)}{N_j}\left(1-\Omega_1(x,P_j)+\eta_j(x-\Omega_2(x,P_j))\right) =$$

$$= -\frac{M(0)}{E_0 J_0}\left((\alpha_1(x)+\eta_j\beta_1(x))-P_j(\alpha_2(x)+\eta_j\beta_2(x))+P_j^2(\alpha_3(x)+\eta_j\beta_3(x))-\dots\right)(j=1,2,3,\dots).$$

Случай 4. Конец $x=0$ заделан, а конец $x=l$ шарнирно оперт: $y(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $y(l)=0$, $M(l)=0$. Реализация заданных здесь граничных условий, посредством формул (12), (14), приводит к системе двух линейных уравнений. После элементарных преобразований эта система запишется так

$$\begin{cases} M(0)+lQ(0)=0, \\ \Omega_1(l)M(0)+\Omega_2(l)Q(0)=0. \end{cases}$$

Условие разрешимости системы дает характеристическое уравнение $\Omega_1(l)-\frac{1}{l}\Omega_2(l)=0$, или в явном виде

$$-\left(\alpha_1(l)-\frac{\beta_1(l)}{l}\right)P+\left(\alpha_2(l)-\frac{\beta_2(l)}{l}\right)P^2-\left(\alpha_3(l)-\frac{\beta_3(l)}{l}\right)P^3+\dots=0.$$

Если воспользоваться представлениями (7), (8), то получим

$$\alpha_i(l)-\frac{\beta_i(l)}{l} = \int_0^l\int_0^x \frac{1}{A(x)}\dots\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\left(1-\frac{x}{l}\right)dxdxdxdx\dots dxdx \ (i=1,2,3,\dots).$$

Подинтегральное выражение $1-\frac{x}{l}$ неотрицательно везде на отрезке $[0,l]$, а значит $\alpha_i(l)-\frac{\beta_i(l)}{l}>0$. После замены (18) и сокращения на величину $-K$, полученное здесь уравнение сводится к виду (17), где

$$\gamma_i(l) = \left(\alpha_{i+1}(l)-\frac{\beta_{i+1}(l)}{l}\right)\frac{1}{l^{2i+2}} > 0 \ (i=0,1,2,3,\dots).$$

Для данного случая формула (12) запишется так $y(x) = -\frac{M(0)}{N}\left(1-\Omega_1(x,P)-\frac{1}{l}(x-\Omega_2(x,P))\right)$. Поэтому формула для искривленных форм равновесия стержня, соответствующих значению N_j, имеет вид

$$\alpha_i(x) = x^{2i}\sum_{j=0}^{is} c_{ij}^{(1)} x^j,\ \beta_i(x) = x^{2i+1}\sum_{j=0}^{is} c_{ij}^{(2)} x^j, \tag{25}$$

$$\alpha_i'(x) = x^{2i-1}\sum_{j=0}^{is} e_{ij}^{(1)} x^j,\ \beta_i'(x) = x^{2i}\sum_{j=0}^{is} e_{ij}^{(2)} x^j \ (i=0,1,2,\ldots).$$

При этом коэффициенты $c_{ij}^{(p)}, e_{ij}^{(p)} (p=1,2)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$c_{ij}^{(p)} = \frac{d_{i-1,j}^{(p)}}{(2i+p-2+j)(2i+p-1+j)},\ e_{ij}^{(p)} = \frac{d_{i-1,j}^{(p)}}{(2i+p-2+j)} \ (i=1,2,3,\ldots)\ (j=0,1,\ldots,is),$$

где $d_{i-1,j}^{(p)} = \sum_{k=0}^{j} b_k c_{i-1,j-k}^{(p)}$, причем $c_{00}^{(p)} = 1$, $b_k = 0$, если $k > s$ и $c_{i-1,j-k}^{(p)} = 0$, если $j-k > (i-1)s$. Полезно также иметь в виду равенство $e_{ij}^{(p)} = (2i+p-1+j)c_{ij}^{(p)}$.

Случай	$\gamma_i(l)\ (i=0,1,2,\ldots,n+2)$
1	$\sum_{j=0}^{is} c_{ij}^{(2)} l^j$
2	$\sum_{j=0}^{is} c_{ij}^{(1)} l^j$
3	$\sum_{j=0}^{(i+2)s}\left(e_{i+2,j}^{(1)} - c_{i+2,j}^{(1)} - c_{i+2,j}^{(2)}\right) l^j$
4	$\sum_{j=0}^{(i+1)s}\left(c_{i+1,j}^{(1)} - c_{i+1,j}^{(2)}\right) l^j$
5	$\sum_{j=0}^{(i+1)s} e_{i+1,j}^{(1)} l^j$
6	$\sum_{j=0}^{is} e_{ij}^{(2)} l^j$

Теперь легко выписать итоговые формулы для вычисления коэффициентов $\gamma_i(l)(i=0,1,2,\ldots,n+2)$. Эти формулы приведены в таблице. Поскольку процедура вычисления корней многочленов не может вызывать принципиальных затруднений, то корни $K_1, K_2, K_3, \ldots K_m (m \le n)$ уравнения (17) можно считать известными. Тогда, согласно формуле (19), получим соответствующие значения критических сил $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_m$.

Таким образом, в общем случае задача отыскания критических сил в вычислительном смысле свелась к аппроксимации функции, вычислению рекуррентных соотношений, вычислению квадратур (таблица) и отысканию корней многочленов. Пошаговый алгоритм сформулирован в [1].

При необходимости численной реализации формул для искривленных форм равновесия стержня, их также можно заменить приближенными, удерживая в них некоторое конечное число первых членов ряда и пренебрегая остальными. Обоснования такому подходу аналогичны тем, что приведены в [1] для первого случая граничных условий. Для вычислений при этом следует использовать квадратуры (25).

Выводы

Завершено начатое в [1] исследование задачи устойчивости равновесия для упругого неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения. Проинтегрировано дифференциальное уравнение равновесия четвертого порядка. Для пяти случаев идеальных граничных условий, выписаны в явном аналитическом виде характеристические уравнения и формулы для искривленных форм равновесия стержня. Установлено, что все характеристические уравнения одинаковы по своей природе и допускают единую форму записи. Благодаря этому возможен общий для всех случаев численный метод отыскания критических сил.

Для всех рассмотренных здесь случаев остаются в силе сформулированные в первоначальной работе преимущества изложенного подхода.

Главным совокупным итогом двух публикаций является то, что предложен метод решения задачи устойчивости равновесия сжато-изогнутого стержня, применимый для любой непрерывной поперечной жесткости и при любых идеальных граничных условиях.

Литература

1. *Крутий Ю.С.* Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. № 6, 2010. С. 22–29.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М. : Машиностроение, 1978. – 312 с.
3. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 544 с.
4. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. – М. : Издательство СКАД СОФТ, 2007. – 670 с.
5. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. Кручение. – М. : Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
6. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
8. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1985. – 448 с.