

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛОВОГО ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАНИЦ ВЕЩЕСТВА

Гергега А.Н.¹, Дрик Н.Г.², Максимов А.Л.²

¹Одесская государственная академия строительства
и архитектуры

²Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

Введение. Внутренние границы являются атрибутивной составляющей структуры вещества. Их возникновение – неизбежное следствие стохастических процессов самоорганизации, обусловленное, в частности, произвольностью формы кластеров и макроскопических структурных блоков.

Наблюдаемые сети внутренних границ материала топологически подобны квадрату Серпинского, и могут быть восстановлены суперпозицией его различных модификаций. В статье предложена модель силового поля внутренних границ, и получены аналитические соотношения для расчета полей трех модификаций ковра Серпинского.

Модель силового поля. Положим, что прямолинейные отрезки квадрата Серпинского соответствуют квазилинейным внутренним границам материала. Определим аналитически силовое поле, создаваемое полимасштабной сетью внутренних границ предфрактала Серпинского на произвольном шаге разбиения m .

Рассмотрим «проволочную» модель ковра Серпинского [1]. Пусть исходная квадратная рамка разделена четырьмя «проводами» на девять равных квадратов. Процедура многократно повторяется на каждой из 8^m получаемых на очередном шаге рамок (за исключением центральных). Положим также, что на каждой образующей рамок любого «поколения» с линейной плотностью λ содержатся точечные источники, создающие поля с напряженностью $E \sim 1/r^2$.

Пусть ковёр Серпинского с длиной стороны образующего квадрата, равной $2H$, расположен так, что его центр совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям. Составляющие вектора напряжённости, создаваемой отрезком, определяются соотношениями

$$\begin{cases} E_x = \lambda (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) / r, \\ E_y = \lambda (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) / r, \end{cases}$$

где α_i – угол между перпендикуляром длиной r , опущенным из точки, в которой определяется напряжённость, на отрезок или его продолжение, и соответствующим направлением на концевые точки отрезка.

Обозначим

$$A(u, v) = (u^2 + v^2)^{-1/2}, \quad B(u, v) = v / [u(u^2 + v^2)^{1/2}],$$

$$\xi(n, p) = -\xi + (-1)^n p, \quad \eta(n, p) = -\eta + (-1)^n p,$$

тогда составляющие вектора напряжённости, создаваемой ковром m -го поколения в произвольных точках, не лежащих на прямых, которые содержат отрезки сети, можно вычислить по рекуррентным соотношениям:

$$E_x = X_m(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \{X_{m-1}(\xi, \eta(i, H'')) + X_{m-1}(\xi(i, H''), \eta) + \\ + \sum_{j=1}^2 [X_{m-1}(\xi(j, H'), \eta(i, H')) + \lambda(-1)^j (A(\xi(j, H'), \eta(i, H')) - \\ - A(\xi(j, H), \eta(i, H')) + B(\xi(i, H'), \eta(j, H)) - B(\xi(i, H'), \eta(j, H')))]\},$$

$$E_y = Y_m(\xi, \eta) = X_m(\eta, \xi), \quad \text{где } H' = H/3, \quad H'' = 2H/3,$$

$$X_0(\xi, \eta) = \lambda \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 [(-1)^i A(\xi(i, H), \eta(j, H)) + (-1)^{j+1} B(\xi(i, H), \eta(j, H))],$$

$$Y_0(\xi, \eta) = X_0(\eta, \xi) = \lambda \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 [(-1)^i A(\eta(i, H), \xi(j, H)) + (-1)^{j+1} B(\eta(i, H), \\ \xi(j, H))].$$

Полученные соотношения – модификация результатов, описанных в [1].

Рассмотрим аналог ковра Серпинского с одной осью симметрии второго порядка (рис.1). С использованием тех же обозначений, и с учетом соотношения $h = H/3^m$, поле такого ковра определяется соотношениями

$$X_n(\xi; \eta) = X_{n-1}(\xi - 2h_{n-1}; \eta) + \sum_{i=1}^2 \{(-1)^{i+1} B(\xi + h_n; \eta(i, h_{n-1})) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^2 [X_{n-1}(\xi(i, 2h_{n-1}); \eta(j, 2h_{n-1})) + \\
& + (-1)^j \{A(\xi(i, h_{n-1}); \eta(j, h_n)) - A(\xi(i, h_{n-1}) - 2h_{n-1}; \eta(j, h_{n-1}))\}]; \\
Y_n(\xi; \eta) = & Y_{n-1}(\xi - 2h_{n-1}; \eta) + \sum_{i=1}^2 \{(-1)^i A(\xi + h_n; \eta(i, h_{n-1})) + \\
& + \sum_{j=1}^2 [Y_{n-1}(\xi(i, 2h_{n-1}); \eta(j, 2h_{n-1})) + \\
& + (-1)^j \{B(\eta(j, h_{n-1}); \xi(i, h_{n-1}) - 2h_{n-1}) - B(\eta(j, h_n); \xi(i, h_{n-1}))\}].
\end{aligned}$$

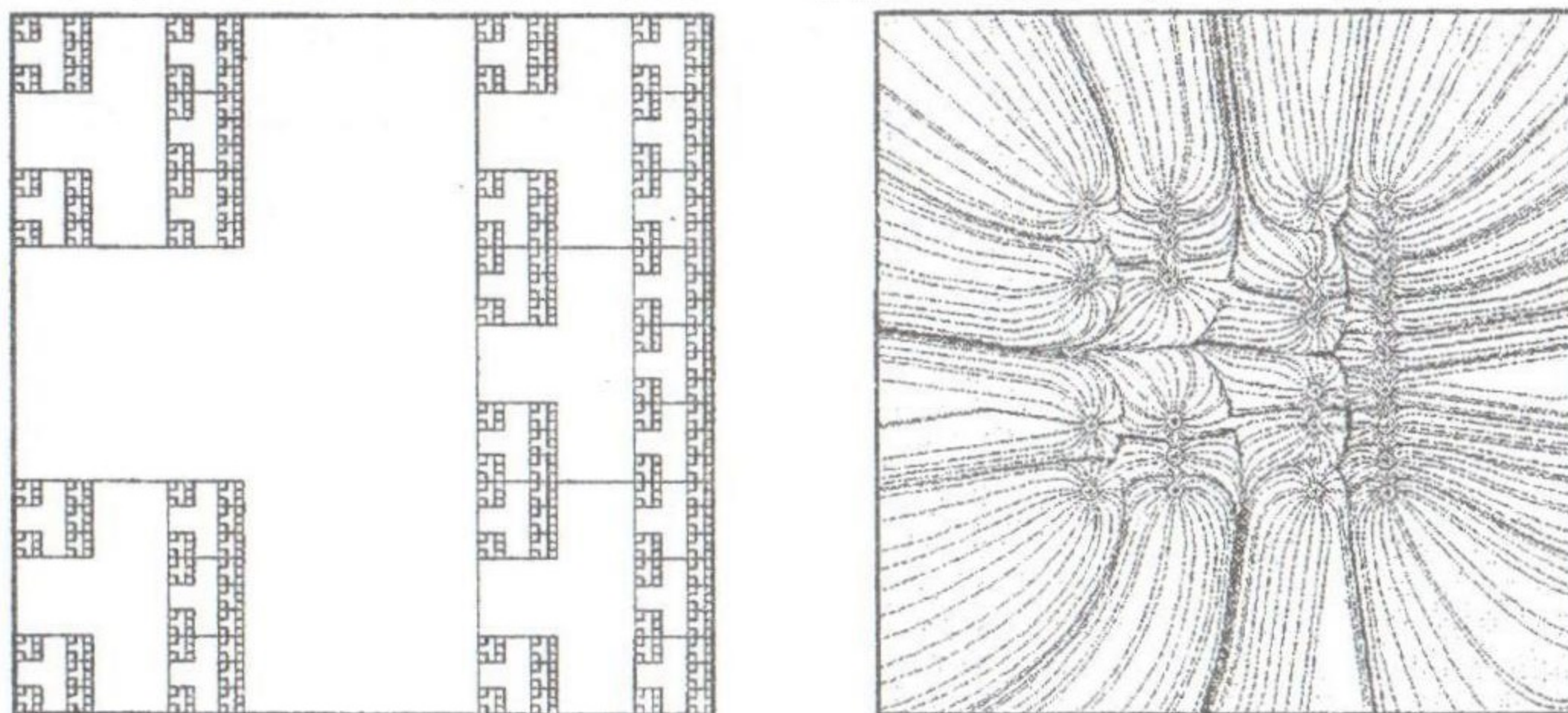


Рис. 1. Ковер Серпинского с одной осью симметрии и его силовое поле

Поле несимметричного ковра (рис. 2) может быть рассчитано по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
X_1(\xi; \eta) = & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^l [A(\xi(i, h_1); \eta(j, (2l-1)h_1/3)) - \\
& - B(\xi(j, (2l-1)h_1/3); \eta(i, h_1))]; \quad Y_1(\xi; \eta) = X_1(\eta; \xi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_n(\xi; \eta) = & X_{n-1}(\xi + 2h_{n-1}; \eta - 2h_{n-1}) + \sum_{i=1}^2 \{X_{n-1}(\xi; \eta(i, h_{n-1}) - h_{n-1}) + \\
& + (-1)^j [A(\xi - h_n; \eta(i, 2h_{n-1}) - h_{n-1}) - B(\xi(i, 2h_{n-1}) - h_{n-1}; \eta - h_n)] + \\
& + \sum_{j=1}^2 [X_{n-1}(\xi(i, 2h_{n-1}); \eta(j, h_{n-1}) + h_{n-1}) + (-1)^j \{A(\xi(i, h_{n-1}); \eta(j, h_{n-1}) + 2h_{n-1}) - \\
& - A(\xi(i, 2h_{n-1}) + h_{n-1}; \eta(i, h_{n-1}) + ((-1)^j - 1)h_{n-1}) + \\
& + B(\xi(i, h_{n-1}) + ((-1)^j - 1)h_{n-1}; \eta(i, h_{n-1}))\}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_n(\xi; \eta) = & Y_{n-1}(\xi + 2h_{n-1}; \eta - 2h_{n-1}) + \sum_{i=1}^2 \{Y_{n-1}(\xi; \eta(i, h_{n-1}) - h_{n-1}) + \\
& + (-1)^j [A(\xi(i, 2h_{n-1}) - h_{n-1}; \eta - h_n) - B(\eta(i, 2h_{n-1}) - h_{n-1}; \xi - h_n)] +
\end{aligned}$$

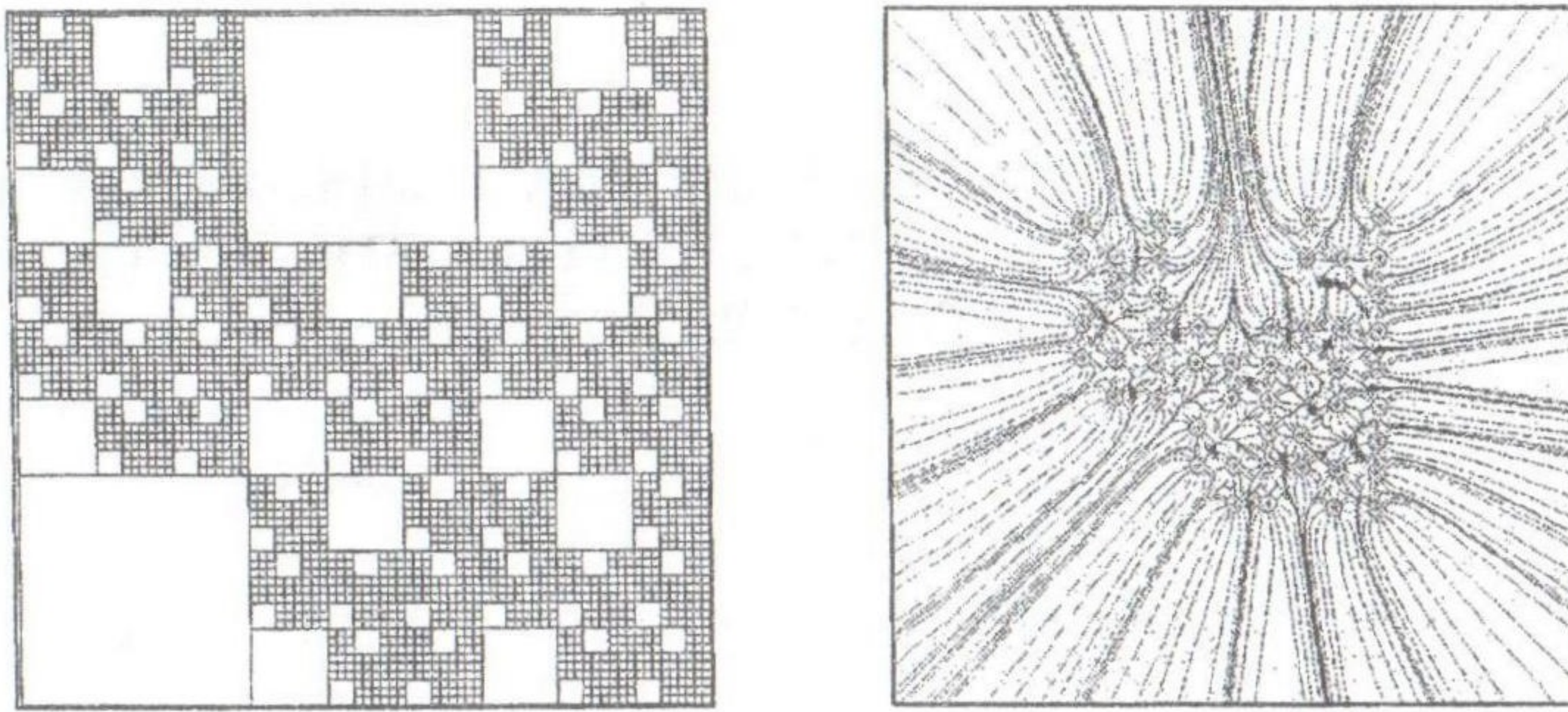


Рис. 2. Несимметричная модификация ковра Серпинского

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^2 [Y_{n-1}(\xi(i, 2h_{n-1}); \eta(j, h_{n-1}) + h_{n-1}) + (-1)^{j+1} \{B(\eta(j, h_{n-1}) + 2h_{n-1}; \xi(i, h_{n-1})) - \\
 & - B(\eta(i, h_{n-1}) + ((-1)^j - 1)h_{n-1}; \xi(i, 2h_{n-1}) + h_{n-1}) + \\
 & + A(\xi(i, h_{n-1}) + ((-1)^j - 1)h_{n-1}; \eta(i, h_{n-1}))\}]; n = 2, 3 \dots m;
 \end{aligned}$$

$$E_x = E_x(x; y) = X_m(-x; -y), \quad E_y = E_y(x; y) = Y_m(-x; -y); \quad h_n = H \cdot 3^{n-m}.$$

Заключение. Проведенный расчет и визуализация силовых полей нескольких модификаций ковра Серпинского позволяют использовать модели регулярных фракталов для описания полей механических напряжений произвольных сетей внутренних границ. Кроме того, предложенная модель открывает возможность с единых позиций описывать характер распределения и взаимодействия внутренних границ в различных асимптотиках вещества.

Summary

The mathematical model of the inner boundaries networks of composite materials is proposed. At the model analytically determined the force field created by an arbitrary pre-fractal Sierpinski and its modification.

Литература

1. Герсга А.Н., Дрик Н.Г., Угольников А.П. Ковер Серпинского с гибридной разветвленностью: перколяционный переход, критические показатели, силовое поле. // УФН – 2012. – Т. 182, вып. 5. – С. 555-557.