

МАТРИЦА УПРУГОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Кукунаев В.С., д.т.н., с.н.с.,
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
НИИ «КрымНИИПроект» (структурное подразделение)
research1970@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается методика учета влияния поперечного сдвига на прогибы стержней, изгибаемых по линейному закону, при статическом нагружении. Вопрос определения их прогибов от поперечной нагрузки не является тривиальным. Так, в работе [1] было показано, что кривизна упругой линии прогиба (w''_{xx}) не пропорциональна в точности изгибающему моменту. Кроме этого С.П.Тимошенко [2] предложил в балках кроме прогиба, обусловленного изгибом, ввести величину прогиба, являющегося следствием поперечного сдвига от действия поперечной силы Q . Цель работы: использование аналогичных зависимостей в методе конечных элементов (МКЭ), в матричной форме, учитывающих влияние изгибающего момента и поперечной силы на прогибы. Методика рассматривает условия равновесия силовых факторов в наклонном сечении. Результаты: получены условия симметричности матрицы упругости в терминологии использования МКЭ.

Ключевые слова: прогибы, изгиб, поперечный сдвиг, матрица упругости, метод конечных элементов.

МАТРИЦЯ ПРУЖНОСТІ ПРИ ВИГІНІ СТЕРЖНІВ З УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Кукунаєв В.С., д.т.н., с.н.с.,
Кримський федеральний університет ім. В.І. Вернадського
НДІ «КримНДІПроект» (структурний підрозділ)
research1970@yandex.ru

Анотація. Розглядається методика врахування впливу поперечного зсуву на прогини стержнів, що згинаються за лінійним законом, при статичному навантаженні. Питання визначення їх прогинів від поперечного навантаження не є тривіальним. Так, в роботі [1] було показано, що кривизна пружної лінії прогину (w''_{xx}) не є в точності пропорційною згинальному моменту. Крім цього Тимошенко С.П. [2] запропонував в балках крім прогину, обумовленого вигином, ввести величину прогину, що є наслідком поперечного зсуву від дії поперечної сили Q . Мета роботи: використання аналогічних залежностей в методі кінцевих елементів (МКЕ), які враховують вплив згинального моменту і поперечної сили на прогини. Методика розглядає умови рівноваги силових факторів в похилому перерізі. Результати: отримані умови симетрії матриці пружності в термінології при використанні МКЕ.

Ключові слова: прогини, вигин, поперечний зсув, матрица пружності, метод кінцевих елементів.

ELASTICITY MATRIX IN BENDING RODS WITH ALLOWANCE FOR TRANSVERSE SHEAR

Kukunaev V.S., Doctor of Engineering, senior fellow,

Abstract. Consideration is given to the procedure of accounting for the effect of transverse shear on deflections in linearly bent rods under static loading. The question of determining their deflections from the transverse load is not trivial. Thus, in the paper [1] the curvature of the elastic line of deflection (w''_{xx}) was shown not to be exactly proportional to the bending moment. In addition, S.P. Timoshenko [2] proposed to introduce in beams, in addition to the deflection caused by bending, a value of deflection which is a consequence of transverse shear caused by transverse force Q .

Justification of the need to clarify the value of such deflection, according to him, involved many factors the problem of whose influence on structural reliability for construction practice has not been solved yet. He solved many problems of accounting for the influence on the structural material strength of, e.g, local stresses caused by holes, notches, recesses, abrupt changes in cross-sections, etc. [3]. The approach of a separate determination of bending deflection and of beam transverse shear proposed by him revealed a significant effect of shear depending on their cross section depth. Prof. B.N. Zhemochkin also pointed to a similar effect in his textbook on the theory of elasticity [4]. In his calculation of freely supported and distributed load wall beam, at a beam height to length ratio of 1: 2 normal stresses from transverse shear exceeded similar stresses caused by bending by 6.7%. Thus, for the purposes of using similar dependencies in the finite element method in matrix form, the need arose for a more justifiable obtaining of elasticity matrix that would take into account the effect of the bending moment and lateral force on deflections. The methodology considers the conditions of the force factors equilibrium in an inclined section and the conditions of elasticity matrix symmetry when using the FEM.

Key words: deflections, bending, transverse shear, elasticity matrix, finite elements method.

Введение. Рассматривается балка с пролетом l , нагруженная непрерывно распределенной нагрузкой q , то есть $Q = Q(x)$. При этом согласно предложению С.П. Тимошенко [2] кривизну изгиба балки, обусловленной только сдвигом, можно представить в виде [3, 5]:

$$\frac{d^2 w_{sh}}{dx^2} = \frac{\omega}{GA} \frac{dQ}{dx} = -\frac{\omega \cdot q}{GA}, \quad (1)$$

где: ω – коэффициент полноты эпюры касательных напряжений; $G \approx 0,4E$ – модуль сдвига, а полный прогиб w – в виде суммы прогиба w_{ben} от изгиба и прогиба w_{sh} от сдвига:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_{ben}}{dx^2} + \frac{d^2 w_{sh}}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{\omega \cdot q}{GA}. \quad (2)$$

Для сечения, расположенного в середине пролета величина прогиба может быть определена по формуле:

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \left[1 + 2\omega \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где: h – высота поперечного сечения балки; EI – изгибная жесткость, что показывает влияние относительной высоты сечения на полное значение прогиба в рассмотренной задаче.

При этом следует также отметить, что как было указано в [1], предложения по учету влияния поперечной силы на кривизну кривой прогибов были даны еще в работах Ренкина и Грасхофа [1], которые сводились к дополнительному учету производной от деформации сдвига на уровне нейтральной оси балки.

Цели и задачи. Целью настоящей статьи является обоснование зависимостей для определения прогибов в упругих балках, как от изгибающих моментов, так и от поперечных

сил, а также условий их взаимовлияния.

Результаты исследований. Для использования в инженерных расчетах строительных конструкций при помощи компьютерных программ предлагается матричное соотношение:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где: $B_{i,j} (i, j = 1 \div 3)$ – коэффициенты матрицы податливостей: $B_{11} = (EI)^{-1}$, $B_{22} = (EA)^{-1}$, $B_{33} = 3(1 + \mu)/EA$, $B_{13} = B_{31} = 2\omega(1 + \mu)/EA$; (5)

E – модуль упругости; μ – коэффициент поперечной деформации Пуассона; ε, χ и γ – соответственно продольные относительные деформации, кривизна при изгибе и угол сдвига.

Как видно из матрицы (4) принимается равенство элементов B_{23} и B_{32} , что соответствует необходимости использования приведенных соотношений при расчете конструкций, основанном на методе конечных элементов (МКЭ).

Рассмотрим равновесие балочного элемента, расчетная схема которого показана на рис. 1а. На данной схеме σ_c, σ_n – нормальные напряжения в сжатой и растянутой зонах наклонного сечения, ориентированного под углом β относительно вертикальной оси z , а усилия M, N и Q – изгибающий момент, нормальное усилие и поперечная сила в нормальном сечении элемента. Форма эпюры нормальных напряжений показывает, что в данном случае рассматривается стадия при пропорциональной зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ в пределах закона Гука. При этом принимается, что сжатая зона ограничивается нейтральной линией, а для определения сдвигающей силы на границе сжатой и растянутой зон необходимо рассмотреть равновесие сжатой зоны [6], показанной на рис. 1б, откуда при:

$$\left. \begin{aligned} Q_c z_c \operatorname{tg} \beta - \frac{2}{3} N_{nz} x &= 0, \\ Q_c - N_{c,ml} \cos \beta - N_{c,l} \sin \beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

получаем, что $N_{nz} = \frac{Q_c z_c \operatorname{tg} \beta}{\frac{2}{3} x} = \frac{3}{2} (N_{c,ml} \cos \beta + N_{c,l} \sin \beta) \frac{z_0}{x} \operatorname{tg} \beta$,

а также при $\frac{z_c}{x} = \frac{2}{3}$, $N_{nz} = \frac{2Q_c \operatorname{tg} \beta}{\frac{2}{3} \cdot 3} = Q_c \operatorname{tg} \beta = (N_{c,ml} \cos \beta + N_{c,l} \sin \beta) \operatorname{tg} \beta$. (7)

При этом если принять $\beta = 0$, то сдвигающее усилие N_{nz} будет равно 0, что соответствует случаю поперечных сечений. Прежде чем перейти к рассмотрению условий равновесия остановимся на определении коэффициенте φ_Q . Следуя основным принципам МКЭ, принимаем высоту сжатой части сечения в виде обозначения через x , угол наклона сечения β и поперечную силу Q в пределах КЭ величинами постоянными. Из элемента, показанного на рис. 1, выделим двумя параллельными плоскостями малый элемент, схема которого представлена на рис. 2а.

Из рассмотрения рис. 2а очевидно, что $dN_c = dN_n$ и сумма моментов всех сил относительно точки O_1 , расположенной на уровне центра тяжести эпюры сжатой части сечения:

$$Q \varphi_Q dn + Q(1 - \varphi_Q)(z_c \operatorname{tg} \beta + 0,5dn) + Q(1 - \varphi_Q)(dn - z_c \operatorname{tg} \beta) - dN_n(z_n + z_c) = 0,$$

откуда $dN_n = Q \frac{dn}{z}$. (8)

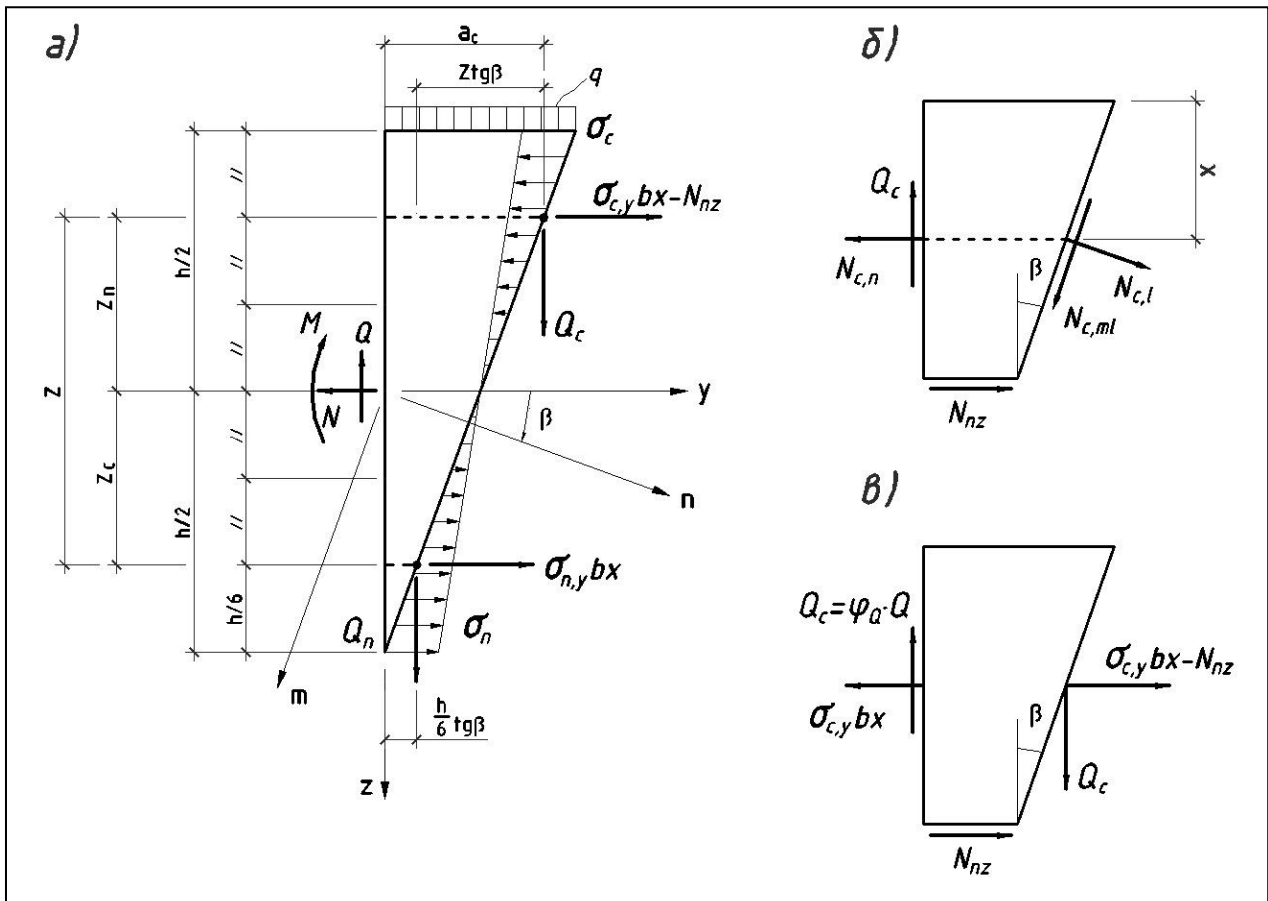


Рис. 1. Расчетная схема элемента:
 а – схема усилий и напряжений в элементе; б – схема равновесия усилий в элементе;
 в – схема определения касательных сил N_{nz}

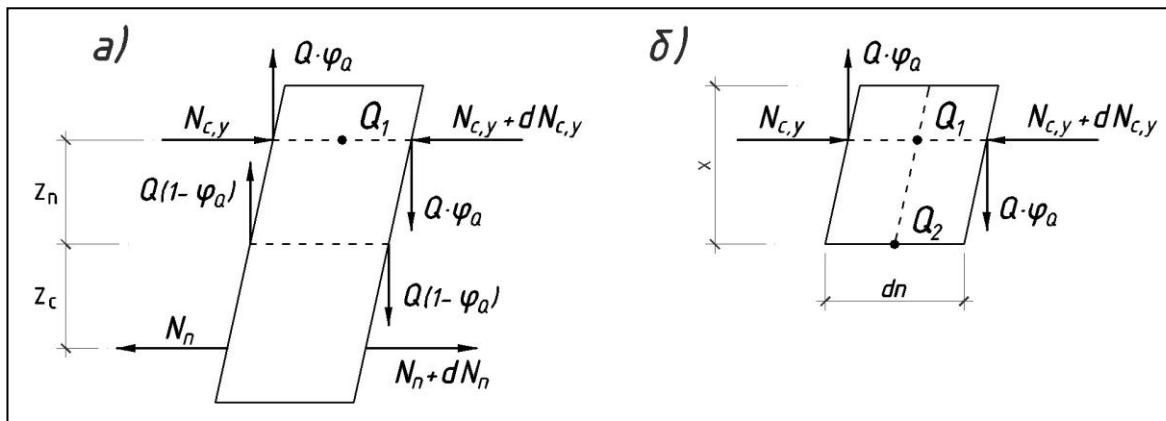


Рис. 2. Схема определения коэффициента φ_Q :
 а – схема равновесия сил в наклонной призме; б – схема равновесия сил в сжатой зоне

Теперь выделив отдельно элемент сжатой части и рассматривая его равновесие относительно точки O_2 , получим выражение:

$$dN_c = \frac{3}{h} Q \varphi_Q dn,$$

в котором, учитывая (7) получим формулу для искомого коэффициента:

$$\varphi_Q = \frac{dN_c}{3Q \frac{dn}{h}} = \frac{h}{3z} = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, сдвигающее усилие на уровне нейтральной линии может быть определено как:

$$N_{nz} = 0,5Q \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (10)$$

Составим теперь уравнения равновесия моментов всех сил относительно центра тяжести сжатой и растянутой зон:

1. Сумма моментов относительно центра тяжести сжатой зоны:

$$M + N \cdot z_c + Q \cdot a_c - Q_n z \cdot \operatorname{tg} \beta - \omega \sigma_{n,y} b x z = 0, \\ \text{или } M + N \cdot z_c + Q \cdot a_c = \omega \sigma_{n,y} b x z + Q_n z \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (11)$$

2. То же, относительно центра тяжести растянутой зоны:

$$M - N \cdot z_c + Q \frac{h}{6} \operatorname{tg} \beta + Q_c z \cdot \operatorname{tg} \beta + (\omega \sigma_{c,y} b x - N_{nz}) z = 0 \\ \text{или } M - N \cdot z_n + Q \frac{h}{6} \operatorname{tg} \beta = -\omega \sigma_{c,y} b x z. \quad (12)$$

3. Сумма проекций всех сил на ось z :

$$Q = Q_c + Q_n. \quad (13)$$

Здесь принимается, что воспринимаемые величины поперечной силы как сжатой, так и растянутой – одинаковы (для упрощения дальнейших рассуждений), а нормальные напряжения вводятся в уравнения с коэффициентом полноты эпюры нормальных напряжений $\omega = 0,5$.

Разрешая (11) - (13) относительно $\sigma_{c,y}$ и $\sigma_{n,y}$ получим:

$$\sigma_{c,y} = -\frac{M - N \cdot z_n + Q \cdot z_0 \cdot \operatorname{tg} \beta}{\omega \cdot b \cdot x \cdot z}, \quad (14)$$

$$\sigma_{n,y} = \frac{\lambda_n}{\omega \cdot b \cdot x \cdot z} (M + N \cdot z_c + Q \cdot z \cdot \operatorname{tg} \beta), \quad (15)$$

где: $\frac{1}{\lambda_n} = 1 + \frac{Q \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sigma_{n,y} b x}$, $z_0 = h/6$ – обобщенный параметр; рассматривается как плечо к

Q , учитывающее влияние горизонтальной и вертикальной составляющих поперечной силы (N_{nz} и Q_c) на нормальные напряжения.

Относительные деформации срединной оси будем определять согласно [6]:

$$\varepsilon_{n,y} = \sigma_{n,y} / E, \quad \varepsilon_{c,y} = \sigma_{c,y} / E, \quad \varepsilon_{m,y} = \frac{\varepsilon_{n,y} z_c + \varepsilon_{c,y} z_n}{z}, \quad (16)$$

$$\text{а также упругой линии оси балки } - \frac{1}{r_{m,y}} = \frac{\varepsilon_{n,y} - \varepsilon_{c,y}}{z}. \quad (17)$$

Для определения сдвиговой деформации используем известное в теории упругости соотношение:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_z \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta - \gamma_{yz} \sin \beta \cos \beta,$$

$$\text{из которого получаем, что } \gamma_{yz} = \varepsilon_{m,y} \operatorname{tg} \beta + \varepsilon_z \operatorname{ctg} \beta - \frac{\varepsilon_t}{\sin \beta \cos \beta}, \quad (18)$$

где: $\varepsilon_{m,y}$ – средние деформации срединной оси вдоль оси y ; ε_z – деформации элемента в направлении оси z , которыми обычно пренебрегают; ε_t – деформации элемента в направлении оси t (в нашем случае оси m).

Они связаны, например, в железобетонных конструкциях с деформативностью областей бетона, свободных от трещин.

Считая в выражении (15) $\varepsilon_z = \varepsilon_t = 0$, получим:

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{m,y} \operatorname{tg} \beta . \quad (19)$$

Однако эти деформации будем определять согласно ниже следующих зависимостей в несколько модифицированном виде. Подставляя (14) и (15) в (16) и (19) получим следующие выражения для кривизны и деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{m,y}} &= \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_c}{z} = \frac{1}{E \cdot z} \frac{\lambda_n}{\omega b x z} (M + N \cdot z_c + Q \cdot z \cdot \operatorname{tg} \beta) - \frac{1}{E \cdot z} \left[-\frac{1}{\omega b x z} (M - N \cdot z_n + Q \cdot z_0 \operatorname{tg} \beta) \right] = \\ &= \frac{1}{E \omega b x z^2} [M(\lambda_n + 1) + N(\lambda_n z_c - z_n) + Q(\lambda_n z + z_0) \operatorname{tg} \beta], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m,y} &= \frac{\varepsilon_n z_c + \varepsilon_c z_n}{z} = \frac{z_c}{E \cdot z} \frac{\lambda_n}{\omega b x z} (M + N \cdot z_c + Q \cdot z \cdot \operatorname{tg} \beta) - \frac{z_n}{E \cdot n} \frac{1}{\omega b x z} (M - N \cdot z_n + Q \cdot z_0 \cdot \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \frac{1}{E \omega b x z^2} [M(\lambda_n z_c - z_n) + N(\lambda_n z_c^2 + z_n^2) + Q(\lambda_n z_c z - z_n z_0) \operatorname{tg} \beta], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nz} &= (\varepsilon_{n,y} - \frac{z_0}{z} \varepsilon_{c,y}) \operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda_n}{E \cdot z} \frac{1}{\omega b x} (M + N \cdot z_c + Q \cdot z \cdot \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \beta + \\ &+ \frac{z_0}{E \cdot z} \frac{1}{\omega b x z} (M - N \cdot z_n + Q \cdot z_0 \cdot \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{E \omega b x z^2} [M(\lambda_n z + z_0) \operatorname{tg} \beta + N(\lambda_n z_c z - z_0 z_n) \operatorname{tg} \beta + \\ &+ Q(\lambda_n z^2 + z_0^2) \operatorname{tg}^2 \beta] \end{aligned} \quad (22)$$

или в табличной форме (табл. 1).

Таблица 1 – Выражения для коэффициентов податливости элемента

Деформации	Коэффициенты при усилиях		
	M	N	Q
$\frac{1}{r_{m,y}}$	$\frac{\lambda_n}{E \omega b x z^2} + \frac{1}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n z_c}{E \omega b x z^2} + \frac{z_n}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n \cdot \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z} + \frac{z_0 \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z^2}$
$\varepsilon_{m,y}$	$\frac{\lambda_n z_c}{E \omega b x z^2} - \frac{z_n}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n z_c^2}{E \omega b x^2} + \frac{z_n^2}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n z_c \cdot \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z} + \frac{z_n z_0 \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z^2}$
γ_{nz}	$\frac{\lambda_n \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z} + \frac{z_0 \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n z_c \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z} - \frac{z_0 z_n \operatorname{tg} \beta}{E \omega b x z^2}$	$\frac{\lambda_n \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{E \omega b x} + \frac{z_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{E \omega b x z^2}$

Из табл. 1 видно, что коэффициенты податливости – симметричны, что очень важно для использования в МКЭ.

Далее приравнивая величину элемента B_{11} из (4), (5) и табл. 1 получим, что коэффициент λ_n в выражении (15), учитывающий влияние поперечной силы Q на нормальные растягивающие напряжения, будет определяться как: $\lambda_n = \frac{12 \omega x z^2}{h^3} - 1$ и для геометрических параметров: $\omega = 0,5$; $x = 0,5$ и $z = 2h/3$ (рис.1) будет равен $\lambda_n = 0,3$.

Тогда принимая из табл.1 выражение для B_{13} и приравнивая его сдвиговой части выражения (2), предложенного Тимошенко С.П. в монографии [2] для кривизны упругой линии изгиба получим, что:

$$B_{13} = \frac{tg\beta}{E\omega bxz^2}(\lambda_n z + z_0) = \frac{2\omega_\tau(1+\mu)}{E \cdot A \cdot d}, \quad (23)$$

где: d – длина участка распределенной нагрузки из равенства $q = dQ/dx = Q/d$.

Принимая правую часть равенства (23) за основное выражение, получим:

$$\frac{1}{r_{m,y}^{sh}} = B_{13}Q = \frac{\omega_\tau q}{G \cdot A} = \frac{2\omega_\tau(1+\mu)Q}{EAd} \quad (24)$$

$$B_{13} = \frac{2\omega_\tau(1+\mu)}{E \cdot A \cdot d} \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{\lambda_n z + z_0}{z^2} \frac{d \cdot tg\beta}{\omega \cdot \omega_\tau(1+\mu)}, \quad (25)$$

в котором при следующих геометрических и физических параметрах расчетной схемы на рис. 1: $\lambda_n = 1/3$, $z = 2h/3$, $z_0 = h/6$, получим:

$$\bar{\varphi} = \frac{7}{8} \frac{d}{h} \frac{tg\beta}{\omega \cdot \omega_\tau(1+\mu)}. \quad (26)$$

Если выражение для $\bar{\varphi}$ принять равным 1 и учесть, что угол β определяется высотой поперечного сечения h и длиной приложения нагрузки d (рис. 1), то получим что:

$$\left(\frac{d}{h}\right)^2 = \frac{8}{7} \omega \cdot \omega_\tau(1+\mu) \quad (27)$$

для рассматриваемого случая является константой.

Данное выражение определяет соотношение длины участка с распределенной нагрузкой при коэффициенте $\bar{\varphi} = 1$, что соответствует правой части выражения (23). В других случаях, которые могут быть рассмотрены отдельно, допускается использовать общее выражение для коэффициента податливости (25). При этом, длина такого участка может отличаться от принятой в расчетной схеме, и может быть уменьшена до размера, необходимого для представления нагрузки в виде сосредоточенной силы.

Выводы:

1. Показано, что учет влияния изгибающих моментов и поперечных сил на прогибы может быть осуществлен при помощи матрицы податливости.
2. Выполнено расчетно-теоретическое обоснование симметричности матрицы податливости исходя из рассмотрения равновесия сил в наклонном сечении на участке приложения распределенной нагрузки.
3. Полученные зависимости планируется использовать при численно-экспериментальном анализе проектных решений при научно-техническом сопровождении проектирования строящихся зданий и сооружений.

Литература

1. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гурьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Тимошенко С.П. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере // Влияние деформаций сдвига. – разд. 6.11. – М.: «Мир», 1976. – С. 247-254.
3. Тимошенко С.П., Дж. Лессельс. Прикладная теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Лессельс. – М.-Л.: Госуд. науч. техн. Изд-во, 1931. – 392 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости / Б.Н. Жемочкин. – М.: Госуд. изд-во лит-ры по стр-ву и арх-ре, 1957. – 256 с.
5. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов / С.П. Фесик. – «Будівельник», 1970. – С. 111-120.
6. Кукунаев В.С. Механическая модель железобетонных плит различной толщины с трещинами / В.С. Кукунаев // ISBN 978-966-1555-15-9/. – К.: Изд-во «Сталь», 2008. – 177 с.

Стаття надійшла 2.11.2016