УДК 593.3

О РЕШЕНИИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И УРАВНЕНИЯХ БЕЛЬТРАМИ

Барановский В.И., *к.т.н. доц.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

Решение пространственной задачи теории упругости сводится к системе 15 уравнений относительно векторов неизвестных перемещений $\vec{z}$, деформаций $\vec{\varepsilon}$ и напряжений $\vec{\sigma}$ и соответствующих граничных условий на поверхности тела. В [1] приведено общее решение этой системы уравнений в классе функций, удовлетворяющих бигармоническим уравнениям (однородным или неоднородным) и условиям на поверхности.

В статической постановке эта система есть результатом синтеза основных уравнений теории упругости – условий равновесия, геометрических уравнений (уравнений Коши) и физических (закон Гука) и после исключения алгебраических уравнений (деформаций) имеет вид:

$$\begin{cases} A\vec{\sigma} = \vec{P},(\vec{0}) \\ A^T\vec{z} = B\vec{\sigma}, \end{cases} \qquad \vec{z}/_{s_1} = \vec{g}; \qquad \vec{\sigma}/_{s_2} = L\vec{P}_S; \tag{1}$$

Здесь подразумевается, что на части поверхности S_1 заданы кинематические а на S_2 - статические граничные условия; $A = |A_0, A_X|$ - матричный оператор условий равновесия,

В- матрица физических констант,

$\vec{P}$, $\vec{P}_S$ - вектор объемных и поверхностных сил,

$\vec{g}$ - заданные перемещения на части поверхности s_1,

L- матрица, элементами которой являются направляющие косинусы нормали к поверхности в рассматриваемой точке.

При решении задачи в перемещениях напряжения, определенные из второго уравнения (1), подставляются в первое и система девяти уравнений (1) сводится к трем дифференциальным уравнениям в частных производных. Эти уравнения называют условиями равновесия в перемещениях. В матричной форме они имеют вид

$$AKA^T = \vec{P},(\vec{0}), \; K = B^{-1} \tag{2}$$

и для практического применения чаще всего приводятся к известной форме уравнений Ляме. Преимущества этой формы записи состоит в том, что там выделены операторы Лапласа ∇^2 и функция объемной деформации $\theta = \theta(x, y, z)$, которая в случае отсутствия объемных сил является гармонической функцией - $\nabla^2\theta = 0$; однако возможны и другие формы записи уравнений (2).

Перемещения можно найти и по деформациям, интегрируя уравнения Коши. Деформации должны быть совместными, обеспечивая сплошное неразрывное деформирование. Шесть известных условий совместности деформаций Сен-Венана записанные в матричной форме имеют вид

$$C\vec{\varepsilon} = 0, \tag{3}$$

где C- дифференциальный оператор совместности деформаций, компонентами которого являются частные производные второго порядка [3]. Таким образом, деформации будут совместны, если они удовлетворяют условиям (3). Для операторов совместности деформаций С и условий равновесия А справедливы соотношения

$$CA^T = 0, \;\; AC^T = 0. \tag{4}$$

В силу первого из соотношений (4) условие совместности (3) является и условием интегрируемости уравнений Коши.

При решении задачи в напряжениях достаточно общая система разрешающих уравнений получается, если второе уравнение (1) слева домножить на оператор C ,тогда с учетом (4) получим

$$\begin{cases} A\vec{\sigma} = \vec{P}(\vec{0}) \\ CB\vec{\sigma} = \vec{0} \end{cases} \tag{5}$$

Второе уравнение системы (5) представляет собой непосредственно условие совместности деформаций в напряжениях. Таким образом, если деформации, определённые по некоторым напряжениям из физических соотношений, удовлетворяют условиям совместности (3), то такие напряжения называют совместными. С другой стороны, напряжения, удовлетворяющие условиям совместности деформаций в напряжениях, будут совместными напряжениями. Напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, будут равновесными. Далее, напряжения, удовлетворяющие условиям равновесия и условиям совместности, будут истинными.

Система девяти дифференциальных уравнений (5) является достаточно общей и может решаться при уменьшении количества уравнений в двух направлениях.

Выбирая для совместных напряжений выражение

$$\vec{\sigma} = KA^T \vec{z}\,, \tag{6}$$

автоматически удовлетворяем уравнению совместности напряжений (второе уравнение (5)) при произвольной вектор-функции $\vec{z}$. Для определения этой функции подставим выражение (6) в первое из уравнений (5) - условие равновесия - и получим уравнение метода перемещений (2).

Второе направление решения системы (5) предполагает выбор равновесных напряжений в форме

$$\vec{\sigma} = C^T \vec{s}\,, \tag{7}$$

где $\vec{s}$ - неизвестная вектор-функция напряжений. При этом условия равновесия выполняются для произвольной функции $\vec{s}$. Подстановка равновесных напряжений (7) в условия совместности - второе из соотношений в (5) - позволяет получить систему из шести дифференциальных уравнений для определения $\vec{s}$

$$CBC^T \vec{s} = 0\,. \tag{8}$$

В работе [2] получены определенные закономерности, позволяющие систему из шести уравнений (8) свести к трем уравнениям относительно функции напряжений $\vec{s}$,проведена оценка этих уравнений , а также найден способ их решения и определения функции $\vec{s}$.Таким образом и в методе напряжений задача сведена к трем дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка каждое относительно функции напряжений, по аналогии с методом перемещений.

При решении задачи в напряжениях принято также рассматривать систему из девяти уравнений – трех условий равновесия и шести уравнений Бельтрами [4] (при отсутствии объемных сил) или уравнений Бельтрами-Мичелла [5] при их наличии. Эти шесть уравнений в литературе принято называть условиями совместности в напряжениях - (см. например [3]). Введя в рассмотрение дифференциальные операторы $A_2, \vec{x}_1$ представим уравнение Бельтрами в матричной форме - второе уравнение в (9) - и запишем их в виде системы уравнений вместе с условиями равновесия

$$\begin{cases} A\vec{\sigma} = \vec{P}(\vec{0}) \\ (1+\mu)\nabla^2\vec{\sigma} + A_2^T \vec{x}_1 s_0 = \vec{0} \end{cases} \tag{9}$$

где $s_0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $\qquad A_2 = \left| A_0 , A_x / 2 \right|$

$$\bar{x}_1(..) = \left| \partial x(..), \partial y(..), \partial z(..) \right|^T ,$$

$$\nabla^2(...) = \partial x^2(...) + \partial y^2(...) + \partial z^2(...),$$

∂x - условное обозначение частных производных –

$$\partial x(...) = \frac{\partial(...)}{\partial x}, \qquad \partial y^2(...) = \frac{\partial^2(...)}{\partial y^2} \qquad \text{и т.д.}$$

μ - коэффициент Пуассона.

Как видно в уравнениях Бельтрами, как и в уравнениях Ляме, в результате преобразований выделен оператор Лапласа ∇^2 и гармоническая функция s_0. Уравнение Бельтрами может быть получено двумя способами. В первом, в условия совместности деформаций подставляются вместо деформаций напряжения из закона Гука, а затем, для исключения смешанных производных касательных напряжений определенным образом используются условия равновесия. Второй способ предполагает использование уравнений Ляме.

Кроме того важно отметить, что напряжения, удовлетворяющие уравнениям Бельтрами не обязательно будут совместными. При их выводе, как уже отмечалось, определенным образом задействованы условия равновесия и привлечение дополнительных слагаемых может «деформировать» условия совместности.

Система уравнений Бельтрами - система двенадцатого порядка, тогда как разрешающие уравнения относительно $\vec{z}$ (2) или относительно функции напряжений $\vec{s}$ [2] - представляют систему шестого порядка. Поэтому класс функций, удовлетворяющий уравнениям Бельтрами - шире чем это необходимо, они в общем случае не удовлетворяют условиям равновесия . Характеризация "ширины" этого класса функций и возможности выделения из него совместных и истинных напряжений подлежат исследованию и определению . Задача упрощается, если решать систему (9) "сверху в низ " - сначала разыскивается система равновесных напряжений , а для определения имеющихся там произвольных функций используется уравнение Бельтрами и граничные условия. Так, или почти так, учитывая полуобратный метод, решены, в частности, известные задачи Сен-Венана о кручении и поперечном изгибе. Другими словами, если напряжения равновесны и при этом удовлетворяют уравнениям Бельтрами , то они будут и совместными и, естественно, истинными. Обратное не всегда справедливо: если напряжения удовлетворяют уравнениям Бельтрами, то они не обязательно совместны.

Укажем на одно частное решение уравнений Бельтрами. Вектор $\vec{f}\,(x,y,z)$ из шести гармонических функций будет решением уравнений Бельтрами если сумма трех первых функций равна нулю.

Для доказательства отметим, что уравнение Бельтрами, второе уравнение в (9), состоит из двух слагаемых. В нашем случае по условию

$$s_0 = f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

и второе слагаемое в (9) равно нулю, а так как функции гармоничны, то и первое слагаемое равно нулю, т.е.

$$\nabla^2 \vec{f} = 0, \qquad \vec{f} = \vec{f}(x,y,z).$$

Заключение

Как следствие можно сформулировать следующее утверждение: если у шестимерного вектора $\vec{f}$ сумма трех первых функций равна нулю, и хотя бы одна из функций не гармонична, то такой вектор не удовлетворяет уравнениям Бельтрами.

Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров. Ниже приведены три вектора полиномиальных напряжений с различными свойствами

$$\vec{\sigma}_1 = \begin{vmatrix} (y^2 - z^2)x \\ (z^2 - x^2)y \\ (z^2 + xy)(x-y) \\ (y^2 - x^2)z \\ xyz \\ (x^2 - y^2)z \end{vmatrix}, \quad \vec{\sigma}_2 = \begin{vmatrix} yz \\ -2xy \\ (2x - z)y \\ (z^2 + xz - y^2)/2 \\ (8x - z)z/4 \\ (x + 2z)y/2 \end{vmatrix}, \quad \vec{\sigma}_3 = \begin{vmatrix} 2x(z-y) \\ 2y(x-z) \\ 2z(y-x) \\ (x^2 - y^2) + z(x-y) \\ (y^2 - z^2) + x(y-z) \\ (z^2 - x^2) + y(z-x) \end{vmatrix}.$$

Первая система напряжений удовлетворяет уравнениям Бельтрами, но является несовместной. Вторая система напряжений совместна, но не удовлетворяет уравнениям Бельтрами. Третья система напряжений является и совместной и удовлетворяет уравнениям Бельтрами.

Summary

The article describes the different approaches to solving spatial problems of the theory of elasticity in stresses. The analysis of Beltrami equation and suggested a particular solution in the harmonic functions. It is show that the voltage satisfies the Beltrami equation can be incousistent.

Литература

1.Барановский В.И. О функциональном представлении для векторов напряжений, деформаций и перемещений. Вестник ОГАСА, №40, 2010.

2.Барановский В.И. Развитие метода напряжений пространственной задачи теории упругости. Вестника ОГАСА, № 2012г.

3.Х.Хан. Теория упругости. Основы линейной теории упругости и её применения. Москва, «Мир», 1988.

4.Beltrami E., Osservationi sulla Nota precedente (del solio Morera), Rend. Lincei, 1, №5 (1892), 141.

5.Michell J.H., On the Dirrect Determination of stress in Elastic Solid, with Applications to the Theory of Plates. Proc London Math Sos., 31 (1899-1900) 100.