

## УСТОЙЧИВОСТЬ БЕТОННОЙ КОЛОННЫ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Кобринец В.М., проф., Фомина И.П.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
г. Одесса*

В качестве первой задачи рассмотрим проблему определения критических сил для стержня прямоугольного сечения, состоящего из двух участков разной жесткости (рис.1). Пусть этот стержень теряет устойчивость под действием центральной продольной силы  $P$ . Тогда в сечении  $M$  изгибающий момент будет равен  $-Py$ . Поэтому можно записать следующее соотношение [1]:

$$Hy'' = -Py. \tag{1}$$

Здесь  $H$  — изгибная жесткость стержня.

Разделив обе части (1) на  $H$  и введя обозначение

$$\frac{P}{H} = k^2, \tag{1a}$$

равенство (1) можно записать так

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{2}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет следующий вид:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{3}$$

На первом участке стержня ( $0 \leq x \leq l_1$ ) это выражение записывается так

$$y_1 = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x. \tag{4}$$

Здесь

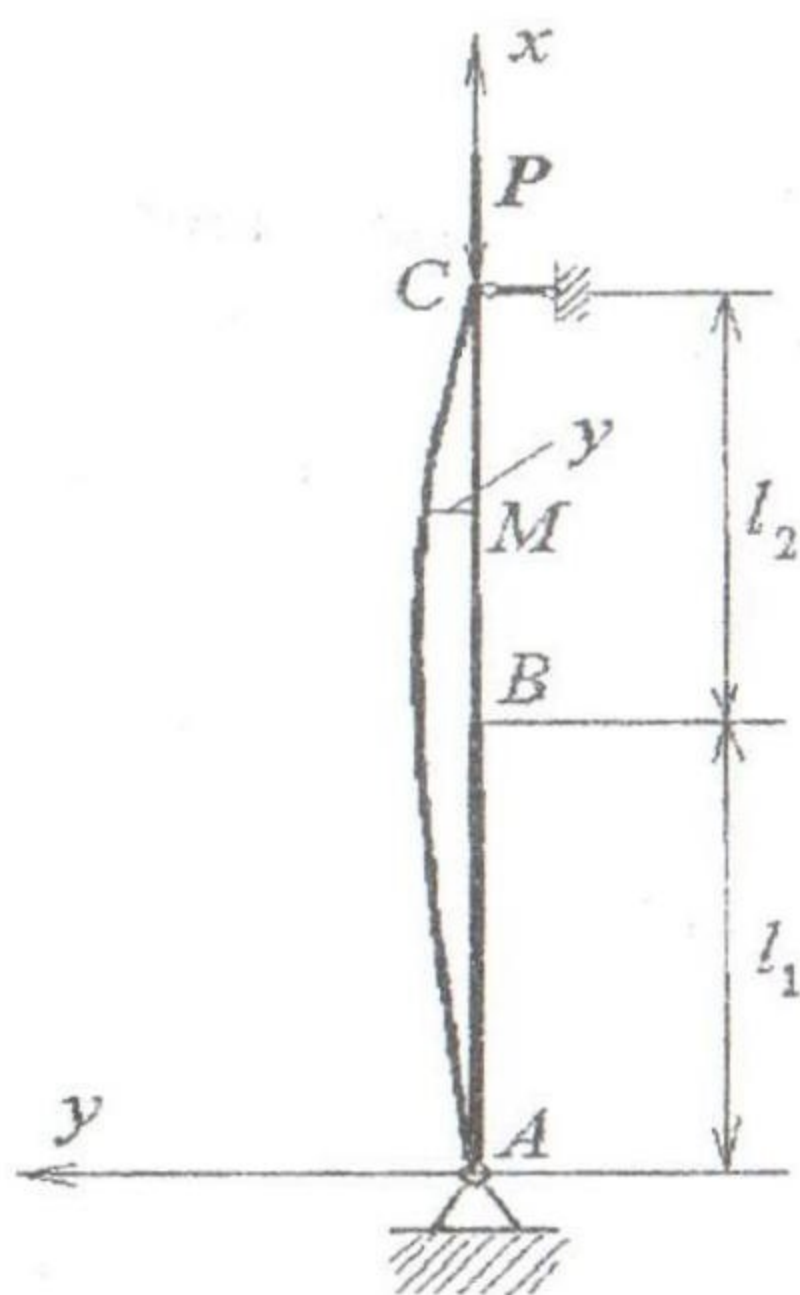


Рис. 1

$$k_1 = \sqrt{P/H_1} \quad (4a)$$

( $H_1$  — изгибная жесткость стержня на первом участке).

Из условия

$$y_1(0) = 0$$

следует, что  $C_1 = 0$ , и (4) принимает следующий вид:

$$y_1 = C_2 \sin k_1 x. \quad (5)$$

Для второго участка ( $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$ ) общее решение уравнения (2) записываем так

$$y_2 = C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x, \quad (6)$$

где

$$k_2 = \sqrt{P/H_2}. \quad (6a)$$

( $H_2$  — изгибная жесткость стержня на втором участке).

Запишем условия непрерывности функции прогибов  $y(x)$  и ее производной в пограничной точке участков

$$y_1(l_1) = y_2(l_1), \quad y_1'(l_1) = y_2'(l_1).$$

Используя (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} C_3 \cos k_2 l_1 + C_4 \sin k_2 l_1 &= C_2 \sin k_1 l_1, \\ -C_3 k_2 \sin k_2 l_1 + C_4 k_2 \cos k_2 l_1 &= C_2 k_1 \cos k_1 l_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем рассматривать (7) как линейную систему уравнений относительно  $C_3$  и  $C_4$ . Для ее решения используем правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos k_2 l_1 & \sin k_2 l_1 \\ -k_2 \sin k_2 l_1 & k_2 \cos k_2 l_1 \end{vmatrix} = k_2 (\cos^2 k_2 l_1 + \sin^2 k_2 l_1) = k_2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_2 \sin k_1 l_1 & \sin k_2 l_1 \\ C_2 k_1 \cos k_1 l_1 & k_2 \cos k_2 l_1 \end{vmatrix} = C_2 (k_2 \sin k_1 l_1 \cos k_2 l_1 - k_1 \cos k_1 l_1 \sin k_2 l_1),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos k_2 l_1 & C_2 \sin k_1 l_1 \\ -k_2 \sin k_2 l_1 & C_2 k_1 \cos k_1 l_1 \end{vmatrix} = C_2 (k_1 \cos k_1 l_1 \cos k_2 l_1 + k_2 \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_1), \quad (8)$$

$$C_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{C_2}{k_2} (k_2 \sin k_1 l_1 \cos k_2 l_1 - k_1 \cos k_1 l_1 \sin k_2 l_1),$$

$$C_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{C_2}{k_2} (k_1 \cos k_1 l_1 \cos k_2 l_1 + k_2 \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_1).$$

Тогда (6) запишется так:

$$y_2 = \frac{C_2}{k_2} [(k_2 \sin k_1 l_1 \cos k_2 l_1 - k_1 \cos k_1 l_1 \sin k_2 l_1) \cos k_2 x + (k_1 \cos k_1 l_1 \cos k_2 l_1 + k_2 \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_1) \sin k_2 x]. \quad (9)$$

Используем теперь условие равенства нулю прогибов в точке  $C$ :

$$(k_2 \sin k_1 l_1 \cos k_2 l_1 - k_1 \cos k_1 l_1 \sin k_2 l_1) \cos k_2 (l_1 + l_2) + (k_1 \cos k_1 l_1 \cos k_2 l_1 + k_2 \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_1) \sin k_2 (l_1 + l_2) = 0. \quad (10)$$

Разделим равенство (10) на произведение  $\cos k_1 l_1 \cos k_2 l_1 \cos k_2 (l_1 + l_2)$ . В результате будем иметь

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 l_1 - k_1 \operatorname{tg} k_2 l_1 + (k_1 + k_2 \operatorname{tg} k_2 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_1) \operatorname{tg} k_2 (l_1 + l_2) = 0.$$

Отсюда определяем, что

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 + \frac{k_1}{k_2} \frac{\operatorname{tg} k_2 (l_1 + l_2) - \operatorname{tg} k_2 l_1}{1 + \operatorname{tg} k_2 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_1} = 0.$$

Воспользовавшись формулой  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) / (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ , получаем

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} k_2 l_2 = 0. \quad (11)$$

Из (4а) и (6а) следует, что (11) является уравнением критических сил.

Введем обозначения

$$k_2 l = z, \quad \frac{k_1}{k_2} = a, \quad \frac{l_1}{l} = b_1, \quad \frac{l_2}{l} = b_2. \quad (12)$$

Здесь  $l = l_1 + l_2$ . Заметим, что  $a$ ,  $b_1$  и  $b_2$  являются характеристиками конструкции, не зависящими от  $P$ , причем

$$a = \sqrt{H_2 / H_1}, \quad b_1 + b_2 = 1. \quad (12a)$$

Тогда равенство (11) может быть записано в следующем виде:

$$\operatorname{tg} a b_1 z = -a \operatorname{tg} b_2 z. \quad (13)$$

Заметим, что при  $a > b_2/b_1$  графики функций  $f_1(z) = \operatorname{tg} a b_1 z$  и  $f_2(z) = -a \operatorname{tg} b_2 z$  имеют вид, представленный на рис. 2, а при  $a \leq b_2/b_1$  — на рис. 3. Очевидно, что наименьший положительный корень  $z_0$  уравнения (13) находится в пределах от  $\pi / 2m$  до  $\pi / m$  ( $m = \max(c_1, b_2)$ ,  $c_1 = a b_1$ ).

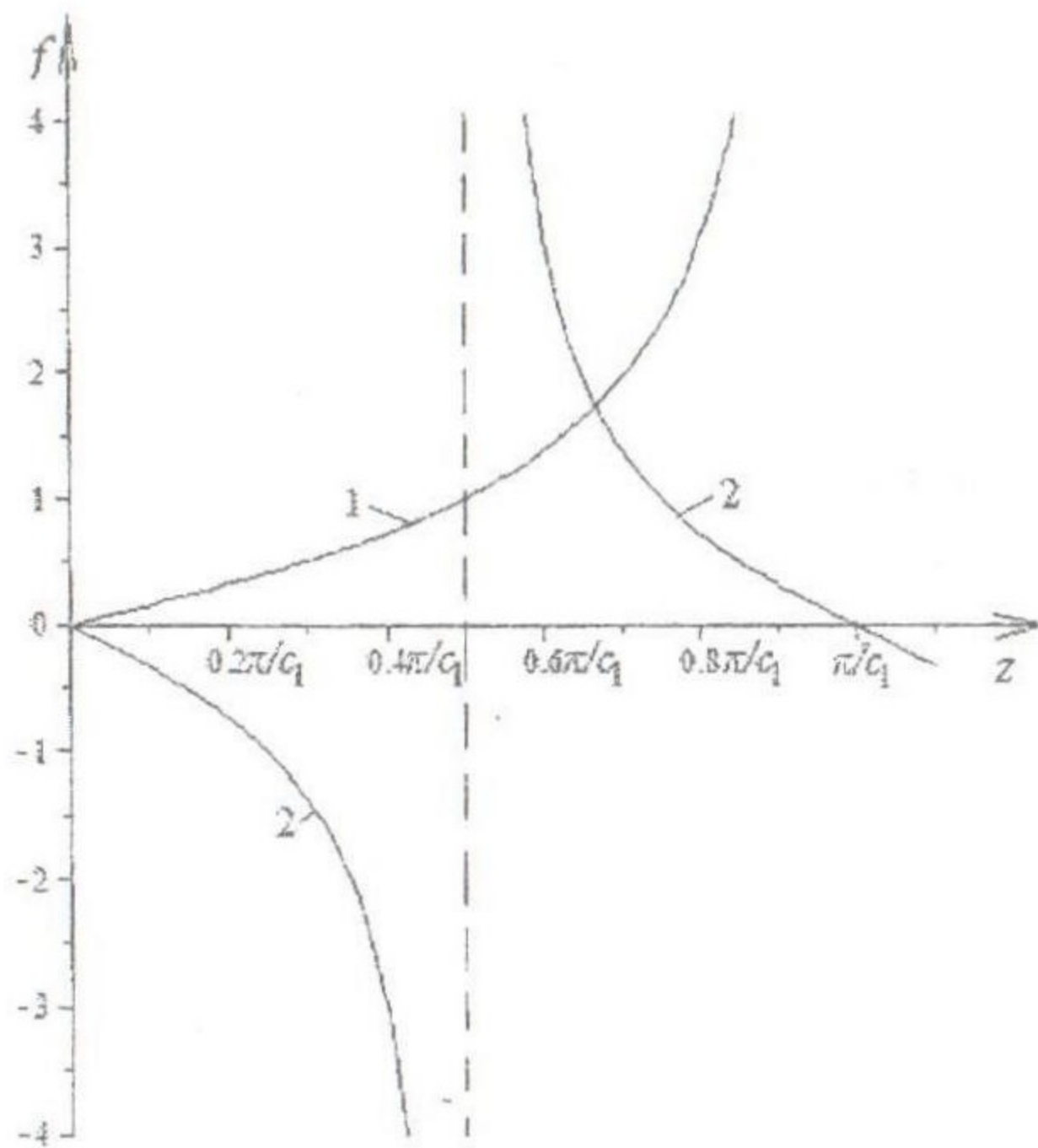


Рис. 2

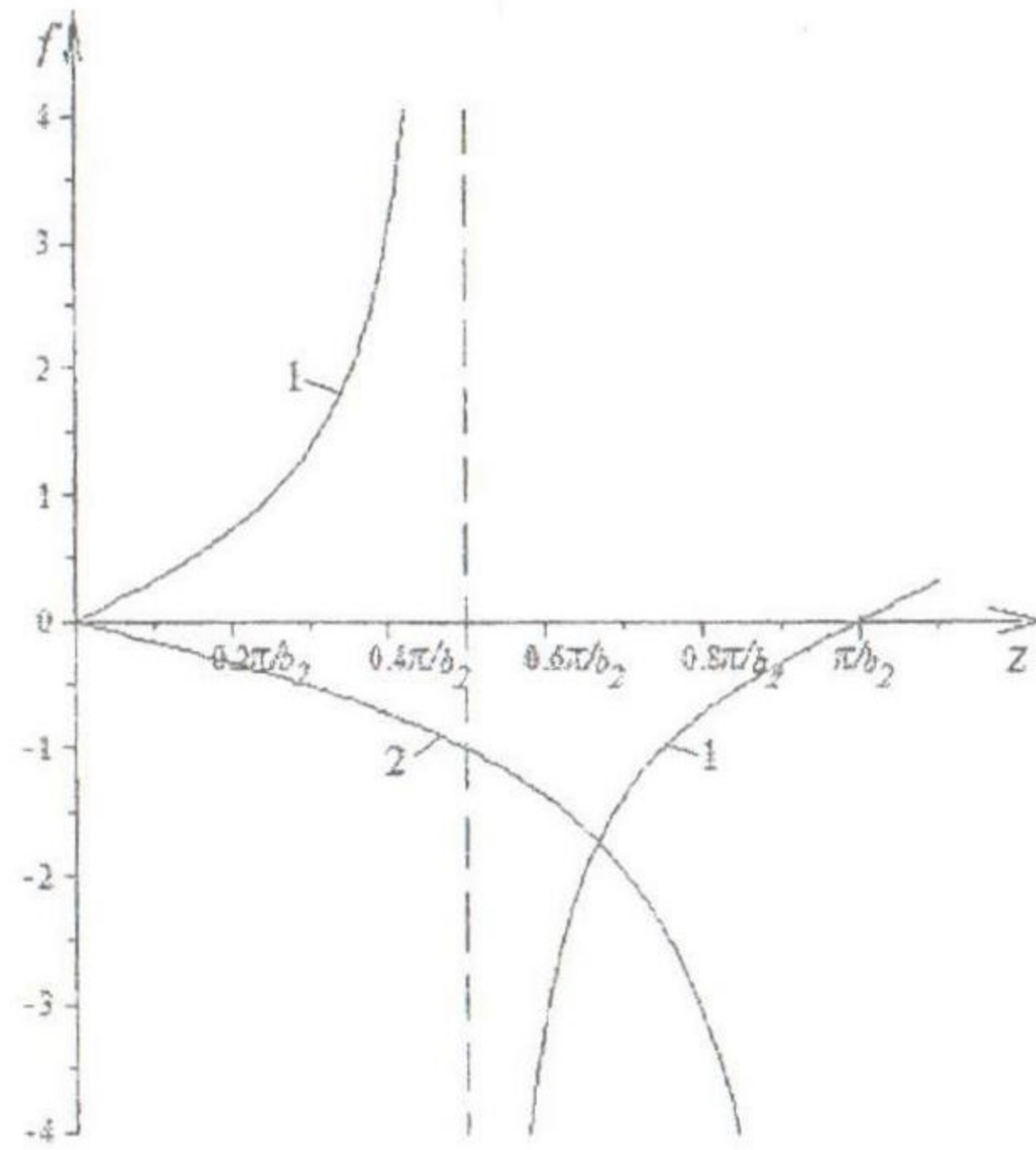


Рис. 3

Используем уравнение критических сил (13) к исследованию устойчивости бетонной колонны прямоугольного поперечного сечения, подвергающейся воздействию агрессивной среды. Предположим, во-первых, что коррозии подвергается нижний участок колонны, во-вторых, полагаем, что коррозия повреждает сечение равномерно по всему периметру. Тогда из (4а), (6а) и (12) следует, что

$$a = \sqrt{\frac{d_1 d_2^3}{(d_1 - 2h)(d_2 - 2h)^3}} \quad (14)$$

Здесь  $d_1$  и  $d_2$  — ширина и высота поперечного сечения,  $h$  — глубина зоны коррозии. Очевидно,

$$a > 1. \quad (14a)$$

Зафиксируем некоторое значение  $a$  и найдем значения наименьшего отличного от нуля положительного корня  $z_0$  уравнения (13) для ряда значений параметра  $b_1$  из интервала  $(0, 1)$ . Заметим, что значения  $z_0$  для  $b_1 = 0$  и для  $b_1 = 1$  могут быть найдены по обычной формуле для критической силы продольно сжатого шарнирно опертого стержня. Нетрудно убедиться в том, что в первом случае

$$z_0(0) = \pi, \quad (15a)$$

а во втором

$$z_0(1) = \pi / a. \quad (15b)$$

На рис. 4 сплошной линией представлен график зависимости  $z_0$  от  $b_1$  при  $a = 2$ . Кривую  $AC$  можно аппроксимировать при помощи двух парабол, уравнения которых имеют следующий вид:

$$z_0 = u_i (b_1 - p_i)^{r_i} + q_i \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

Здесь  $i = 1$  соответствует участку  $AB$ , а  $i = 2$  — участку  $BC$  кривой ( $B$  — точка перегиба кривой). Значения параметра  $p_i$  и  $q_i$  очевидны:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ ,  $q_1 = 3,141$ ,  $q_2 = 1,571$  ( $\pi$  и  $\pi/2$  — значения  $z_0$  в точках  $A$  и  $C$ ). Значения остальных параметров  $u_i, r_i$  определяются путем приравнивания  $z_0$  и  $b_1$  координатам двух точек на каждом из участков — точки  $B$  и

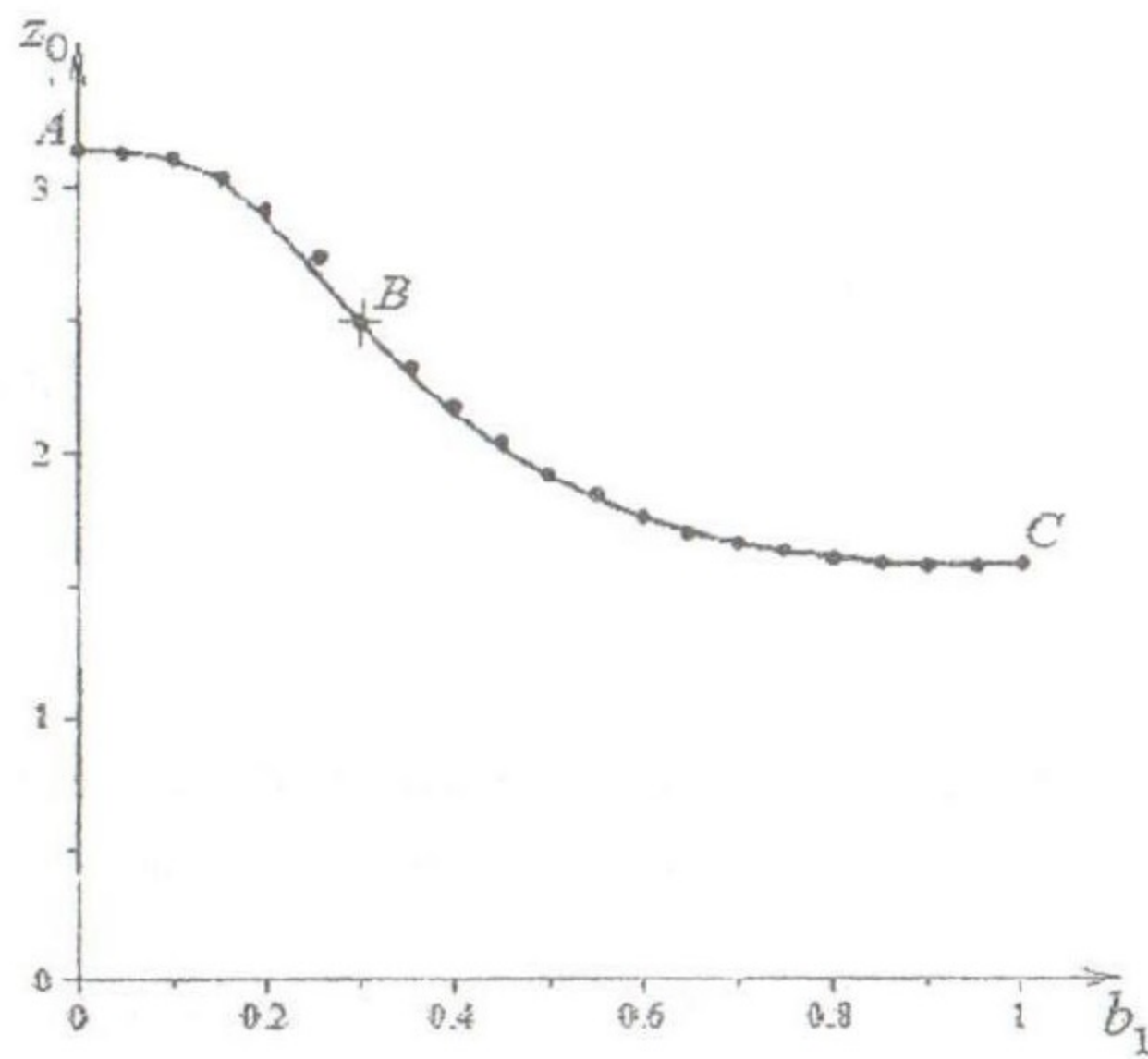


Рис. 4

чаем  $u_1 = 13,429$ ,  $u_2 = 2,485$ . Графики парабол нанесены на чертеж точками. Нетрудно заметить почти полное совпадение исходных графиков и построенных в соответствии с формулой (16).

Подобные выкладки были проделаны для ряда значений  $a$  в промежутке [1,4]. В результате были найдены следующие аппроксимационные зависимости:

$$\begin{aligned} b_{1,B} &= 0,033a^2 - 0,283a + 0,75; \\ z_{0,B} &= -0,119a^3 + 1,078a^2 - 3,124a + 5,306; \\ r_1 &= 2,5; r_2 = 0,32(a-1)^{1,545} + 2,5. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что соотношения (16) – (17) при значениях параметров (18) остаются справедливыми и при решении второй задачи — исследование устойчивости колонны при наращивании поперечного сечения одного из участков при выполнении следующего условия: номер 1 получает участок с меньшим поперечным сечением.

Предположим, что длина нижнего участка колонны изменяется с течением времени по закону

$$l_1(t) = v_0 t. \quad (19)$$

Кроме того, полагаем, что глубина поврежденной зоны определяется по формуле [2]

$$h(t) = h_0 e^{-\beta/t}. \quad (20)$$

точки, находящейся в середине участка. При этом оказывается, что между параметрами  $u_i, r_i, b_{1,B}$  и  $z_{0,B}$  ( $b_{1,B}$  и  $z_{0,B}$  — координаты точки  $B$ ) существует следующие зависимости:

$$\begin{aligned} u_1 &= (z_0(0) - z_{0,B}) / b_{1,B}^{r_1}, u_2 = \\ &= (z_{0,B} - z_0(1)) / (1 - b_{1,B})^{r_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В рассматриваемом случае были получены следующие значения:  $r_1 = 2,5$ ,  $r_2 = 2,82$ ,  $b_{1,B} = 0,316$ ,  $z_{0,B} = 2,419$ . Из формул (17) полу-

Тогда в соответствии с (14) имеем

$$a(t) = \sqrt{\frac{d_1 d_2^3}{(d_1 - 2h_0 e^{-\beta/t})(d_2 - 2h_0 e^{-\beta/t})^3}}, \quad (21)$$

$$b_1(t) = \frac{v_0}{l} t, \quad b_2(t) = 1 - \frac{v_0}{l} t.$$

При каждом  $t$  определяем значения  $a$  и  $b_1$ . Затем по найденному значению  $a$  из (18) находим  $b_{1,B}$ ,  $z_{0,B}$ ,  $r_1$  и  $r_2$ . Если  $b_1 \leq b_{1,B}$ , то из (17) находим  $u_1$ , а из (16)  $z_0$ . Если же  $b_1 > b_{1,B}$ , то из (17) определяем  $u_2$ , а затем из (16)  $z_0$ . Затем из (12) вычисляем  $k_2$ , а из (6а) — критическую силу.

**Пример.** Исследуем на устойчивость бетонную колонну при следующих значениях параметров:  $l = 16\text{м}$ ,  $d_1 = 0,4\text{м}$ ,  $d_2 = 0,5\text{м}$ ,  $E_b = 27 \cdot 10^3 \text{МПа}$ ,  $h_0 = 0,08\text{м}$ .  $\beta = 7,5\text{год}$ ,  $v_0 = 0,1 \text{м/год}$ .

Тогда

$$a(t) = 0,17888 \sqrt{\frac{1}{(0,5 - 0,16e^{-7,5/t})(0,4 - 0,16e^{-7,5/t})^3}},$$

$$b_1(t) = 0,00625t, \quad b_2(t) = 1 - 0,00625t.$$

На рис. 5 представлен график изменения критической силы  $P_{кр}$  (в кН) в зависимости от времени (в годах).

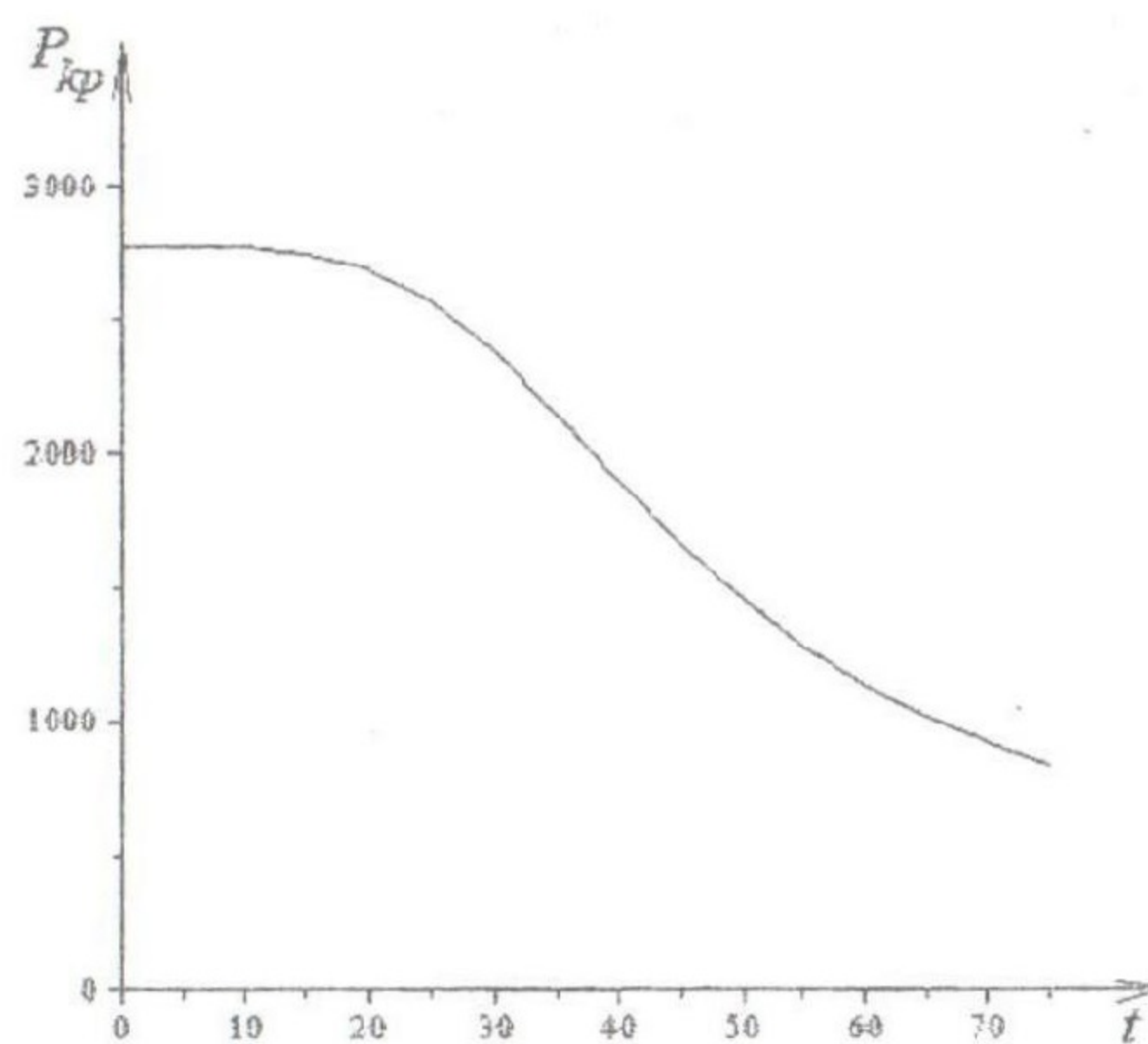


Рис. 5

## *Вывод*

Изложенная методика позволяет производить расчет однородных (в частности бетонных) колонн на устойчивость с учетом симметричного агрессивного воздействия окружающей среды, что дает возможность своевременно производить их усиление для обеспечения надежности конструкции.

## **Summary.**

The procedure stated here enables one to carry out calculations of stability of homogenous (particularly concrete) columns with taking into account symmetrical aggressive environmental impact, what gives a possibility to secure the reliability of constructions by means of strengthening the columns.

## *Литература*

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. — М. : Физматгиз. — 1963. — 867 с.
2. Сетков В.Ю., Шибанова И.С., Рысева О.П. Действие углекислого газа на железобетонные балки и плиты промышленных зданий и сооружений // Строительство и архитектура, №12, 1984. с. 1 — 4.