УДК 539.3

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Фомин В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)*

Исследуется плоский продольно-поперечный изгиб консольной балки, изготовленной из некоторого материала (в дальнейшем будем именовать его бетоном), армированного стержнями из другого материала, с учетом геометрической и физической нелинейностей, дифференциальные уравнения которого предложены в [1]. При этом предполагается, что основной материал является несимметрично нелинейно упругим (т.е. обладающий различной нелинейной упругостью в сжатой и растянутой зонах), а материал арматуры является линейно упругим.

Рассмотрим изгиб армированной консольной балки, находящейся под действием двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис.1). Поперечное сечение балки представлено на рис.2. В статье [1] угол поворота $\varphi\ (s)$ поперечного сечения балки, абсцисса которого в недеформированном состоянии балки равна s, представлен в следующем виде:

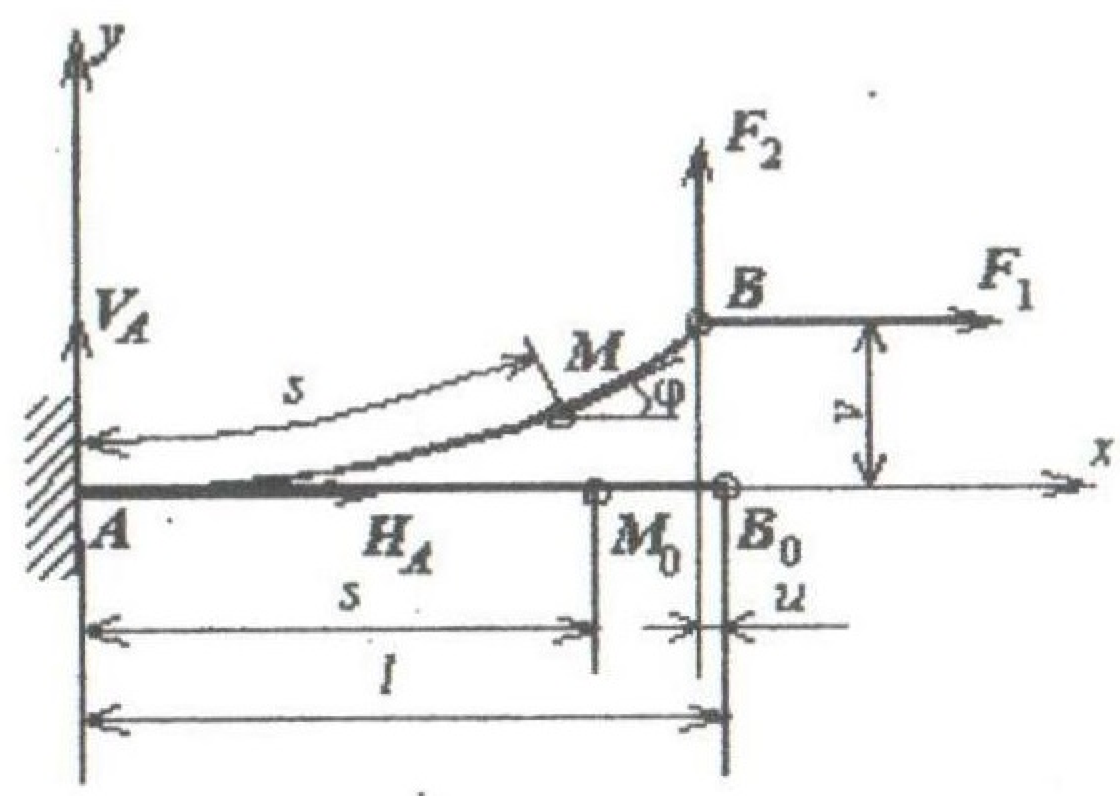

Рис.1

$$\varphi\ (s) = \varphi^{[0]}\ (s) + \varphi^{[1]}\ (s), \qquad (1)$$

причем первое приближение $\varphi^{[0]}\ (s)$ определяется из дифференциального уравнения

$$H\frac{d^2\varphi^{[0]}}{ds^2} + (H_A \sin\varphi^{[0]} - V_A \cos\varphi^{[0]})[1 - D\frac{d\varphi^{[0]}}{ds}] = 0, \qquad (2)$$

где

$$H = E_1^{[0]}J + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2) - \frac{E_a^2}{H_l}(S_1h_1 - S_2h_2)^2,$$

$$D = \frac{E_a}{H_l}(S_1h_1 - S_2h_2),\ H_l = SE_1^{[0]} + E_a(S_1 + S_2) \qquad (2a)$$

($E_1^{[0]} = E^{[0]} /(1-\nu^2)$, $E^{[0]}$ – модуль линейной упругости бетона, ν – коэффициент Пуассона; J – момент инерции поперечного сечения, E_a – модуль упругости арматуры; S_1 и S_2 – площади сечений верхней и нижней арматуры, $S = bh$; размеры h, h_1 и h_2 показаны на рис.2).

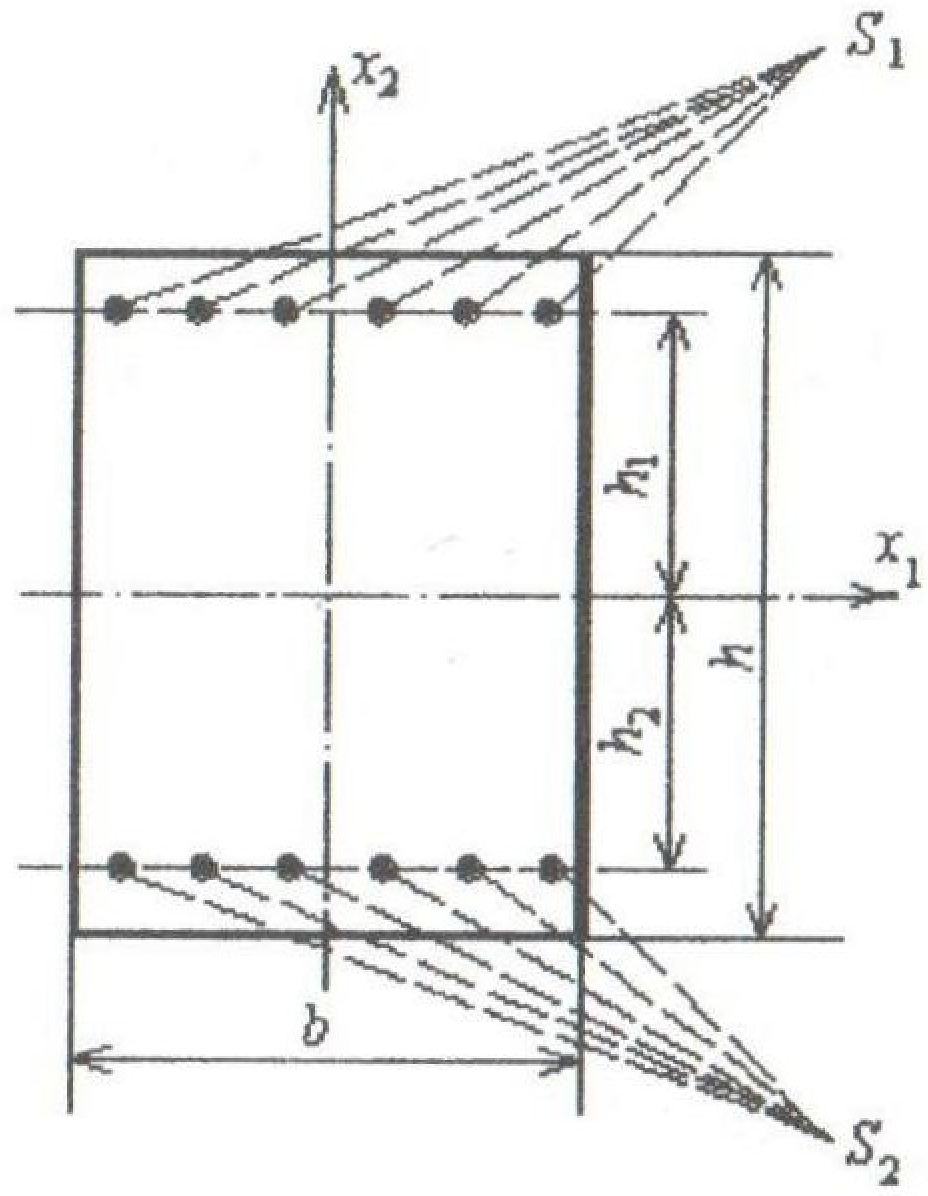

Рис.2

В дальнейшем будем считать, что балка армирована симметрично, т.е., что $S_1 = S_2$ и $h_1 = h_2$. Принимая также во внимание, что $H_A = -F_1$ и $V_A = -F_2$, представляем (2) в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi^{[0]}}{ds^2} - \frac{1}{l^2}(\alpha \sin\varphi^{[0]} - \beta\cos\varphi^{[0]}) = 0\,, \tag{3}$$

где $\alpha = F_1 l^2 / H$, $\beta = F_2 l^2 / H$. Пользуясь малостью угла $\varphi^{[0]}$, представим $\sin\varphi^{[0]}$ и $\cos\varphi^{[0]}$ так

$$\sin\varphi^{[0]} = \varphi^{[0]} - (\varphi^{[0]})^3 / 6,$$
$$\cos\varphi^{[0]} = 1 - (\varphi^{[0]})^2 / 2\,,$$

и будем искать решение уравнения (3) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\frac{d^2\varphi_{n+1}^{[0]}}{ds^2} = \frac{1}{l^2}\{\alpha[\varphi_n^{[0]} - \frac{(\varphi_n^{[0]})^3}{6}] - \beta[1 - \frac{(\varphi_n^{[0]})^2}{2}]\}\,. \tag{4}$$

Положив $\varphi_0^{[0]} = 0$, находим

$$\frac{d^2\varphi_1^{[0]}}{ds^2} = -\frac{\beta}{l^2}\,. \tag{5}$$

Дважды интегрируя по s, получаем

$$\frac{d\varphi_1^{[0]}}{ds} = -\frac{\beta}{l^2}s + c_0\,,\ \varphi_1^{[0]} = -\frac{\beta}{l^2}\frac{s^2}{2} + c_0 s + c_1\,. \tag{6}$$

Из граничных условий

$$\varphi(0) = 0,\ \frac{d\varphi}{ds}(l) = 0 \tag{7}$$

(второе следует из равенства $M_z(l) = 0$ [2]) находим

$$c_0 = \beta / l,\ \ c_1 = 0. \tag{8}$$

Заметим, что величины α и β малы, в чем можно убедиться на конкретном примере, приведенном ниже. Подставляя $\varphi_1^{[0]}$ в правую часть (4). дважды интегрируя по s и ограничиваясь слагаемыми второго по рядка малости по α и β, получаем

$$\varphi_2^{[0]} = \sum_{k=0}^{4} \Phi_k^{[0]} s^k \ , \tag{9}$$

где

$$\Phi_2^{[0]} = -\beta / 2l^2 ,\ \Phi_3^{[0]} = \alpha\beta / 6l^3 ,\ \Phi_4^{[0]} = -\alpha\beta / 24l^4 \ .$$

Коэффициенты $\Phi_0^{[0]}$ и $\Phi_1^{[0]}$ определяются из граничных условий (7):

$$\Phi_0^{[0]} = 0,\ \Phi_1^{[0]} = -\sum_{k=2}^{4} k\Phi_k^{[0]} = \frac{\beta(3-\alpha)}{3}. \tag{10}$$

Для составляющей $\varphi^{[1]}$ второго приближения в (1) в случае симметричного армирования имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$H \frac{d^2\varphi^{[1]}}{ds^2} - (F_1 \cos\varphi^{[1]} + F_2 \sin\varphi^{[1]})\varphi^{[1]} = -\frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds}. \tag{11}$$

Здесь

$$M_{3,0}^{[1]} = -[D_1\Delta^+ - b\widetilde{E}_1^{[1]**}]\psi^{[0]} + D_2\Delta^- - b\widetilde{E}_1^{[1]*}\varepsilon_s^{[0]}, \tag{12}$$

$$\psi^{[0]} = \frac{d\varphi^{[0]}}{ds},\ D_1 = \frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}} J + 2\frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_1 h_1^2,\ D_2 = \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\frac{J}{h},$$

$$K_1^{[0]} = \frac{3K^{[0]} + 4G^{[0]}}{3},\ K_2^{[0]} = \frac{3K^{[0]} - 2G^{[0]}}{3},\ \widetilde{E}_1^{[1]*} =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]} x_2 dx_2,\ \widetilde{E}_1^{[1]**} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]} x_2^2 dx_2,\ E_1^{[1]} = K_1^{[1]} - K_2^{[1]} \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}},$$

$$K_1^{[1]} = \frac{3K^{[1]}(\varepsilon_0^{[0]}) + 4G^{[1]}(\gamma_0^{[0]})}{3},\ K_2^{[1]} = \frac{3K^{[1]}(\varepsilon_0^{[0]}) - 2G^{[1]}(\gamma_0^{[0]})}{3}, \tag{12a}$$

$$\Delta^+ = K_1^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{22}^{[0]}(\frac{h}{2}) + K_1^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{22}^{[0]}(-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{11}^{[0]}(\frac{h}{2}) +$$

$$+ K_2^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{11}^{[0]}(-\frac{h}{2}),$$

$$\Delta^- = K_1^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{22}^{[0]}(\frac{h}{2}) - K_1^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{22}^{[0]}(-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{11}^{[0]}(\frac{h}{2}) -$$

$$- K_2^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{11}^{[0]}(-\frac{h}{2})$$

($\varepsilon_s^{[0]}$ – продольная относительная деформация оси балки в первом приближении, $K^{[0]}$ и $G^{[0]}$ – начальные (т.е. соответствующие линейно упругой деформации) модули объемного сжатия и сдвига бетона, $\varepsilon_0^{[0]} = [\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]} + \varepsilon_{33}^{[0]}]/3$ – величина среднего удлинения, $\gamma_0^{[0]} = 2[(\varepsilon_{11}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{22}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{33}^{[0]})^2 - \varepsilon_{11}^{[0]}\varepsilon_{22}^{[0]} - \varepsilon_{22}^{[0]}\varepsilon_{33}^{[0]} - \varepsilon_{33}^{[0]}\varepsilon_{11}^{[0]} + 3((\varepsilon_{12}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{23}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{31}^{[0]})^2)]^{1/2}/3$ – октаэдрическая деформация сдвига, $\varepsilon_{ij}^{[0]}$ – элементы тензора конечных деформаций в точках балки, определенные в первом приближении). Величины, стоящие в правых частях равенств (12а), представляют собой функции координаты s (за исключением $K_1^{[0]}$ и $K_2^{[0]}$, которые являются константами, и $K_1^{[1]}$ и $K_2^{[1]}$, являющихся еще функциями координаты x_2), однако, аргумент этих функций указывать не будем, кроме тех случаев, когда этот аргумент принимает определенное значение.

Функции $K^{[1]}(\varepsilon_0)$ и $G_0^{[1]}(\gamma_0)$ фигурируют в следующем представлении секущих объемного модуля упругости и модуля сдвига для нелинейно-упругого материала:

$$K(\varepsilon_0) = K^{[0]} + K^{[1]}(\varepsilon_0),\ G(\gamma_0) = G^{[0]} + G^{[1]}(\gamma_0). \tag{13}$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда

$$\begin{aligned} &K^{[1]}(\varepsilon_0) = \widehat{K}^{[1]+}\varepsilon_0,\ G^{[1]}(\gamma_0) = \widehat{G}^{[1]+}\gamma_0\ (\text{при}\ \varepsilon_{11} \geq 0), \\ &K^{[1]}(\varepsilon_0) = \widehat{K}^{[1]-}\varepsilon_0,\ G^{[1]}(\gamma_0) = \widehat{G}^{[1]-}\gamma_0\ (\text{при}\ \varepsilon_{11} < 0) \end{aligned} \tag{14}$$

где $\widehat{K}^{[1]+}$, $\widehat{K}^{[1]-}$, $\widehat{G}^{[1]+}$, $\widehat{G}^{[1]-}$ – постоянные величины [3].

В [1] показано, что

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11}^{[0]} = \varepsilon_s^{[0]} - (1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\varepsilon_s^{[0]})\psi^{[0]}x_2, \\ &\varepsilon_{22}^{[0]} = \frac{1}{2}[a_3^* d_2^2(x_2) + 2\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}(\psi^{[0]}x_2 - \varepsilon_s^{[0]})], \\ &\varepsilon_{12}^{[0]} = -\frac{1}{2}(1 + \varepsilon_s^{[0]})a_3^{[0]}d_2(x_2),\ \varepsilon_{33}^{[0]} = \varepsilon_{13}^{[0]} = \varepsilon_{23}^{[0]} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &a_3^* = (a_3^{[0]})^2,\ \varepsilon_s^{[0]} = [-\frac{3}{20}SK_2^{[0]}a_3^* h^4 + F_1\cos\varphi^{[0]} + F_2\sin\varphi^{[0]}]/H \\ &a_3^{[0]} = (F_1\sin\varphi^{[0]} - F_2\cos\varphi^{[0]})/H_s,\ H_l = SE_1^{[0]} + 2E_a S_1, \end{aligned} \tag{16}$$

$$H_s = G^{[0]} b \frac{h^3}{2} + 2G_a d_2(h_1) S_1,\ d_2(x_2) = \frac{3}{4} h^2 - 3x_2^2$$

(G_a – модуль сдвига арматуры).

Заметим, что $\varphi^{[0]}$, $\psi^{[0]}$, $a_3^{[0]}$, a_3^* и $\varepsilon_s^{[0]}$ могут быть представлены так:

$$\varphi^{[0]} = \beta \overline{\varphi}^{[0]},\ \psi^{[0]} = \beta \frac{1}{l} \overline{\psi}^{[0]},\ a_3^{[0]} = -\beta A_3 \overline{a}_3^{[0]},\ a_3^* = \beta^2 A_3^2 \overline{a}_3^*,$$

$$\varepsilon_s^{[0]} = \beta \frac{E_{s,1}}{l} \overline{\psi}^{[0]} + \alpha E_{s,2} + \beta^2 (E_{s,2} \overline{\varphi}^{[0]} - E_{s,0} A_3^2 \overline{a}_3^*) \tag{17}$$

где

$$A_3 = H / l^2 H_s,\ E_{s,0} = 3S K_2^{[0]} h^4,\ E_{s,1} = E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2),$$

$$E_{s,2} = H / l^2 H_l,\ \overline{\varphi}^{[0]} = (1-\alpha/3)\zeta - \zeta^2 / 2 + \alpha\zeta^3 / 6 - \alpha\zeta^4 / 24, \tag{17a}$$

$$\overline{\psi}^{[0]} = 1 - \alpha/3 - \zeta + \alpha\zeta^2 / 2 - \alpha\zeta^3 / 6,\ \overline{a}_3^{[0]} = 1 - \alpha \overline{\varphi}^{[0]},$$

$$\overline{a}_3^* = (\overline{a}_3^{[0]})^2,\ \zeta = s / l.$$

Заметим, что при симметричном армировании $E_{s,1} = 0$.

В соответствии с (14) вычисление интегралов при определении величин $\widetilde{E}_1^{[1]*}$ и $\widetilde{E}_1^{[1]**}$ в (12) зависит от координаты $x_{2,n}$ нейтральной линии в данном сечении, определяемой равенством

$$\varepsilon_{11} = 0. \tag{18}$$

Учитывая (15) записываем это уравнение в следующем виде:

$$\varepsilon_s^{[0]} - x_2 \psi^{[0]} = 0. \tag{19}$$

Принимая во внимание, что балка симметрично армирована, получаем из (19)

$$x_{2,n} = \frac{E_{s,2} l (\alpha + \beta^2 \overline{\varphi}^{[0]})}{\beta \overline{\psi}^{[0]}}. \tag{20}$$

Если рассматривать случай, когда $\beta^2 \ll |\alpha|$, то (20) значительно упростится

$$x_{2,n} = \frac{E_{s,2} l \alpha}{\beta \overline{\psi}^{[0]}}. \tag{21}$$

Положение нейтральной линии при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ показано на рис.3. В этом случае верхняя зона является зоной сжатия, а нижняя – зоной растяжения.

Координата s_n, определяющая точку пересечения нейтральной линии с верхней или нижней поверхностью балки, находится из условия $|x_{2,n}| = h / 2$. Из (21) следует, что $\zeta_n = s_n / l$ является корнем уравнения

$$\overline{\psi}^{[0]}(\zeta) = R_0 \mid \frac{\alpha}{\beta} \mid, \; R_0 = 2\frac{E_{s,2} l}{h}. \qquad (22)$$

Удерживая в разложении функции $\overline{\psi}^{[0]}(\zeta)$ первые три члена, получим

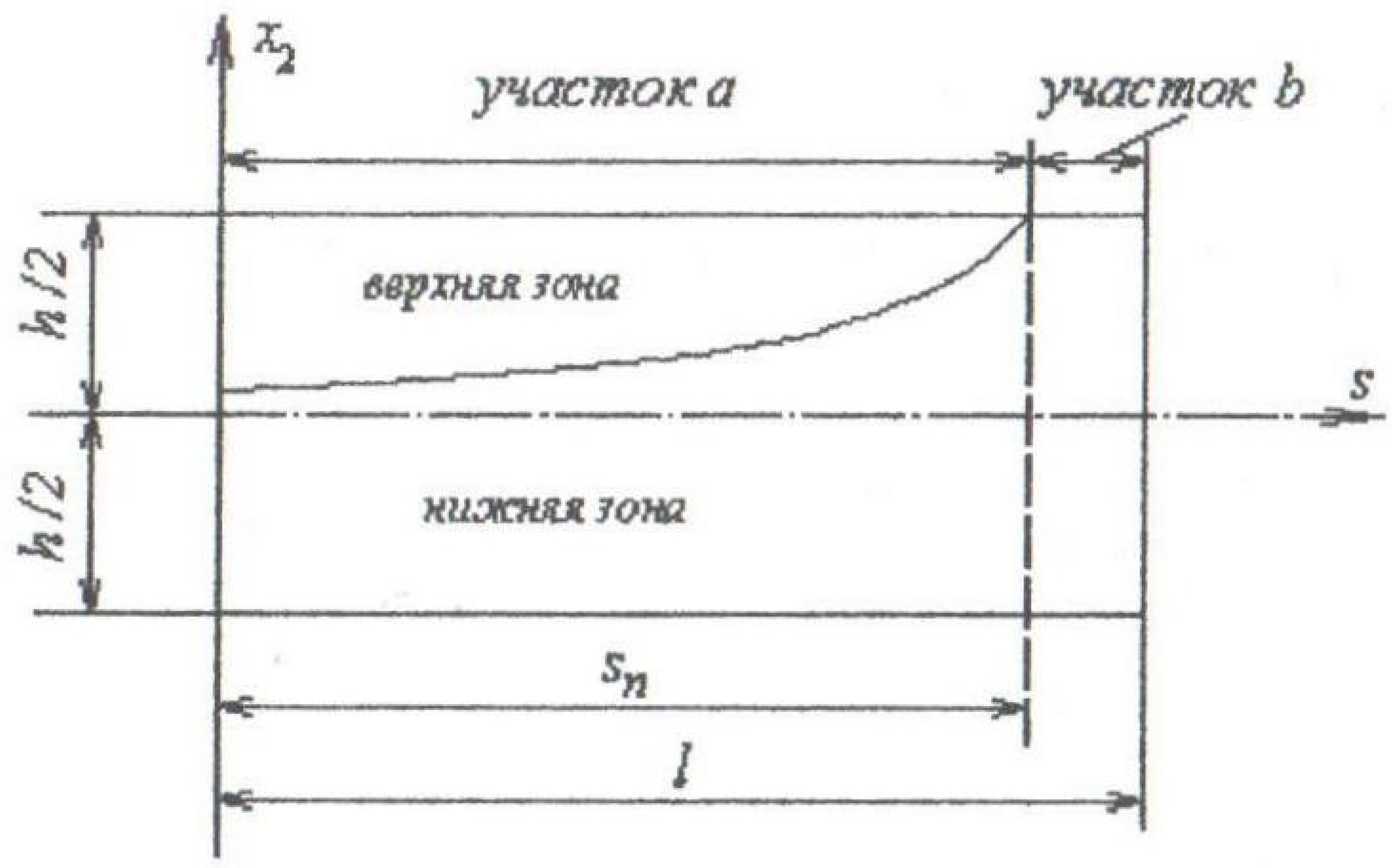

Рис.3

$$s_n = l(1 - \frac{\alpha}{3} - R_0 \mid \frac{\alpha}{\beta} \mid). \qquad (23)$$

Из (21) и (22) находим

$$x_{2,n} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\overline{\psi}^{[0]}} \operatorname{sgn}(\alpha\beta). \qquad (24)$$

Назовем отрезок балки $s \le s_n$ участком *a*. Он содержит как зону растяжения, так и зону сжатия. Отрезок балки $s_n < s \le l$ назовем участком *в*. Он содержит только одну зону, знак которой зависит от знака α. Если по формуле (23) получается, что $s_n \le 0$ (легко убедиться, что при этом $|\beta| \le R_0 |\alpha| / (1 - \alpha/3)$, то это означает, что балка состоит только из одного участка *в*. Если же из формулы (23) следует, что $s_n > 1$ (это возможно только при $\alpha < 0$ и $|\beta| \ge 3 R_0$), то балка состоит только из участка *a*. При $R_0 |\alpha| / (1 - \alpha/3) < |\beta| < R_0$ балка содержит оба участка.

Учитывая, что $a_3^* \sim \beta^2$, и оставляя величины первого порядка малости относительно α и β, получаем

$$\varepsilon_0^{[0]} = \frac{1}{3}(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})(\varepsilon_s^{[0]} - x_2\psi^{[0]}), \; \gamma_0^{[0]} = \frac{2}{3}\sqrt{K_3^{[0]}} \mid \varepsilon_s^{[0]} - x_2\psi^{[0]} \mid, \qquad (25)$$

где $K_3^{[0]} = 1 + 2K_2^{[0]} / K_1^{[0]} + 4(K_2^{[0]} / K_1^{[0]})^2$.

Из (12а), (14) и (25) следует

$$\widetilde{E}_1^{[1]*} = (1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})\left[\widehat{K}^{[1]}\varepsilon_0^{[0]}\right]^* + \frac{2}{3}(2 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})\left[\widehat{G}^{[1]}\gamma_0^{[0]}\right]^*. \qquad (26)$$

Приняты следующие обозначения:

$$[f(x_2)]^* = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2)x_2 dx_2, [f(x_2)]^{**} = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2)x_2^2 dx_2 \,.$$

Используя (25), находим

$$\left[\widehat{K}^{[1]}\varepsilon_0^{[0]}\right]^* = \frac{1}{3}\left(1-\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)\left(\varepsilon_s^{[0]}\left[\widehat{K}^{[1]}\right]^* - \psi^{[0]}\left[\widehat{K}^{[1]}\right]^{**}\right),$$

$$\left[\widehat{G}^{[1]}\gamma_0^{[0]}\right]^* = \frac{2}{3}\sqrt{K_3^{[0]}}\left(\varepsilon_s^{[0]}\left[\widehat{G}^{[1]}\operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})\right]^* - \psi^{[0]}\left[\widehat{G}^{[1]}\operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})\right]^{**}\right. \qquad (27)$$

Если поперечное сечение находится на участке a, то

$$\left[\widehat{K}^{[1]}\right]^* = \widehat{K}^{[1]d}\int_{-h/2}^{x_{2,n}} x_2 dx_2 + \widehat{K}^{[1]u}\int_{x_{2,n}}^{h/2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2}(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d})\left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right),$$

$$\left[\widehat{K}^{[1]}\right]^{**} = \widehat{K}^{[1]d}\int_{-h/2}^{x_{2,n}} x_2^2 dx_2 + \widehat{K}^{[1]u}\int_{x_{2,n}}^{h/2} x_2^2 dx_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{h^3}{8}(\widehat{K}^{[1]u} + \widehat{K}^{[1]d}) - \right. \quad (28)$$

$$\left. - x_{2,n}^3(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d})\right]$$

($\widehat{K}^{[1]d}$ и $\widehat{K}^{[1]u}$ – значения коэффициента $\widehat{K}^{[1]}$ в нижней и верхней зонах, которые равны $\widehat{K}^{[1]+}$ или $\widehat{K}^{[1]-}$ в зависимости от знака $\varepsilon_{11}^{[0]}$; такое же замечание может быть сделано относительно $\widehat{G}^{[1]d}$ и $\widehat{G}^{[1]u}$).

Аналогично получаем

$$\left[\widehat{G}^{[1]}\operatorname{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})\right]^* = -\frac{\operatorname{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})}{2}(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})\left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right),$$

$$\left[\widehat{G}^{[1]}\right]^{**} = -\frac{\operatorname{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})}{3}\left[\frac{h^3}{8}(\widehat{G}^{[1]u} - \widehat{G}^{[1]d}) - x_{2,n}^3(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})\right]. \qquad (29)$$

Здесь $\operatorname{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})$ – знак $\varepsilon_{11}^{[0]}$ в нижней зоне.

Подставляя (28) и (29) в (26), получаем

$$\widetilde{E}_{1,a}^{[1]*} = E_{1,1,a}^{[1]*}\varepsilon_s^{[0]} - E_{1,2,a}^{[1]*}\psi^{[0]},$$

$$E_{1,1,a}^{[1]*} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2\left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right)(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) -$$

$$-\frac{2}{9}\operatorname{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})\left(2+\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)\sqrt{K_3^{[0]}}\left(\frac{h^2}{4} - x_{2,n}^2\right)(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d}), \qquad (30)$$

$$E_{1,2,a}^{[1]*} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2\left[\frac{h^3}{8}(\widehat{K}^{[1]u} + \widehat{K}^{[1]d}) - x_{2,n}^3(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d})\right] -$$

$$-\frac{4}{27}\operatorname{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})\left(2+\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)\sqrt{K_3^{[0]}}\left[\frac{h^3}{8}(\widehat{G}^{[1]u} - \widehat{G}^{[1]d}) - x_{2,n}^3(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})\right]$$

($\widetilde{E}_{1,a}^{[1]*}$ – значение $\widetilde{E}_1^{[1]*}$ на участке a).

Если сечение находится на участке b, то

$$\left[\widehat{K}^{[1]}\right]^{*}=\widehat{K}^{[1]}\int\limits_{-h/2}^{h/2}x_2dx_2=0,\ \left[\widehat{K}^{[1]}\right]^{**}=\widehat{K}^{[1]}\int\limits_{-h/2}^{h/2}x_2^2dx_2=\frac{1}{12}h^3\widehat{K}^{[1]},$$
$$\left[\widehat{G}^{[1]}\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})\right]^{*}=0,\ \left[\widehat{G}^{[1]}\right]^{**}=\frac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})}{12}h^3\widehat{G}^{[1]} \qquad (31)$$

и тогда

$$E_{1,1,b}^{[1]*}=0,\ E_{1,2,b}^{[1]*}=\frac{1}{36}(1-K_2^{[0]}/K_1^{[0]})^2h^3\widehat{K}^{[1]}+\frac{1}{27}\mathrm{sgn}(\varepsilon_{11}^{[0]})(2+$$
$$+K_2^{[0]}/K_1^{[0]})\sqrt{K_3^{[0]}}h^3\widehat{G}^{[1]},\ \text{т.е.}\ \widetilde{E}_{1,b}^{[1]*}=-E_{1,2,b}^{[1]*}\psi^{[0]}. \qquad (32)$$

Аналогично находим для участка a

$$\widetilde{E}_{1,a}^{[1]**}=E_{1,1,a}^{[1]**}\varepsilon_s^{[0]}-E_{1,2,a}^{[1]**}\psi^{[0]},$$

$$E_{1,1,a}^{[1]**}=\frac{1}{9}(1-\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})^2[\frac{h^3}{8}(\widehat{K}^{[1]u}+\widehat{K}^{[1]d})-x_{2,n}^3(\widehat{K}^{[1]u}-\widehat{K}^{[1]d})]- \qquad (33)$$

$$-\frac{4}{27}\mathrm{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})(2+\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})\sqrt{K_3^{[0]}}[\frac{h^3}{8}(\widehat{G}^{[1]u}-\widehat{G}^{[1]d})-x_{2,n}^3(\widehat{G}^{[1]u}+\widehat{G}^{[1]d})],$$

$$E_{1,2,a}^{[1]**}=\frac{1}{12}(1-\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})^2(\frac{h^4}{16}-x_{2,n}^4)(\widehat{K}^{[1]u}-\widehat{K}^{[1]d})-$$

$$-\frac{1}{9}\mathrm{sgnd}(\varepsilon_{11}^{[0]})(2+\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})\sqrt{K_3^{[0]}}(\frac{h^4}{16}-x_{2,n}^4)(\widehat{G}^{[1]u}+\widehat{G}^{[1]d})].$$

Используя представление (24) для $x_{2,n}$, получаем

$$E_{1,1,a}^{[1]*}=E_{1,1,a,1}^{[1]*}+E_{1,1,a,2}^{[1]*}(\frac{\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\overline{\psi}^{[0]}})^2,$$
$$E_{1,2,a}^{[1]*}=E_{1,2,a,1}^{[1]*}+E_{1,2,a,2}^{[1]*}(\frac{\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\overline{\psi}^{[0]}})^3\,\mathrm{sgn}(\alpha\beta),$$
$$E_{1,1,a}^{[1]**}=E_{1,1,a,1}^{[1]**}+E_{1,1,a,2}^{[1]**}(\frac{\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\overline{\psi}^{[0]}})^3\,\mathrm{sgn}(\alpha\beta), \qquad (34)$$
$$E_{1,2,a}^{[1]**}=E_{1,2,a,1}^{[1]**}+E_{1,2,a,2}^{[1]**}(\frac{\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)}{\overline{\psi}^{[0]}})^4$$

где

$$E^{[1]*}_{1,1,a,1} = [\frac{1}{6}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) - \frac{2}{9}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^2}{4},$$

$$E^{[1]*}_{1,1,a,2} = [-\frac{1}{6}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) + \frac{2}{9}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^2}{4},$$

$$E^{[1]*}_{1,2,a,1} = E^{[1]**}_{1,1,a,1} = [\frac{1}{9}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} + \widehat{K}^{[1]d}) - \frac{4}{27}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} - \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^3}{8}, \quad (35)$$

$$E^{[1]*}_{1,2,a,2} = E^{[1]**}_{1,1,a,2} = [-\frac{1}{9}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) + \frac{4}{27}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^3}{8},$$

$$E^{[1]**}_{1,2,a,1} = [\frac{1}{12}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) - \frac{1}{9}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^4}{16},$$

$$E^{[1]**}_{1,2,a,2} = [-\frac{1}{12}K^{[0]}_4(\widehat{K}^{[1]u} - \widehat{K}^{[1]d}) + \frac{1}{9}K^{[0]}_5(\widehat{G}^{[1]u} + \widehat{G}^{[1]d})]\frac{h^4}{16},$$

$$K^{[0]}_4 = (1 - K^{[0]}_2 / K^{[0]}_1)^2, \; K^{[0]}_5 = \mathrm{sgnd}(\varepsilon^{[0]}_{11})(2 + K^{[0]}_2 / K^{[0]}_1)\sqrt{K^{[0]}_3}.$$

Для участка b будем иметь

$$E^{[1]**}_{1,1,b} = \frac{1}{36}K^{[0]}_4 h^3 \widehat{K}^{[1]} + \frac{1}{27}K^{[0]}_5 h^3 \widehat{G}^{[1]}, \; E^{[1]**}_{1,2,b} = 0, \text{т.е.} \quad (36)$$

$$\widetilde{E}^{[1]**}_{1,b} = E^{[1]**}_{1,1,b}\varepsilon^{[0]}_s.$$

Из (12а) находим

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{3}\{3K^{[1]}(\frac{h}{2})[\varepsilon^{[0]}_{22}(\frac{h}{2}) + \varepsilon^{[0]}_{11}(\frac{h}{2})] + 2G^{[1]}(\frac{h}{2})[2\varepsilon^{[0]}_{22}(\frac{h}{2}) - \varepsilon^{[0]}_{11}(\frac{h}{2})] \pm \quad (37)$$

$$\pm 3K^{[1]}(-\frac{h}{2})[\varepsilon^{[0]}_{22}(-\frac{h}{2}) + \varepsilon^{[0]}_{11}(-\frac{h}{2})] + 2G^{[1]}(-\frac{h}{2})[2\varepsilon^{[0]}_{22}(-\frac{h}{2}) - \varepsilon^{[0]}_{11}(-\frac{h}{2})]\}.$$

Используя (14) получаем для участка a

$$\Delta^{\pm}_a = \frac{1}{3}\{9\widehat{K}^{[1]u}[\varepsilon^{[0]}_0(\frac{h}{2})]^2 \pm 9\widehat{K}^{[1]d}[\varepsilon^{[0]}_0(-\frac{h}{2})]^2 + 2\widehat{G}^{[1]u}\gamma^{[0]}_0(\frac{h}{2})[2\varepsilon^{[0]}_{22}(\frac{h}{2}) -$$

$$- \varepsilon^{[0]}_{11}(\frac{h}{2})] \pm 2\widehat{G}^{[1]d}\gamma^{[0]}_0(-\frac{h}{2})[2\varepsilon^{[0]}_{22}(-\frac{h}{2}) - \varepsilon^{[0]}_{11}(-\frac{h}{2})]\}. \quad (38)$$

Из (25) следует

$$\Delta^{\pm} = (\varepsilon^{[0]}_s - \frac{h}{2}\psi^{[0]})^2\Delta_1 \pm (\varepsilon^{[0]}_s + \frac{h}{2}\psi^{[0]})^2\Delta_2, \quad (39)$$

где для участка a

$$\Delta_1=\Delta_{1,a}=\frac{1}{3}(K_4^{[0]}\widehat{K}^{[1]u}+\frac{4}{3}K_5^{[0]}\widehat{G}^{[1]u}),$$
$$\Delta_2=\Delta_{2,a}=\frac{1}{3}(K_4^{[0]}\widehat{K}^{[1]d}-\frac{4}{3}K_5^{[0]}\widehat{G}^{[1]d}) \tag{39a}$$

и для участка b

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_b=\frac{1}{3}[K_4^{[0]}\widehat{K}^{[1]}-\frac{4}{3}K_5^{[0]}\widehat{G}^{[1]}]. \tag{39b}$$

Используя (39), запишем формулу (12) в следующем виде:

$$M_{3,0}^{[1]}=[D_2(\Delta_1-\Delta_2)-bE_{1,1}^{[1]*})(\varepsilon_s^{[0]})^2+[b(E_{1,1}^{[1]**}+E_{1,2}^{[1]*})-$$
$$-D_2h(\Delta_1+\Delta_2)]\varepsilon_s^{[0]}\psi^{[0]}+[D_2\frac{h^2}{4}(\Delta_1-\Delta_2)-bE_{1,2}^{[1]**}](\psi^{[0]})^2. \tag{40}$$

Удерживая в (40) величины до второго порядка малости относительно α и β включительно, получаем

$$M_{3,0}^{[1]}=A\alpha^2+B\alpha\beta+C\beta^2,\ A=[D_2(\Delta_1-\Delta_2)-bE_{11}^{[1]*}]E_{s,2}^2,$$
$$B=[b(E_{11}^{[1]**}+E_{12}^{[1]*})-D_2h(\Delta_1+\Delta_2)]E_{s,2}\overline{\psi}^{[0]}/l, \tag{41}$$
$$C=[D_2\frac{h^2}{4}(\Delta_1-\Delta_2)-bE_{12}^{[1]**}](\overline{\psi}^{[0]})^2/l^2.$$

Из (33) и (34) следует, что коэффициенты A, B и C на участке a могут быть представлены так

$$A_a=A_{1,a}+A_{2,a}(\overline{\psi}^{[0]})^{-2},\ B_a=B_{1,a}+B_{2,a}(\overline{\psi}^{[0]})^{-2},\ C_a=C_{1,a}+$$
$$+C_{2,a}(\overline{\psi}^{[0]})^{-2},\ A_{1,a}=[D_2(\Delta_{1,a}-\Delta_{2,a})-bE_{1,1,a,1}^{[1]*}]E_2^2,$$
$$A_{2,a}=-bE_{1,1,a,2}^{[1]*}\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)^2E_2^2,\ B_{1,a}=[-D_2h(\Delta_{1,a}+\Delta_{2,a})+$$
$$+b(E_{1,1,a,1}^{[1]**}+E_{1,2,a,1}^{[1]*})]\frac{E_2}{l},\ B_{2,a}=b(E_{1,1,a,2}^{[1]**}+ \tag{42}$$
$$+E_{1,2,a,2}^{[1]*})\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)^3\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\frac{E_2}{l},\ C_{1,a}=[D_2\frac{h^2}{4}(\Delta_{1,a}-\Delta_{2,a})-$$
$$-bE_{1,2,a,1}^{[1]**}]\frac{1}{l^2},\ C_{2,a}=-bE_{1,2,a,2}^{[1]**}\overline{\psi}^{[0]}(\zeta_n)^4\frac{1}{l^2}.$$

Из (32) и (36) получаем следующие значения A, B и C на участке b:

$$A_b=0,\ B_b=B_{1,b}\overline{\psi}^{[0]},\ C_b=0,$$
$$B_{1,b}=[-2D_2\Delta_b+b(E_{1,1,b}^{[1]**}+E_{1,2,b}^{[1]*})]E_2/l. \tag{43}$$

Анализируя выражения (42) и (43), а также формулы для величин, фигурирующих в них, можно придти к следующим выводам:

при перемене знака β величины коэффициентов A, B и C остаются неизменными, но A и C меняют знак. Поэтому эти коффициенты могут представлены так:

$$A = A^{+}\,\mathrm{sgn}\,(\beta),\; C = C^{+}\,\mathrm{sgn}\,(\beta), \tag{44}$$

где A^{+} и C^{+} вычислены при положительных значениях β.

Аналогично решению уравнения (2) будем решать уравнение (11) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\frac{d^2\varphi_{n+1}^{[1]}}{ds^2} = \frac{1}{l^2}(\alpha+\beta\varphi^{[0]})\varphi_n^{[1]} - \frac{l}{H}\frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds}\,. \tag{45}$$

Полагая $\varphi_0^{[1]} = 0$ и дважды интегрируя по s, находим

$$\varphi_1^{[1]} = -\frac{1}{H}[M_{3,0}^{[1]}]^{\#} + c_0 s + c_1. \tag{46}$$

Знак # здесь означает следующее:

$$[f]^{\#} = \int_0^s f(\tau)d\tau \tag{47}$$

(аргумент s функции $[f]^{\#}$ в дальнейшем указывать не будем, за исключением случаев, когда этот аргумент принимает конкретное значение).

В дальнейшем ограничимся первым приближением, поэтому нижний индекс 1 у $\varphi_1^{[1]}$ опустим.

Из граничного условия $\varphi^{[1]}(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Значение c_o определяется из второго граничного условия

$$\frac{d\varphi^{[1]}}{ds}(l) = -\frac{1}{H}M_{3,0}^{[1]}(l) + c_0 l = 0\,. \tag{48}$$

Учитывая, что $\overline{\psi}^{[0]}(l) = 0$, получаем из (46)

$$c_o = A / Hl. \tag{49}$$

Будем полагать, что $|\beta|<R_o$ (вычисления показали, что в противном случае в балке возникают деформации, выходящие за пределы восходящих ветвей диаграмм растяжения и сжатия). Тогда в балке обязательно будет присутствовать участок b. В соответствии с (43) $c_o = 0$ и (46) с учетом (41) принимает следующий вид:

$$\varphi^{[1]} = -\frac{1}{H}([A]^{\#}\alpha^2 + [B]^{\#}\alpha\beta + [C]^{\#}\beta^2). \tag{50}$$

Используя (42) получаем при $s < s_n$ (т.е. когда сечение находится на участке a)

$$[A_a]^{\#}=A_{1,a}s+A_{2,a}[(\overline{\psi}^{[0]})^{-2}]^{\#},$$
$$[B_a]^{\#}=B_{1,a}[\overline{\psi}^{[0]}]^{\#}+B_{2,a}\,\mathrm{sgn}(\alpha\beta)[(\overline{\psi}^{[0]})^{-2}]^{\#}, \tag{51}$$
$$[C_a]^{\#}=C_{1,a}[(\overline{\psi}^{[0]})^{2}]^{\#}+C_{2,a}[(\overline{\psi}^{[0]})^{-2}]^{\#}.$$

Интегрируя по s, находим

$$[A_a]^{\#}=A_{1,a}lf_1(\zeta)+A_{2,a}lf_2(\zeta)],\ [B_a]^{\#}=B_{1,a}lf_3(\zeta)+B_{2,a}lf_2(\zeta)],$$
$$[C_a]^{\#}=C_{1,a}lf_4(\zeta)+C_{2,a}lf_2(\zeta)],$$
$$f_1(\zeta)=\zeta,\ f_2(\zeta)=\zeta/[(1-\frac{\alpha}{3})(1-\frac{\alpha}{3}-\zeta)],\ f_3(\zeta)=(1-\frac{\alpha}{3})\zeta-\frac{\zeta^2}{2}, \tag{52}$$
$$f_4(\zeta)=(1-\frac{\alpha}{3})^2\zeta-(1-\frac{\alpha}{3})\zeta^2+\frac{\zeta^3}{3}.$$

При $s\geq s_n$ (т.е. когда сечение находится на участке b) из (43) следует

$$[A]^{\#}=[A_a]^{\#}(s_n),\ [B]^{\#}=[B_a]^{\#}(s_n)+B_{1,b}\int\limits_{s_n}^{s}\overline{\psi}(\tau)d\tau=$$
$$=[B_a]^{\#}(s_n)+B_{1,b}lf_5(\zeta),\ [C]^{\#}=[C_a]^{\#}(s_n), \tag{53}$$
$$f_5(\zeta)=(1-\frac{\alpha}{3})(\zeta-\zeta_n)-\frac{1}{2}(\zeta^2-\zeta_n^2).$$

Здесь $[f(s)]^{\#}(s_n)=\int\limits_0^{s_n}f(\tau)d\tau$.

Из (50) – (53) следует, что $\varphi^{[1]}(s)$ имеет на отрезках $[0,\ s_n]$ (участок a) и $[s_n,\ l]$ (участок b) разные аналитические выражения $\varphi_a^{[1]}(s)$ и $\varphi_b^{[1]}(s)$, а следовательно, различные разложения в степенные ряды:

$$\varphi_a^{[1]}=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1,a,k}^{[1]}s^k,\ \varphi_b^{[1]}=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1,b,k}^{[1]}s^k, \tag{54}$$

причем, согласно (50) коэффициенты этих разложений могут быть представлены в следующем виде:

$$\Phi_{1,k}^{[1]}=\Phi_{1,k,1}^{[1]}\alpha^2+\Phi_{1,k,2}^{[1]}\alpha\beta+\Phi_{1,k,3}^{[1]}\beta^2, \tag{55}$$

где $\Phi_{1,k}^{[1]}=\Phi_{1,a,k}^{[1]}$, $\Phi_{1,k,j}^{[1]}=\Phi_{1,a,k,j}^{[1]}$ на участке a и $\Phi_{1,k}^{[1]}=\Phi_{1,b,k}^{[1]}$, $\Phi_{1,k,j}^{[1]}=\Phi_{1,b,k,j}^{[1]}$ на участке b (j = 1,2,3).

Из (1), (9) и (10) следует, что

$$\Phi_{1,1}=\frac{\beta}{l}(1-\frac{\alpha}{3})+\Phi_{1,1}^{[1]},\ \Phi_{1,2}=-\frac{\beta}{2l^2}+\Phi_{1,2}^{[1]},$$
$$\Phi_{1,3}=\frac{\alpha\beta}{6l^3}+\Phi_{1,3}^{[1]},\ \Phi_{1,4}=-\frac{\alpha\beta}{24l^4}+\Phi_{1,4}^{[1]}. \tag{56}$$

Здесь $\Phi_{1,k}$ – коэффициенты разложения

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1,k}s^k. \tag{57}$$

Возводя (57) в квадрат и удерживая слагаемые, содержащие степени α и β до второй включительно, получаем

$$\Phi_{2,1}=0,\ \Phi_{2,2}=\Phi_{1,1}^2=\frac{\beta^2}{l^2},\ \Phi_{2,3}=2\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}=-\frac{\beta^2}{2l^3},$$
$$\Phi_{2,4}=2\Phi_{1,1}\Phi_{1,3}+\Phi_{1,2}^2=\frac{\beta^2}{4l^4}. \tag{58}$$

В (58) представлены первые четыре члена разложения

$$\varphi^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{2,k}s^k. \tag{59}$$

При малых продольных деформациях оси балки имеют место следующие соотношения [2]:

$$v'(s)=\sin\varphi,\ u'(s)=\cos\varphi-1 \tag{60}$$

($v\ (s)$ – вертикальное перемещение точки оси балки, $u\ (s)$ – горизонтальное).

Учитывая малость φ, находим из (60)

$$v(s)=[\varphi]^{\#},\ u(s)=-\frac{1}{2}[\varphi^2]^{\#} \tag{61}$$

(по поводу обозначений см. (47)).

Тогда

$$v(s)=\frac{\beta}{2l}(1-\frac{\alpha}{3})s^2-\frac{\beta}{6l^2}s^3+\frac{\alpha\beta}{24l^3}s^4-\frac{\alpha\beta}{120l^4}s^5+[\varphi^{[1]}]^{\#},$$
$$u(s)=-\frac{\beta^2}{2}(\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{8}+\frac{s^5}{25}). \tag{62}$$

Из (50) получаем

$$[\varphi^{[1]}]^{\#}=-\frac{1}{H}([A]^{\#\#}\alpha^2+[B]^{\#\#}\alpha\beta+[C]^{\#\#}\beta^2). \tag{63}$$

Используя (52) находим для $s\le s_n$

$$[A_a]^{\#\#} = A_{1,a} l^2 g_1(\zeta) + A_{2,a} (\frac{1-\alpha/3-\zeta_n}{R_0})^2 l^2 g_2(\zeta)],$$

$$[B_a]^{\#\#} = B_{1,a} l^2 g_3(\zeta) + B_{2,a} (\frac{1-\alpha/3-\zeta_n}{R_0})^3 l^2 g_2(\zeta)],$$

$$[C_a]^{\#\#} = C_{1,a} l^2 g_4(\zeta) + C_{2,a} (\frac{1-\alpha/3-\zeta_n}{R_0})^4 l^2 g_2(\zeta)], \tag{64}$$

$$g_1(\zeta) = \frac{\zeta^2}{2},\ g_2(\zeta) = \ln\frac{1-\alpha/3}{1-\alpha/3-\zeta} - \frac{\zeta}{1-\alpha/3},\ g_3(\zeta) = (1-\frac{\alpha}{3})\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta^3}{6},$$

$$g_4(\zeta) = (1-\frac{\alpha}{3})^2 \frac{\zeta^2}{2} - (1-\frac{\alpha}{3})\frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^4}{12}.$$

При $s > s_n$ имеем из (53)

$$[A]^{\#\#} = [A_a]^{\#\#}(s_n) + [A_a]^{\#}(s_n)\cdot(s-s_n),$$

$$[B]^{\#\#} = [B_a]^{\#\#}(s_n) + [B_a]^{\#}(s_n)\cdot(s-s_n) + B_{1,b} l^2 g_5(\zeta),$$

$$[C]^{\#\#} = [C_a]^{\#\#}(s_n) + [C_a]^{\#}(s_n)\cdot(s-s_n), \tag{65}$$

$$g_5(\zeta) = \frac{1}{2}[(1-\alpha/3-\zeta_n)^2(\zeta-\zeta_n) + \frac{(1-\alpha/3-\zeta)^3 - (1-\alpha/3-\zeta_n)^3}{3}].$$

Введем обозначения

$$\eta = v(l)/l,\ \xi = u(l)/l. \tag{66}$$

Тогда

$$\eta = \frac{\beta}{3} - \frac{2}{15}\alpha\beta + \frac{1}{l}[\varphi^{[1]}]^{\#}(l),\ \xi = -\frac{37}{80}\beta^2. \tag{67}$$

Пример.

Поперечное сечение балки, длина которой 6 *м*, представляет собой квадрат со стороной 0.4 *м*. Размер $h_1 = 0.18$ *м* (рис.2). Армирование симметричное – шесть стержней диаметром 2 *см*. Арматура класса А-III с модулем упругости $E_a = 2\cdot 10^5$ *МПа* и модулем сдвига $G_a = 0{,}8\cdot 10^5$ *МПа*. Бетон марки В35: начальный модуль упругости $E^{[0]} = 34{,}5\cdot 10^3$ *МПа*, начальный коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}2$, расчетные сопротивления бетона: на сжатие $R_{b,ser} = 25{,}5$ *МПа*, на растяжение $R_{bt,ser} = 1{,}95$ *МПа*. В соответствии с (2а) $H = 88{,}904\cdot 10^6$ *нм*^{2}. Аппроксимируя восходящую ветвь кривой $\sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o)$ на отрезке $[0, \hat{\varepsilon}_0/2]$ ($\hat{\varepsilon}_0$ соответствует наивысшей точке диаграммы) функцией $\sigma_o = (K^{[0]} + \hat{K}^{[1]}\varepsilon_o)\varepsilon_o$, получаем в случае одноосного сжатия в соответствии с [3] $\hat{K}^{[1]-} = 3{,}767\cdot 10^6$ *МПа*, в случае растяжения $\hat{K}^{[1]+} = -1{,}574\cdot 10^7$ *МПа*. Аналогично для модуля сдвига находим $\widehat{G}^{[1]-} = -4{,}786\cdot 10^6$ *МПа*, $\widehat{G}^{[1]+} = -3{,}883\cdot 10^7$ *МПа*.

На рис.4 приведены графики зависимости относительного прогиба η на конце консоли от β (т.е. от F_2) без учета нелинейности (кривая 1), при учете геометрической нелинейности (кривая 2) и при учете физической нелинейности (кривая 3) в пределах $0 \le \beta \le 0{,}02$ $(0 \le F_2 \le 24$ *кН*$)$ при $\alpha = -0{,}1$ $(F_1 = -247$ *кН*$)$. Из рисунка видно, что учет физической нелинейности приводит к существенному увеличнию прогиба (при $\beta = 0{,}02$ в 1,37 раза).

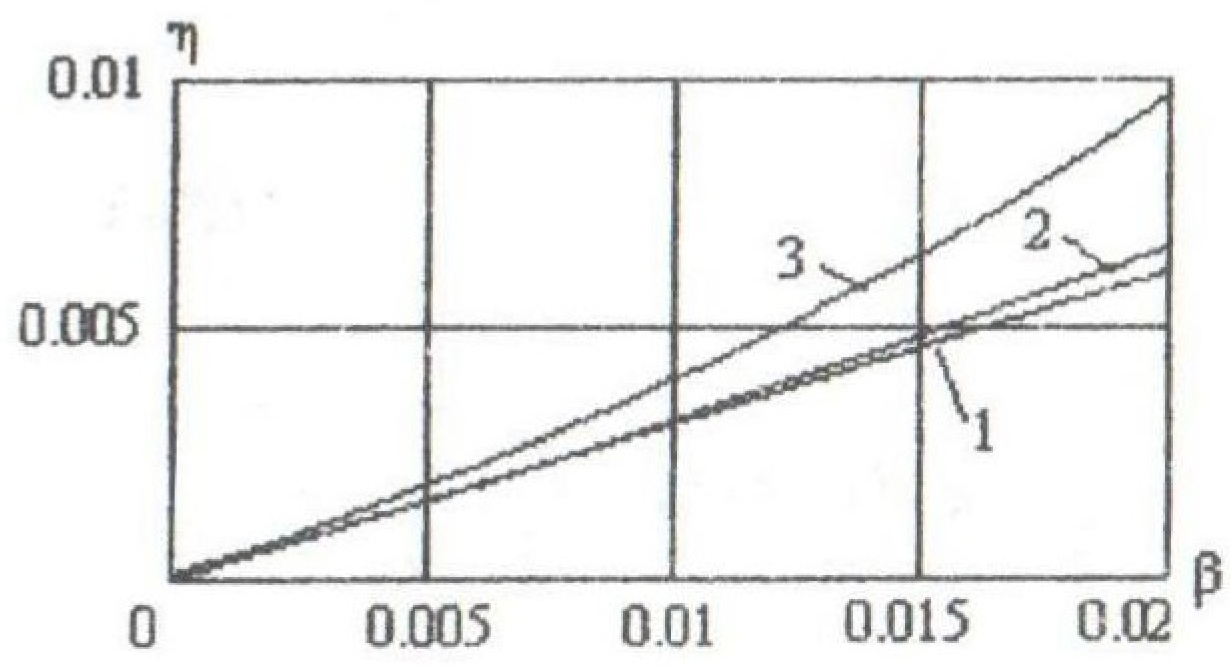

Рис.4

Вывод

Определение прогибов железобетонных балок без учета физической нелинейности бетона приводит к значительному их занижению.

Литература

1. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вестник ОГАСА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – с. 273 – 287.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986.– 336 с.
3. Фомин В.М., Фомина И.П. Определение секущих объемных модулей упругости и сдвига для бетона // Вестник ОГАСА. Вып. 26, – Одесса, 2007. – с. 301 – 306.