УДК 539.3:624.046.3

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Бекшаев С.Я.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
fevs@ogasa.org.ua

Аннотация. Рассматриваются прямолинейные неразрезные стержни, шарнирно опертые по концам и имеющие одну или несколько промежуточных шарнирных опор, сжатые постоянной по длине осевой силой. Устанавливаются некоторые качественные особенности форм потери устойчивости, отвечающих их основным критическим силам: узлы, точки перегиба и ряд других. Рассмотрены также некоторые особенности поведения форм и соответствующих критических сил в зависимости от положения и жесткости внутренних опор. Установлены некоторые условия, при которых формы потери устойчивости являются полуизогнутыми, имеющими прямолинейные участки, и отмечена связь этих форм с задачей повышения устойчивости.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, критическая сила, форма, качественные особенности, полуизогнутая форма.

ДЕЯКІ ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ БАГАТОПРОЛІТНИХ СТРИЖНІВ

Бекшаєв С.Я.
Одеська державна академія будівництва та архітектури
fevs@ogasa.org.ua

Анотація. Розглядаються прямолінійні нерозрізні стрижні, шарнірно оперті по кінцях, які мають одну або декілька проміжних шарнірних опор, стиснуті постійною по довжині осьовою силою. Встановлюються деякі якісні особливості форм втрати стійкості, що відповідають їхнім основним критичним силам: вузли, точки перегину та ряд інших. Розглянуто також деякі особливості поведінки форм та відповідних критичних сил в залежності від положення і жорсткості внутрішніх опор. Встановлено деякі умови, при яких форми втрати стійкості є напівзігнутими, тобто мають прямолінійні ділянки, та відзначено зв'язок цих форм із задачею підвищення стійкості.

Ключові слова: стрижень, стійкість, критична сила, форма, якісні особливості, напівзігнута форма.

SOME QUESTIONS OF STABILITY OF MULTI-SPAN CONTINUOUS RODS

Bekshaev S.Ya.
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
fevs@ogasa.org.ua

Abstract. The paper is devoted to some problems of stability of straight continuous rods simply supported at the ends and having one or more intermediate rigid or elastic roller supports compressed by axial force constant along the length. Some qualitative features of the buckling modes associated to their main critical forces: nodes, points of inflection, and several others were studied. In addition, some features of the behaviour of the buckling modes and the corresponding critical forces depending on the position and stiffness of intermediate supports were researched. Some conditions under which buckling modes are semi-curved, i.e. include rectilinear fragments are determined, and the relationship of these modes with the problem of improving stability is marked. The study presents the most qualitative results of the theory of elastic rod systems, which determine the effect of setting constraints on the critical forces and corresponding buckling modes. The obtained results can be used to solve problems related to the design and operation of engineering structures containing the compressed elements.

Keywords: rod, stability, critical force, buckling mode, qualitative features, semi-curved mode.

Введение. При решении разнообразных проблем, связанных с проектированием и эксплуатацией инженерных сооружений, содержащих сжатые элементы, приходится принимать во внимание свойства форм потери устойчивости (далее – форм) этих элементов, а также особенности их поведения вместе с соответствующими критическими силами (далее – КрС) при изменениях параметров этих сооружений.

Существует обширная литература, посвященная методам определения КрС и соответствующих форм стержневых систем [1-4]. Однако исследований, связанных с изучением их качественных особенностей и управлением этими характеристиками, среди них относительно немного [2, 5-8]. В то же время, как показали недавние исследования [9-12], решение задач управления и оптимизации стержневых систем, содержащих сжатые элементы, тесно связано с изучением и использованием качественных особенностей форм потери устойчивости этих элементов. Недооценка качественных свойств форм и КрС сжатых стержней иногда в конкретных задачах приводит к ошибочным выводам [4, с. 106].

В [5, 6] описаны характерные качественные свойства форм прямых стержней при распространенных условиях опирания. При этом ряд из них удается установить лишь при некоторых ограничениях на характер распределения изгибной жесткости по длине стержня и при условии абсолютной жесткости крайних и промежуточных опор. Работы, в которых систематически качественно исследовались бы задачи устойчивости многопролетных стержней, опертых на промежуточные опоры произвольной жесткости, за исключением задачи Бубнова [2], автору неизвестны. Стоит отметить, что в недавно вышедшей книге [13] задача определения оптимального положения точечной шарнирной опоры решается с учетом вида кривой прогибов, однако рассмотрение ограничивается статическим нагружением и не включает продольных сил и связанных с ними проблем потери устойчивости.

Постановка задачи. Целью исследования является установление некоторых качественных свойств форм и КрС прямолинейного многопролетного стержня как при абсолютной, так и при конечной жесткости промежуточных шарнирных опор. Метод исследования опирается преимущественно на качественные теоремы теории упругих стержневых систем о влиянии наложения связей на их КрС [2]. Объектом исследования является прямолинейный стержень с произвольным распределением изгибной жесткости по длине, сжатый постоянной по длине продольной силой, шарнирно опертый по концам O и L на абсолютно жесткие опоры и имеющий одну (X) или несколько $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ внутренних шарнирных опор, $x = |OX|$, $\ell = |OL|$ – длина стержня.

Результаты исследования. Используем обозначения: (MN) – однопролетный стержень, шарнирно опертый по концам M и N на абсолютно жесткие опоры, $P(MN)$ – его основная КрС, (MXN) – двухпролетный стержень, образованный из (MN) введением промежуточной шарнирной опоры X (рис. 1).

Стержень (OL) Стержень (OXL)

Рис. 1. К пояснению принятых обозначений

1. ***Двухпролетный стержень с абсолютно жесткими опорами***. Обозначим A – узел второй формы однопролетного стержня (OL).

Теорема 1. При потере устойчивости двухпролетного стержня, шарнирно опертого на жесткие опоры:

1) основная форма имеет одну точку перегиба, которая располагается между внутренней опорой и узлом A второй формы однопролетного стержня;

2) основная форма не имеет узлов, кроме опорных;

3) основная КрС простая;

4) основная КрС монотонно убывает при удалении внутренней опоры X от узла A.

Доказательство состоит из следующих шагов.

1.1. Участок стержня, отделяемый внутренней опорой X со стороны, противоположной узлу A, при потере устойчивости по основной форме не имеет точек перегиба и обращен выпуклостью в ту же сторону, что и реакция промежуточной опоры.

Условимся располагаться так, чтобы опора X находилась левее узла A. Если бы существовала точка перегиба между O и X, это означало бы, что форма соответствует одной из КрС стержня, более короткого и потому более устойчивого, чем OA. Это противоречило бы известному результату о невозможности одной связью (какой является X) поднять КрС выше второй в спектре OL, которая является основной для OA.

Пусть участок OX обращен выпуклостью вверх. Если при этом реакция крайней опоры O направлена вверх, ее равнодействующая вместе с продольной силой P имеет наклон вверх. При этом ее линия действия должна пересечь ось стержня в некоторой точке между O и X, которая будет точкой перегиба, т.к. в ней изгибающий момент равен нулю. Поэтому реакция опоры O направлена вниз. Как следует из условий равновесия (правило трех сил), реакция внутренней опоры направлена вверх (в сторону выпуклости участка OX), а крайней опоры L – вниз.

Если бы форма имела на опоре X нулевой наклон, она имела бы точку перегиба слева от X. Отсюда следует, что ось формы на опоре X наклонена по часовой стрелке при реакции этой опоры, направленной вверх, и на участке XL находится точка перегиба формы, в которой равнодействующая реакции опоры L и продольной силы пересекает ось стержня. Эта точка единственна, т.к. иначе форма отвечала бы второй КрС стержня, более короткого и более устойчивого, чем XL, и тем более чем OL. Эта точка лежит между опорой X и узлом A второй формы стержня AL, т.к. иначе форма отвечала бы КрС стержня, более короткого и более устойчивого, чем AL.

1.2. Если бы форма имела узел между O и X, это противоречило бы отсутствию точек перегиба, установленному выше.

Справа от X форма не имеет узлов, иначе она пересекалась бы равнодействующей реакции опоры L и продольной силы как минимум в двух точках, которые являлись бы точками перегиба.

1.3. Рассматриваемая КрС является простой, т.к. иначе из двух линейно независимых форм можно было бы составить линейную комбинацию с нулевым наклоном на опоре. Невозможность такой формы установлена выше.

1.4. Из сказанного в п.п. 1.1 и 1.2 следует, что при расположении внутренней опоры всюду, кроме узла A второй формы стержня (OL), выполнены неравенства [7, 8]:

$$\partial/\partial x(\text{КрС}) = R(x)\cdot\theta(x) \begin{cases} >0, \text{ если } X \text{ левее } A, \\ <0, \text{ если } X \text{ правее } A. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $R(x)$ – реакция внутренней опоры, положительная при действии вверх, $\theta(x)$ – угол наклона формы на внутренней опоре, положительный при наклоне по часовой стрелке.

Это позволяет сделать вывод о том, что основная КрС стержня (OXL) имеет максимум, равный второй КрС стержня (OL), при установке внутренней опоры в узел A отвечающей ей формы и монотонно убывает при удалении опоры от этого узла в обе стороны. Теорема доказана.

2. ***Стержень с*** n ***абсолютно жесткими внутренними опорами.***

Теорема 2. При потере устойчивости многопролетного стержня, шарнирно опертого на жесткие опоры:

1) основная КрС простая;

2) ни на одной из опор, включая крайние, наклон основной формы не равен нулю;

3) основная форма не имеет узлов, кроме опорных.

2.1. Если бы основная КрС была кратной, то, как и в 1.3, можно было бы образовать форму с нулевым наклоном на крайней шарнирной опоре L. В сочетании с нулевым прогибом на последней из внутренних опор X_n это означало бы, что участок X_nL имеет не менее двух точек перегиба. Из этого следует, что основная КрС всего $(n+1)$-пролетного стержня равна второй КрС стержня, более короткого, чем X_nL. В то же время жесткая заделка на опоре X_n, полностью отделяющая участок X_nL, увеличит КрС $(n+1)$-пролетного стержня не выше КрС изолированного участка X_nL, жестко заделанного на опоре X_n и шарнирно опертого в L. Как следует из 1.4, эта КрС является результатом монотонного уменьшения КрС двухпролетного стержня, шарнирно опертого на концах X_n и L и на внутренний шарнир между X_n и L. Таким образом, КрС $(n+1)$-пролетного стержня ограничена сверху второй КрС стержня (X_nL), меньшей второй КрС более короткого стержня.

2.2. Если бы на какой-либо внутренней опоре ось формы имела нулевой наклон, жесткое защемление на этой опоре не исказило бы форму и не изменило бы КрС. В то же время введение такого защемления приводит к кратности этой КрС, т.к. ей отвечают две независимые формы, каждая из которых остается недеформированной по одну сторону от опоры. При этом вторая КрС усиленного стержня равна первой, тогда как до усиления она была больше первой, т.к. согласно 2.1 до введения заделки основная КрС была простой.

Невозможность отсутствия поворота на крайних опорах установлена в 2.1.

2.3. Основная форма не может иметь узлов вне опор по следующим причинам. Известно, что однопролетный шарнирно опертый на жесткие опоры стержень имеет простой спектр КрС, которым отвечают формы с числом узлов (точек с нулевым поперечным смещением), на единицу меньшим номера КрС в спектре. Известно также, что существует такое расположение n внутренних жестких шарнирных опор, которому отвечает основная форма, не имеющая узлов вне этих опор. Таким положением является, например, набор n узлов $(n+1)$-й формы, которая после установки опор в этих узлах становится основной. Допустим, что при некотором положении n внутренних жестких шарнирных опор основная форма имеет один либо несколько узлов не на опорах. Непрерывное перемещение опор к существующему «безузловому» положению, приведет к непрерывному изменению основной формы, сопровождающемуся непрерывным перемещением внеопорных узлов, количество которых может уменьшиться только за счет их слияния либо совмещения с опорами. В любом из этих случаев наступит такое положение, в котором точка формы с нулевым прогибом будет иметь нулевой наклон. Устанавливая, если нужно, в эту точку еще одну опору, придем к форме с нулевым наклоном на опоре, которая, как установлено в 2.2, не может быть основной.

3. ***Двухпролетный стержень с одной упругой внутренней опорой***. Качественные особенности формы зависят от значения жесткости внутренней опоры. Определим критическое значение $c_{\text{КР}} = c_{\text{КР}}(x)$ коэффициента жесткости упругой шарнирной опоры, помещенной в точке с координатой x, равенством:

$$c_{\text{КР}} = c_{\text{КР}}(x) = \frac{P(XL)\cdot \ell}{x(\ell - x)}. \tag{2}$$

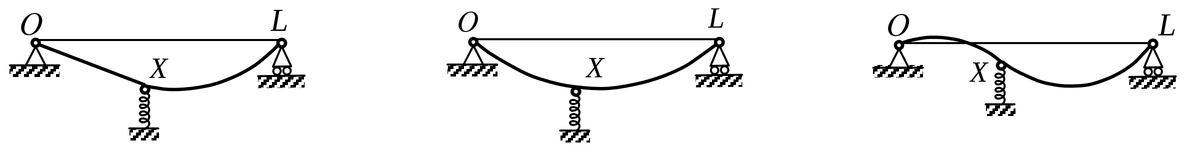
Теорема 3. При потере устойчивости двухпролетного стержня с упругой промежуточной опорой:

1) при $c = c_{\text{КР}}$ основная форма не имеет узлов и является полуизогнутой, т.е. имеет прямолинейный участок по одну сторону от внутренней опоры;

2) при $c < c_{\text{КР}}$ основная форма не имеет узлов и точек перегиба;

3) при $c > c_{\text{КР}}$ основная форма имеет ровно одну точку перегиба, которая лежит между опорой X и узлом A второй формы стержня (OL), а опорное сечение X имеет наклон того же знака, что и отрезок OX.

Характерный вид форм, описанных в теореме 3, для различных значений c схематически представлен на рис. 2.



$c = c_{\text{КР}}$, форма полуизогнутая $\quad$ $c < c_{\text{КР}}$, нет точек перегиба $\quad$ $c > c_{\text{КР}}$, одна точка перегиба

Рис. 2. Формы двухпролетного стержня при различных значениях c

Справедливость теоремы устанавливается в следующих шагах.

3.1. Значению $c = c_{\text{КР}}$ отвечает двукратная КрС стержня, разрезанного на внутренней опоре, равная $P(XL)$. Одна из соответствующих форм является кусочно-линейной, когда стержень изламывается в точке X, а участки OX и XL остаются прямолинейными. Вторая имеет горизонтальный участок OX, тогда как часть XL изгибается по основной форме шарнирно опертого стержня (XL). Будем располагаться так, чтобы опора X находилась левее узла A. Тогда $P(OX) > P(XL)$ и $P(XL)$ является основной в разрезном стержне и останется основной КрС после наложения связи, устраняющей разрез; при этом ей будет отвечать форма, являющаяся линейной комбинацией форм разрезного стержня, не имеющей излома на опоре. В этой форме участок OX остается прямолинейным, а участок XL изогнут по основной форме стержня (XL), повернутой вокруг опоры L (см. рис. 2 слева).

3.2. Если бы при $c < c_{\text{КР}}$ основная форма имела узел или точку перегиба, основная КрС совпала бы с КрС стержня, более короткого, чем XL, и была бы выше $P(XL)$. В то же время уменьшение жесткости опоры ниже $c_{\text{КР}}$ делает КрС меньше $P(XL)$. Если бы форма имела узел, то в сочетании с отсутствием прогибов на крайних опорах это означало бы существование хотя бы одной точки перегиба.

3.3. При $c > c_{\text{КР}}$ КрС превысит $P(XL)$. Поэтому на участке XL появится ровно одна точка перегиба основной формы, которая лежит между X и A. Вторая точка перегиба, как и точка перегиба на участке OX означали бы, что КрС стержня, усиленного одной связью, больше 2-й КрС исходного стержня, равной $P(OA) = P(AL)$. Кроме того, в силу непрерывности изменения формы при изменении c участок справа от точки перегиба обращен выпуклостью в сторону смещения опоры X. Поэтому равнодействующие реакций крайних опор и сжимающих сил имеют линии действия, пересекающиеся под опорой X (согласно правилу трех сил) при ее смещении вниз. Отсюда следует, что слева от точки перегиба форма обращена выпуклостью вверх. При дальнейшем росте жесткости опоры выпуклость сохранит знак, т.к. иначе в некоторой точке участка OX изгибающий момент обратился бы в нуль, что, как и выше, означало бы, что КрС выше $P(OA) = P(AL)$. При этом угол поворота формы на опоре X в силу постоянства знака изгибающего момента на участке OX имеет тот же знак, что и прогиб. Это вытекает из следующих общематематических соображений. Обозначим $v(x)$ – прогиб формы в точке с координатой x, s_0 – координата первой слева от X точки с нулевым прогибом, $v(s_0) = 0$. Как следует из предыдущего, при $0 < s \leq x$ вторая производная $v''(s)$ имеет постоянный знак, тот же, что и $v(x)$. В соответствии с теоремой Лагранжа о среднем значении при некотором s, $s_0 < s < x$, справедливо соотношение $v(x)v'(x) = v(x)v'(x) - v(s_0)v'(s_0) = \left[v'^2(s) + v(s)v''(s)\right] \cdot (x - s_0) > 0$, из которого следует совпадение знаков $v(x)$ и $v'(x)$. Теорема доказана.

4. Переходя к рассмотрению **многопролетного стержня на упругих опорах**, учитывая возможное различие их жесткостей и положений, а также произвольный характер распределения изгибной жесткости стержня, следует ожидать значительного разнообразия свойств и особенностей поведения их КрС и соответствующих форм. Оставляя на будущее систематическое изучение всех относящихся сюда вопросов, остановимся на некоторых из них, связанных с появлением форм, имеющих прямолинейные участки. Такие формы встречаются в частности в задачах повышения КрС стержней с промежуточными опорами [9-12]. В отличие от абсолютно жесткого опирания при конечной жесткости опор основная КрС может стать кратной, как, например, при решении задачи Бубнова [2].

Теорема 4. Если КрС многоопорного стержня кратна, ей отвечает полуизогнутая форма, в которой хотя бы один из крайних пролетов остается недеформированным.

Среди опор присутствуют опоры с конечной жесткостью, иначе согласно 2.1 КрС была бы простой. Из двух линейно независимых форм можно составить линейную комбинацию с нулевым изгибающим моментом на любой из опор. Так можно образовать формы, в которых крайние пролеты находятся в условиях свободного опирания. Рассмотрим одну из этих форм и предположим, что один из крайних пролетов в ней изогнут. Тогда КрС всего стержня равна КрС этого пролета, опертого на неподатливые шарнирные опоры, для которого она является основной, т.к. иначе, установив на его внутреннем конце жесткую заделку, сделаем КрС всего стержня не выше КрС жестко заделанного крайнего пролета, которая является результатом монотонного убывания установленного в разд. 1.4. Если в другой линейно независимой форме при той же КрС тот же крайний пролет изогнут, то он изогнут по той же кривой с точностью до постоянного множителя. Это вытекает из единственности с точностью до постоянного множителя решения дифференциального уравнения $EI \cdot m'' + Pm = 0$ при $m(0) = 0$, которым определяется изгибающий момент $m(x)$ в рассматриваемом пролете, сжатом заданной продольной силой P. Отсюда следует, что либо в одной из рассмотренных форм этот пролет был прямолинейным, либо можно составить их линейную комбинацию, в которой он будет прямолинейным.

Например, для двухпролетного стержня кратность КрС достигается, когда промежуточная опора установлена в узле A второй формы стержня (OL) и имеет жесткость $c = c_{\text{КР}}$ (эта опора решает задачу Бубнова, в которой ищется жесткость упругой опоры, повышающей КрС так же, как абсолютно жесткая). Характерные формы, отвечающие его двукратной КрС, равной $P(OA) = P(AL)$, в т. ч. вторая форма стержня (OL), схематически показаны на рис. 3. Любая из них является линейной комбинацией двух остальных.

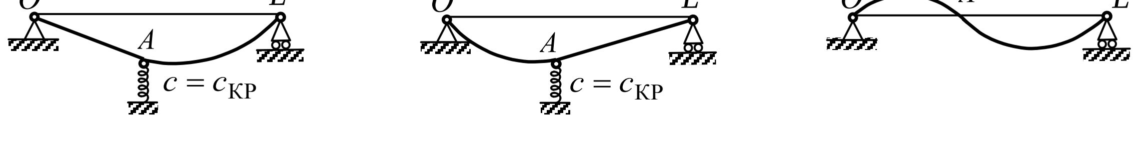


Рис. 3. Формы двухпролетного стержня, отвечающие двукратной КрС, равной 2-й КрС стержня (OL) при $c = c_{\text{КР}}$

Следующая теорема указывает на существовании связи полуизогнутых форм с задачами оптимизации.

Теорема 5. Если при некотором расположении опор (безразлично жестких или упругих) достигается кратность основной КрС, то эта КрС является относительным максимумом по отношению к положению любой из опор.

Перемещение сосредоточенной опоры можно рассматривать как удаление опоры в одном месте и последующую установку в другом. При удалении опоры вторя КрС, равная в силу кратности первой, не изменяется, т.к. она не может опуститься при удалении связи ниже предыдущей в спектре. Последующая установка опоры в любом месте не может повысить основную КрС выше второй, которая до перемещения была равна основной, откуда следует утверждение теоремы.

Выводы. В работе впервые установлен ряд важных и интересных в теоретическом и практическом отношении качественных свойств форм потери устойчивости и соответствующих критических сил двух- и многопролетных стержней как при абсолютно жестком, так и при упругом внутреннем опирании. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и эксплуатации инженерных сооружений, включающих сжатые элементы, а также в последующих исследованиях, связанных с управлением характеристиками и оптимизацией упругих стержневых систем.

Литература

1. Timoshenko S.P. Theory of elastic stability / S.P. Timoshenko, J.M. Gere – McGraw-Hill, New York, 1961, second edition. – 541 pp.

2. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я.Л. Нудельман. – М.-Л., ГТТИ, 1949. – 176 с.

3. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А.Р. Ржаницын. – М.: ГТТИ, 1955. – 475 с.

4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М., «Машиностроение», 1978. – 312 с.

5. Дольберг М.Д. О формах потери устойчивости стержней / М.Д. Дольберг. – ДАН СССР, 1950, т. LXXI. – № 5. – С. 839 – 842.

6. Бекшаев С.Я. О формах потери устойчивости консольных стержней / С.Я. Бекшаев. – «Судостроение и судоремонт». – М., ЦРИА «Морфлот», 1979. – Вып. XI. – С. 51 – 56.

7. Бекшаев С.Я. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня / С.Я. Бекшаев, Л.В. Кошкин, Я.Л. Нудельман. – «Судостроение и судоремонт». – М., Рекламинформбюро ММФ, 1976. – Вып. VII. – С. 64 – 67.

8. Нудельман Я.Л. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня / Я.Л. Нудельман, Д.М. Гитерман, С.Я. Бекшаев. – «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». – Киев, «Вища школа», 1976. – Вып.7. – С. 18.

9. Бекшаев С.Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня / С.Я. Бекшаев // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2015. – Вип. №60. – С. 400 – 406.

10. Бекшаев С.Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости и их экстремальные свойства / С.Я. Бекшаев // Тезисы докладов 5-й международной научной конференции Современные проблемы естественных наук «Тараповские чтения – 2016», Харьков, 1 – 15 марта 2016 г. – С. 80 – 81.

11. Бекшаев С.Я. Качественные методы в задачах повышения устойчивости сжатых стержней / С.Я. Бекшаев // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія «Технічні науки», 2016. – № 3 (98). – С. 74 – 82.

12. Бекшаев С.Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости в задаче оптимизации сжатого трехпролетного стержня / С.Я. Бекшаев // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування, 2016. – №2 (77). – С. 132 –139.

13. Fuchs M. B. Structures and Their Analysis / Maurice Bernard Fuchs – Springer International Publishing Switzerland 2016. – 404 pp.

Стаття надійшла 19.11.2016