

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРУЗА НА КОНСОЛИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

Исследуются нестационарные колебания сосредоточенной массы, расположенной на конце вертикальной консольной балки, основным материалом которой является несимметрично нелинейно упругим (т.е. обладающий различной нелинейной упругостью в сжатой и растянутой зонах), а материал арматуры является линейно упругим. Зависимости между перемещениями конца консоли и действующими на нее силами определены в [1]. Точка закрепления балки совершает горизонтальные колебания при заданном законе изменения ускорения $w = w(t)$.

В [1] показано, что составляющие ξ и η относительного перемещения конца консоли могут быть определены по формулам

$$\xi = -\frac{37}{80}\beta^2, \quad \eta = \frac{\beta}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\alpha\right) + \frac{1}{l}[\varphi^{[1]}]^\#(l). \quad (1)$$

Здесь

$$\xi = \frac{u(l)}{l}, \quad \eta = \frac{v(l)}{l}, \quad \alpha = \frac{F_{1x}l^2}{H}, \quad \beta = \frac{F_{2y}l^2}{H} \quad (1a)$$

(l – длина консоли, $u(l)$ и $v(l)$ перемещения конца балки в направлении осей x и y соответственно, F_{1x} и F_{2y} – проекции сил F_1 и F_2 , приложенных к балке, на эти оси (рис.1)). Заметим, что параметры α и β характеризуют величины продольной и поперечной нагрузок. В случае симметричного армирования величина H определяется из формулы

$$H = E_1^{[0]}J + 2E_a S_1 h_1^2 \quad (2)$$

$$(E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu^2), \quad E^{[0]} - \text{модуль линейной упругости основного материала, } \nu - \text{его коэффициент}$$

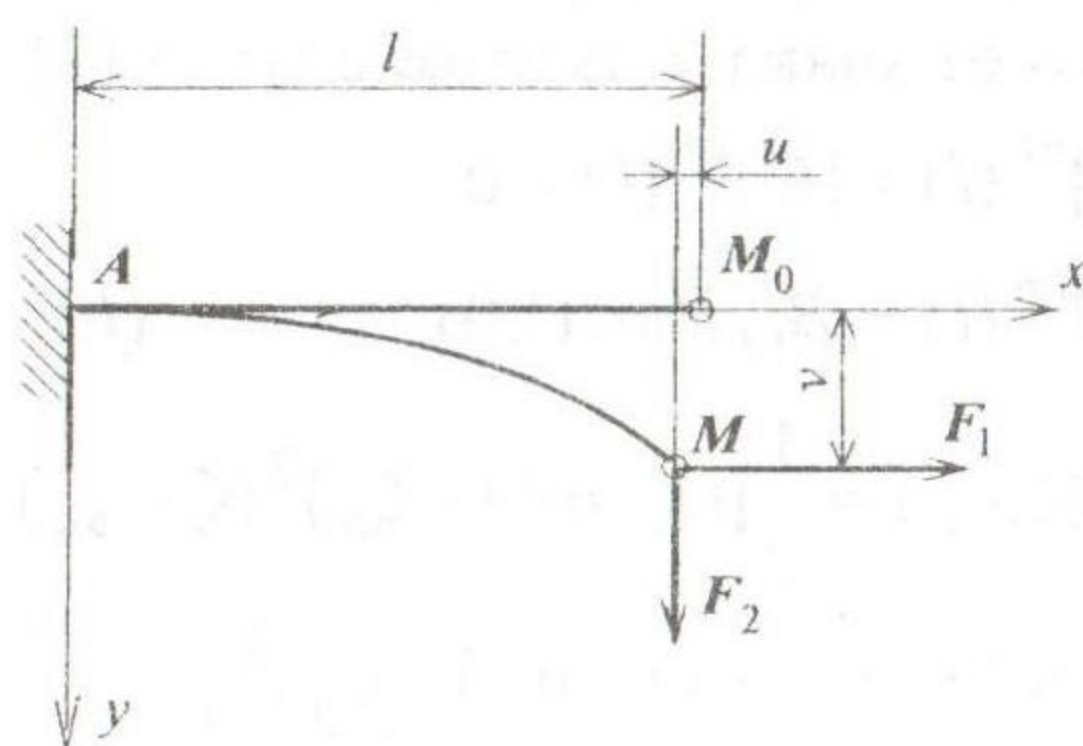


Рис.1

доль линейной упругости основного материала, ν – его коэффициент

Пуассона; $J = dh^3 / 12$ – момент инерции поперечного сечения, E_a – модуль упругости арматуры; S_1 – площадь сечения верхней и нижней арматуры, $S = dh$; размеры d , h и h_1 показаны на рис.2).

Величина $[\varphi^{[1]}]^\#(l)$ определяется из формулы

$$[\varphi^{[1]}]^\#(l) = -\frac{1}{H}([A]^\#\#(l)\alpha^2 + [B]^\#\#(l)\alpha\beta + [C]^\#\#(l)\beta^2), \quad (3)$$

Выражения для величин $[A]^\#\#(l)$, $[B]^\#\#(l)$ и $[C]^\#\#(l)$, входящих в правую часть (3), приводятся в [1]. Отметим только, что они являются непрерывными функциями параметров α и β при $|\beta| \geq \beta_0$, при этом $[A]^\#\#(l)$ и $[C]^\#\#(l)$ являются кососимметричными функциями β , а $[B]^\#\#(l)$ – симметричной:

$$[A]^\#\#(l) = [A]^\#\#+(l)\text{sgn}(\beta), \quad [C]^\#\#(l) = [C]^\#\#+(l)\text{sgn}(\beta), \quad (4)$$

$$[B]^\#\#(l) = [B]^\#\#+(l),$$

где $[A]^\#\#+(l)$, $[B]^\#\#+(l)$ и $[C]^\#\#+(l)$ вычислены при $\beta > 0$.

Из (3) и (4) следует, что равенство (1) может быть записано так

$$\eta = \beta/3 + \eta_0(\alpha, \beta), \quad (5)$$

где

$$\eta_0(\alpha, \beta) = -\frac{2}{15}\alpha\beta - \frac{1}{lH}([A]^\#\#+(l)\alpha^2 \text{sgn}(\beta) + [B]^\#\#+(l)\alpha\beta + [C]^\#\#+(l)\beta^2 \text{sgn}(\beta)), \quad (5a)$$

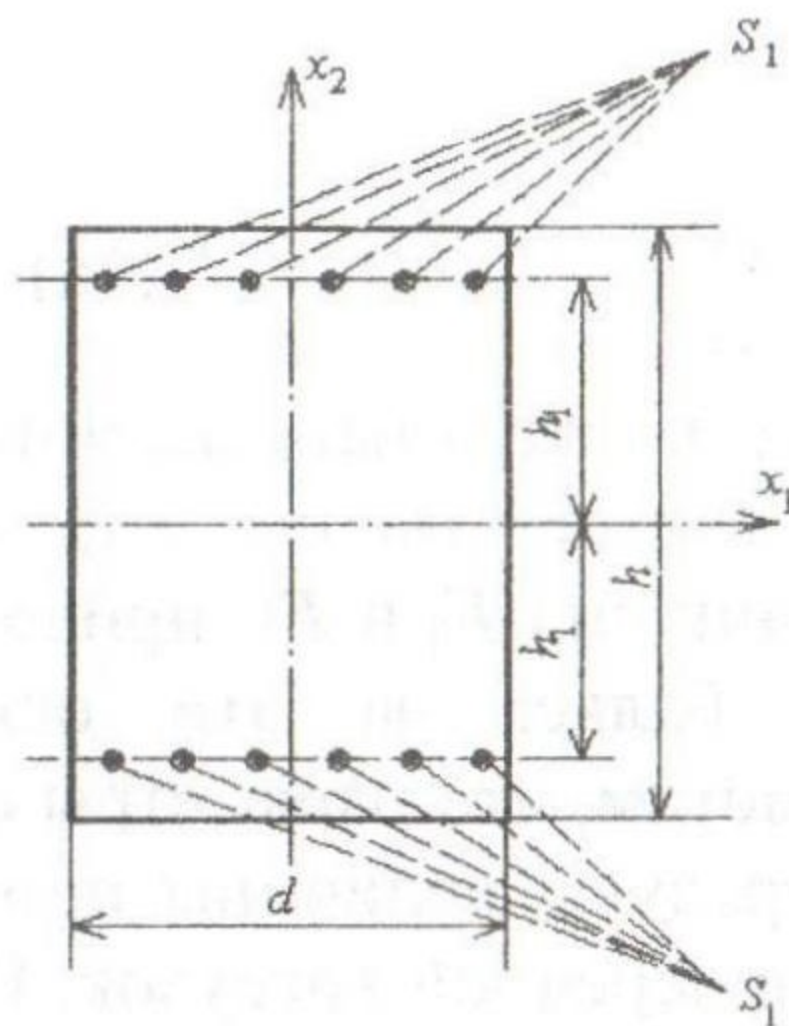


Рис.2

причем $[A]^\#\#(l)$, $[B]^\#\#(l)$ и $[C]^\#\#(l)$ зависят от того, содержит ли балка участок, состоящий из растянутой и сжатой зон [1]. При $|\beta| \leq \beta_0$ ($\beta_0 = R_0 |\alpha| / (1 - \alpha/3)$) балка такого участка не содержит, т.е. она целиком состоит из одной зоны – растянутой или сжатой – в зависимости от знака α . В этом случае [1]

$$[A]^\#\#(l) = [C]^\#\#(l) = 0,$$

$$[B]^\#\#(l) = B_{1,b} l^2 g_5(1,0), \quad (6)$$

$$g_5(\zeta, \zeta_n) = \frac{1}{2}[(1 - \alpha/3 - \zeta_n)^2 (\zeta - \zeta_n) +$$

$$+ \frac{(1 - \alpha/3 - \zeta)^3 - (1 - \alpha/3 - \zeta_n)^3}{3}],$$

В [1] показано, что $B_{1,b}$ представляет собой постоянную величину, зависящую от упругих свойств основного материала и арматуры, а также от геометрических характеристик поперечного сечения.

Пусть теперь $|\beta| > \beta_0$. В этом случае [1] балка состоит из двух участков: a и b (рис.3). На первом из них в балке имеются две зоны – сжатая и растянутая, второй участок содержит только одну зону. Дли-

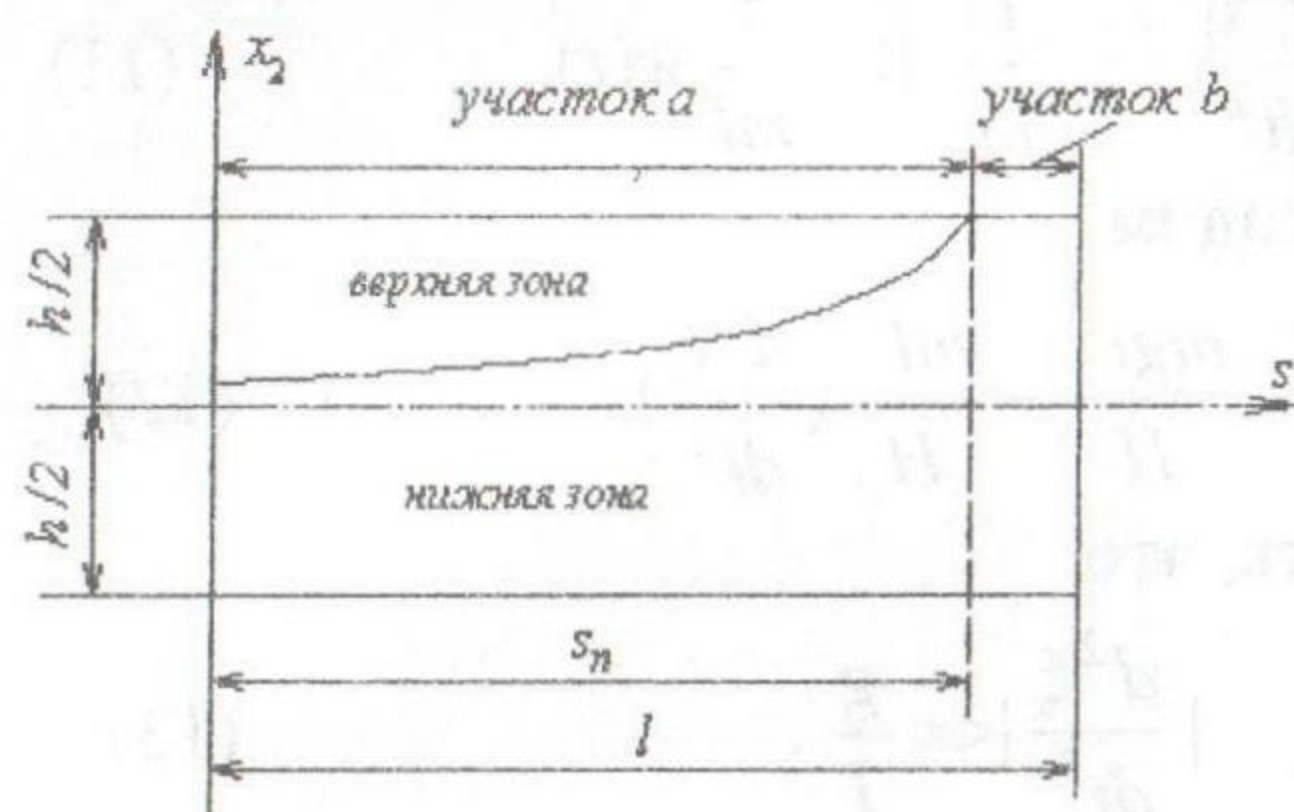


Рис.3

на s_n участка a определяется по формуле

$$s_n = \zeta_n l, \quad \zeta_n = 1 - \frac{\alpha}{3} - R_0 \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, \quad R_0 = 2 \frac{E_{s,2} l}{h} \quad (7)$$

Коэффициенты $[A]^{##}(l)$, $[B]^{##}(l)$, $[C]^{##}(l)$ определяются так

$$\begin{aligned} [A]^{##}(l) &= [A_a]^{##}(s_n) + [A_a]^\#(s_n) \cdot (l - s_n), \\ [B]^{##}(l) &= [B_a]^{##}(s_n) + [B_a]^\#(s_n) \cdot (l - s_n) + B_{1,b} l^2 g_5(1, \zeta_n), \\ [C]^{##}(l) &= [C_a]^{##}(s_n) + [C_a]^\#(s_n) \cdot (l - s_n). \end{aligned} \quad (8)$$

В [1] показано, что при $\beta = \beta_0$ $[A]^{##}(l)$ и $[C]^{##}(l)$ обращаются в нуль, а $[B]^{##}(l)$ становится равным $B_{1,b} l^2 g_5(1, 0)$. Отсюда следует, что $\eta_0(\alpha, \beta)$ в (5) как функция параметра β непрерывна. Кроме того, из (5а) следует, что эта функция кососимметрична по β . Можно показать, что $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ при фиксированном α монотонна, а следовательно, обратима. Так как функция, обратная кососимметричной, также кососимметрична, то функцию, обратную $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ ($\alpha = const$), определенной формулой (5), будем искать в следующем виде:

$$\beta = 3\eta + U\eta + V\eta^3. \quad (9)$$

Замечание 1. Пусть α фиксировано. Зададимся двумя значениями β : β_1 и β_2 и найдем два соответствующих значения η : η_1 и η_2 из (5). Подставляя последовательно β_1, η_1 и β_2, η_2 в (9), получаем два уравнения относительно U и V , откуда их и определяем.

Рассмотрим движение сосредоточенной массы M , расположенной на конце вертикальной колонны, если заделка совершает горизонтальные колебания с заданным законом изменения ускорения $W = W(t)$ (рис.4). Запишем основное уравнение динамики для массы M

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{J}_0 + \mathbf{P}. \quad (10)$$

Здесь m и \mathbf{a} – масса и ускорение точки M , \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 – вертикальная и горизонтальная реакции деформированной балки ($\mathbf{R}_1 = -\mathbf{F}_1$, $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_2$), \mathbf{J}_0 – сила инерции, вызванная движением опоры ($\mathbf{J}_0 = -m\mathbf{w}$).

Проектируя (10) на оси координат и деля обе части равенств на ml , получаем

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g}{l} - \frac{H}{ml^3}\alpha, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{H}{ml^3}\beta - \frac{1}{ml}w(t). \quad (11)$$

Из первого уравнения (11) находим

$$\alpha = -\frac{mgl^2}{H} - \frac{ml^3}{H}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right). \quad (12)$$

Будем полагать, что

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right| \ll \frac{g}{l}. \quad (13)$$

Тогда пренебрегая вторым слагаемым в (12), получаем

$$\alpha = -\rho, \quad \rho = \frac{mgl^2}{H}, \quad (14)$$

т.е. $\alpha = \text{const}$.

Ограничимся случаем, когда $w(t)$ представимо в следующем виде:

$$w(t) = w_0 \sin vt, \quad (15)$$

при $t \geq 0$ и $w(t) = 0$ при $t < 0$.

Подставив (9) и (15) во второе уравнение (10) и добавляя слагаемое $2n \, d\eta/dt$, позволяющее учесть вязкое трение, получаем

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2 \eta = -\frac{H}{ml^3}U\eta - \frac{H}{ml^3}V\eta^3 - \frac{w_0}{l} \sin vt, \quad (16)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{3H/ml^3}. \quad (17)$$

В соответствии с [2] коэффициент n может представлен так:

$$n = \pi\gamma/T, \quad (18)$$

где $0 < \gamma < \gamma_0$ (γ_0 — коэффициент неупругого сопротивления), а T — период колебаний с учетом сопротивления

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим

$$n = \omega_0 \gamma / \sqrt{4 + \gamma^2}. \quad (20)$$

Представим (16) так

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\eta}{dt} + \omega_\kappa^2 \eta = -\frac{H}{ml^3}(1-\kappa)U\eta - \frac{H}{ml^3}V\eta^3 - \frac{w_0}{l} \sin vt. \quad (21)$$

Здесь

$$\omega_{\kappa} = \sqrt{(3 + \kappa U)H / ml^3}, \quad (22)$$

а κ – некоторый скалярный коэффициент, значение которого будет определено ниже. Предполагается, что $|1 - \kappa| < 1$.

Введем в (21) безразмерное время τ при помощи замены $t = \tau / \omega_{\kappa}$. Тогда это уравнение примет следующий вид:

$$\ddot{\eta} + 2\mu_{\kappa} \dot{\eta} + \eta = -\frac{(1 - \kappa)U}{3 + \kappa U} \eta - \frac{V}{3 + \kappa U} \eta^3 - \frac{w_0}{l\omega_{\kappa}^2} \sin \lambda_{\kappa} t \quad (23)$$

($\lambda_{\kappa} = v / \omega_{\kappa}$, $\mu_{\kappa} = n / \omega_{\kappa}$, точка означает дифференцирование по τ). В дальнейшем будем называть λ_{κ} приведенной частотой возмущения.

Как показывают вычисления, прогибы конца консоли, для которых справедливы соотношения (1), имеют следующий порядок:

$$|\eta| \leq \eta_{\max}, \quad \eta_{\max} = 0,03 - 0,05. \quad (24)$$

Выбрав масштабирующий множитель $0 < \bar{\eta} \leq \eta_{\max}$, сделаем в (23) замену $\eta = \zeta \bar{\eta}$:

$$\ddot{\zeta} + 2\mu_{\kappa} \dot{\zeta} + \zeta = -U_0 \zeta - V_0 \zeta^3 - W_0 \sin \lambda_{\kappa} \tau, \quad (25)$$

где

$$U_0 = \frac{(1 - \kappa)U}{3 + \kappa U}, \quad V_0 = \frac{V\bar{\eta}^2}{3 + \kappa U}, \quad W_0 = \frac{w_0}{l\omega_{\kappa}^2 \bar{\eta}}. \quad (26)$$

Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{\zeta} + 2\mu_{\kappa} \dot{\zeta} + \zeta = f(\tau),$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$\zeta(0) = 0, \quad \dot{\zeta}(0) = 0 \quad (27)$$

может быть представлено интегралом Дюамеля его правой части [2]

$$\zeta(\tau) = D[f(\tau)], \quad (28)$$

$$D[f(\tau)] = \frac{1}{\bar{\omega}_{\kappa}} \int_0^{\tau} f(x) e^{-\mu_{\kappa}(\tau-x)} \sin \bar{\omega}_{\kappa}(\tau-x) dx$$

($\bar{\omega}_{\kappa} = \sqrt{1 - \mu_{\kappa}^2}$).

Отсюда следует, что дифференциальное уравнение (25) эквивалентно интегральному уравнению

$$\zeta(\tau) = -\frac{1}{\bar{\omega}_{\kappa}} \int_0^{\tau} [U_0 \zeta(x) + V_0 \zeta(x)^3 + W_0 \sin \lambda_{\kappa} x] e^{-\mu_{\kappa}(\tau-x)} \sin \bar{\omega}_{\kappa}(\tau-x) dx. \quad (29)$$

Пользуясь малостью U_0 , V_0 и W_0 (рассматривается именно такой класс задач), будем разыскивать решение уравнения (29) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\zeta_{n+1}(\tau) = -U_0 D[\zeta_n(\tau)] - V_0 D[\zeta_n^3(\tau)] + Z_0(\tau), \quad (30)$$

где

$$Z_0(\tau) = -\frac{W_0}{\bar{\omega}_k} \int_0^\tau \sin \lambda_k x e^{-\mu_k(\tau-x)} \sin \bar{\omega}_k(\tau-x) dx.$$

Используя формулу 1.5.49.11 [3], получаем

$$Z_0(\tau) = -\frac{W_0}{2\bar{\omega}_k} \left[\frac{\cos(\lambda_k \tau - \varphi_1) - e^{-\mu_k \tau} \cos(\bar{\omega}_k \tau + \varphi_1)}{M_1} - \frac{\cos(\lambda_k \tau - \varphi_2) - e^{-\mu_k \tau} \cos(\bar{\omega}_k \tau - \varphi_2)}{M_2} \right], \quad (31)$$

$$M_1 = \sqrt{\mu_k^2 + (\lambda_k + \bar{\omega}_k)^2}, M_2 = \sqrt{\mu_k^2 + (\lambda_k - \bar{\omega}_k)^2}, \quad (31a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\lambda_k + \bar{\omega}_k}{\mu_k}, \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\lambda_k - \bar{\omega}_k}{\mu_k}.$$

Можно убедиться, что (31) может быть приведено к следующему виду:

$$Z_0(\tau) = -\frac{W_0}{2\bar{\omega}_k} [C_1 \sin(\lambda_k \tau + \psi_1) + C_2 e^{-\mu_k \tau} \sin(\bar{\omega}_k \tau - \psi_2)]. \quad (32)$$

Здесь

$$C_1 = \frac{2\bar{\omega}_k}{M_1^2 M_2^2} \sqrt{4\mu_k^2 \lambda_k^2 + (\mu_k^2 - \lambda_k^2 + \bar{\omega}_k^2)^2}, \operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{2\mu_k \lambda_k}{\mu_k^2 - \lambda_k^2 + \bar{\omega}_k^2}, \quad (32a)$$

$$C_2 = \frac{2\lambda_k}{M_1^2 M_2^2} \sqrt{4\mu_k^2 \bar{\omega}_k^2 + (\mu_k^2 + \lambda_k^2 - \bar{\omega}_k^2)^2}, \operatorname{tg} \psi_2 = -\frac{2\mu_k \bar{\omega}_k}{\mu_k^2 + \lambda_k^2 - \bar{\omega}_k^2}.$$

Полагая в (30) $\zeta_0(\tau) = 0$, получаем

$$\zeta_1(\tau) = Z_0(\tau). \quad (33)$$

Тогда

$$\zeta_2(\tau) = -U_0 D[\zeta_1(\tau)] - V_0 D[\zeta_1^3(\tau)] + \zeta_1(\tau). \quad (34)$$

Возводя (32) в куб, получаем

$$\zeta_1^3(\tau) = -\frac{W_0^3}{8\bar{\omega}_k^3} [C_1^3 Z_1(\tau) + 3C_1^2 C_2 Z_2(\tau) + 3C_1 C_2^2 Z_3(\tau) + C_2^3 Z_4(\tau)], \quad (35)$$

где

$$Z_1(\tau) = \frac{1}{4} [3 \sin(\lambda_\kappa \tau + \psi_1) - \sin 3(\lambda_\kappa \tau + \psi_1)],$$

$$Z_2(\tau) = \frac{1}{4} e^{-\mu_\kappa \tau} [2 \sin(\bar{\omega}_\kappa \tau - \psi_2) - \sin((2\lambda_\kappa + \bar{\omega}_\kappa)\tau + 2\psi_1 - \psi_2) + \\ + \sin((2\lambda_\kappa - \bar{\omega}_\kappa)\tau + 2\psi_1 + \psi_2)],$$

$$Z_3(\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\mu_\kappa \tau} [2 \sin(\lambda_\kappa \tau + \psi_1) - \sin((2\bar{\omega}_\kappa + \lambda_\kappa)\tau - 2\psi_2 + \psi_1) + \\ + \sin((2\omega_1 - \lambda)\tau - 2\psi_2 - \psi_1)],$$

$$Z_4(\tau) = \frac{1}{4} e^{-3\mu_\kappa \tau} [3 \sin(\bar{\omega}_\kappa \tau - \psi_2) - \sin 3(\bar{\omega}_\kappa \tau - \psi_2)].$$

Тогда

$$D[(\zeta_1(\tau))^3] = -\frac{W_0^3}{8\bar{\omega}_\kappa^3} \{C_1^3 D[Z_1(\tau)] + 3C_1^2 C_2 D[Z_2(\tau)] + \\ + 3C_1 C_2^2 D[Z_3(\tau)] + C_2^3 D[Z_4(\tau)]\}. \quad (36)$$

Введем обозначение

$$S_{x,y,z}(\tau) = D[e^{-x\tau} \sin(y\tau + z)]. \quad (37)$$

Заметим, что если $x \neq \mu_\kappa$ и $y \neq \bar{\omega}_\kappa$, то

$$S_{x,y,z}(\tau) = S_{x,y,z}^{(1)}(\tau), \quad (38)$$

где

$$S_{x,y,z}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2\omega_1} \{e^{-x\tau} [q_1(x,y) \cos(y\tau + z - \delta_1(x,y)) - \\ - q_2(x,y) \cos(y\tau + z - \delta_2(x,y))] - \\ - e^{-\mu_\kappa \tau} [q_1(x,y) \cos(\bar{\omega}_\kappa \tau - z + \delta_1(x,y)) - \\ - q_2(x,y) \cos(\bar{\omega}_\kappa \tau + z - \delta_2(x,y))]\}, \quad (38a)$$

$$q_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(\mu_\kappa - x)^2 + (y + \bar{\omega}_\kappa)^2}}, \quad \text{tg} \delta_1(x,y) = \frac{y + \bar{\omega}_\kappa}{\mu_\kappa - x},$$

$$q_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(\mu_\kappa - x)^2 + (y - \bar{\omega}_\kappa)^2}}, \quad \text{tg} \delta_2(x,y) = \frac{y - \bar{\omega}_\kappa}{\mu_\kappa - x}.$$

Если $x = \mu_\kappa$, а $y \neq \bar{\omega}_\kappa$, то

$$S_{x,y,z}(\tau) = S_{y,z}^{(2)}(\tau), \quad (39)$$

где

$$S_{y,z}^{(2)}(\tau) = \frac{e^{-\mu_k \tau}}{2\bar{\omega}_k} \left[\frac{1}{y + \omega_k} (\sin(y\tau + z) + \sin(\omega_k \tau - z)) - \frac{1}{y - \omega_k} (\sin(y\tau + z) - \sin(\omega_k \tau + z)) \right]. \quad (39a)$$

Если $y = \bar{\omega}_k$, а $x \neq \mu_k$, то

$$S_{x,y,z}(\tau) = S_{x,z}^{(3)}(\tau), \quad (40)$$

где

$$S_{x,z}^{(3)}(\tau) = \frac{1}{2\bar{\omega}_k} [e^{-x\tau} q_3(x) \cos(y\tau + z - \delta_3(x)) - e^{-\mu_k \tau} q_3(x) \cos(\bar{\omega}_k \tau - z - \delta_3(x)) - \frac{e^{-x\tau} - e^{-\mu_k \tau}}{\mu_k - x} \cos(\omega_1 \tau + z)], \quad (40a)$$

$$q_3(x) = \frac{1}{\sqrt{(\mu_k - x)^2 + 4\bar{\omega}_k^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta_3(x) = \frac{2\bar{\omega}_k}{\mu_k - x}.$$

Если $x = \mu_k$ и $y = \bar{\omega}_k$, то

$$S_{x,y,z}(\tau) = S_z^{(4)}(\tau), \quad (41)$$

где

$$S_z^{(4)}(\tau) = \frac{e^{-\mu_k \tau}}{2\bar{\omega}_k} \left[\frac{1}{2\bar{\omega}_k} (\sin(\bar{\omega}_k \tau + z) + \sin(\bar{\omega}_k \tau - z)) - \tau \cos(\bar{\omega}_k \tau + z) \right]. \quad (41a)$$

Легко убедиться, что

$$D[\zeta_1(\tau)] = -\frac{W_0}{2\bar{\omega}_k} [C_1 S_{0,\lambda,\psi_1}^{(1)}(\tau) + C_2 S_{-\psi_2}^{(4)}(\tau)],$$

$$D[Z_1(\tau)] = \frac{1}{4} [3S_{0,\lambda,\psi_1}^{(1)}(\tau) - S_{0,3\lambda,3\psi_1}^{(1)}(\tau)]$$

$$D[Z_2(\tau)] = \frac{1}{4} [2S_{-\psi_2}^{(4)}(\tau) - S_{2\lambda+\omega_1,2\psi_1-\psi_2}^{(2)}(\tau) + S_{2\lambda-\omega_1,2\psi_1+\psi_2}^{(2)}(\tau)], \quad (42)$$

$$D[Z_3(\tau)] = \frac{1}{4} [2S_{2\mu,\lambda,\psi_1}^{(1)}(\tau) - S_{2\mu,2\omega_1+\lambda,\psi_1-2\psi_2}^{(1)}(\tau) + S_{2\mu,2\omega_1-\lambda,-\psi_1-2\psi_2}^{(1)}(\tau)],$$

$$D[Z_4(\tau)] = \frac{1}{4} [S_{3\mu,-\psi_2}^{(3)}(\tau) - S_{3\mu,3\omega_1,-3\psi_2}^{(1)}(\tau)].$$

Если ограничиться вторым приближением, то формулы (34), (36) и (42) дают решение задачи.

Анализ формул (42) показывает, что приведенные частоты возмущения $\lambda_k = \bar{\omega}_k$, $\lambda_k = 3\bar{\omega}_k$ и $\lambda_k = \bar{\omega}_k/3$ являются резонансными, так как вследствие малости μ_k при $\lambda_k = \bar{\omega}_k$ (главный резонанс) коэффициенты C_1 и C_2 принимают большие по модулю значения, при $\lambda_k = 3\bar{\omega}_k$ (субрезонанс) таковым становится $q_1(2\mu_k, 2\bar{\omega}_k - \lambda_k)$, а при $\lambda_k = \bar{\omega}_k/3$ (ультразонанс) большим становится $q_1(0, 3\lambda_k)$. При этих значениях указанных коэффициентов ухудшается сходимость метода последовательных приближений.

Положим $\kappa = 1$. Тогда $U_1 = 0$ и схема (30) упрощается

$$\zeta_{n+1}(\tau) = -V_0 D[\zeta_n^3(\tau)] + Z_0(\tau). \quad (43)$$

Приведенная частота главного резонанса $\lambda_1 = \bar{\omega}_1$. Нетрудно убедиться, что при этом частота возбуждения определяется следующим образом:

$$v = v_1, v_1 = \sqrt{\frac{H}{ml^3}(3+U) - n^2}.$$

Для улучшения сходимости метода при $v = v_1$ положим $\kappa \neq 1$. Тогда при $v = v_1$ имеем

$$\lambda_k = \frac{v_1}{\omega_k} = \sqrt{1 + \frac{(1-\kappa)U}{3+\kappa U} - \frac{n^2 ml^3}{H(3+\kappa U)}},$$

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{1 - \mu_k^2} = \sqrt{1 - \frac{n^2 ml^3}{H(3+\kappa U)}},$$

откуда следует, что $\lambda_k \neq \bar{\omega}_k$, т.е. частота v_1 не является резонансной при $\kappa \neq 1$. Нетрудно убедиться, что при $\kappa \neq 1$ частоты возбуждения $v = 3v_1$ и $v = v_1/3$ также не являются резонансными, что означает хорошую сходимость метода последовательных приближений и при этих значениях v .

Замечание 2. Если основной материал консоли является линейно упругим, то $U = V = 0$. Тогда дифференциальное уравнение колебаний будет выглядеть так

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2n \frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2 \eta = -\frac{w_0}{l} \sin vt. \quad (44)$$

Введя безразмерное время $\tau = t\omega_k$ и выбрав масштабирующий множитель $\bar{\eta}$, приводим (44) к следующему виду:

$$\ddot{\zeta} + 2\mu_k \dot{\zeta} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_k}\right)^2 \zeta = -W_0 \sin \lambda_k \tau, \quad (45)$$

решение которого может быть найдено по формулам (31) или (32), в которых $\bar{\omega}_k$ следует заменить на $\sqrt{\omega_0^2 / \omega_k^2 - \mu_k^2}$.

Пример. Рассмотрим нестационарные колебания железобетонной колонны высотой $l = 8$ м, на конце которой расположена сосредоточенная масса $m = 20$ т, вызванные горизонтальными колебаниями опоры с ускорением, меняющимся по закону (15) при $w_0 = 0.1g$. Поперечное сечение колонны представляет собой квадрат со стороной $h = 0,4$ м, армирование – шесть стержней диаметром 1 см. Основной материал – бетон марки В-35, арматура – сталь А-III. Примем $h_1 = 0,18$ м. Тогда $E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu^2) = 3,595 \cdot 10^4$ Мпа, $S_1 = 3\pi r^2 = 9,425$ см² и по формуле (2) получаем $H = 88,904 \cdot 10^6$ Нм², а по формуле (14) $\alpha = -0.141$.

В соответствии с замечанием 1 аппроксимируем функцию $\beta(\eta)$ на отрезке $0 \leq \eta \leq 0.05$ выражением (9). При этом оказывается, что $U = -0,511$, $V = -602,133$, а при $\eta_0 = 0,025$ и $\kappa = 1$ имеем $V_1 = -0,151$, $E_0 = 0,227$. Будем сравнивать максимальные амплитуды нестационарных колебаний консоли на отрезке времени $0 \leq \tau \leq 500$ для нелинейной и линейной задач при $\gamma = 0.05$. Результаты такого сравнения показаны на рис.5.

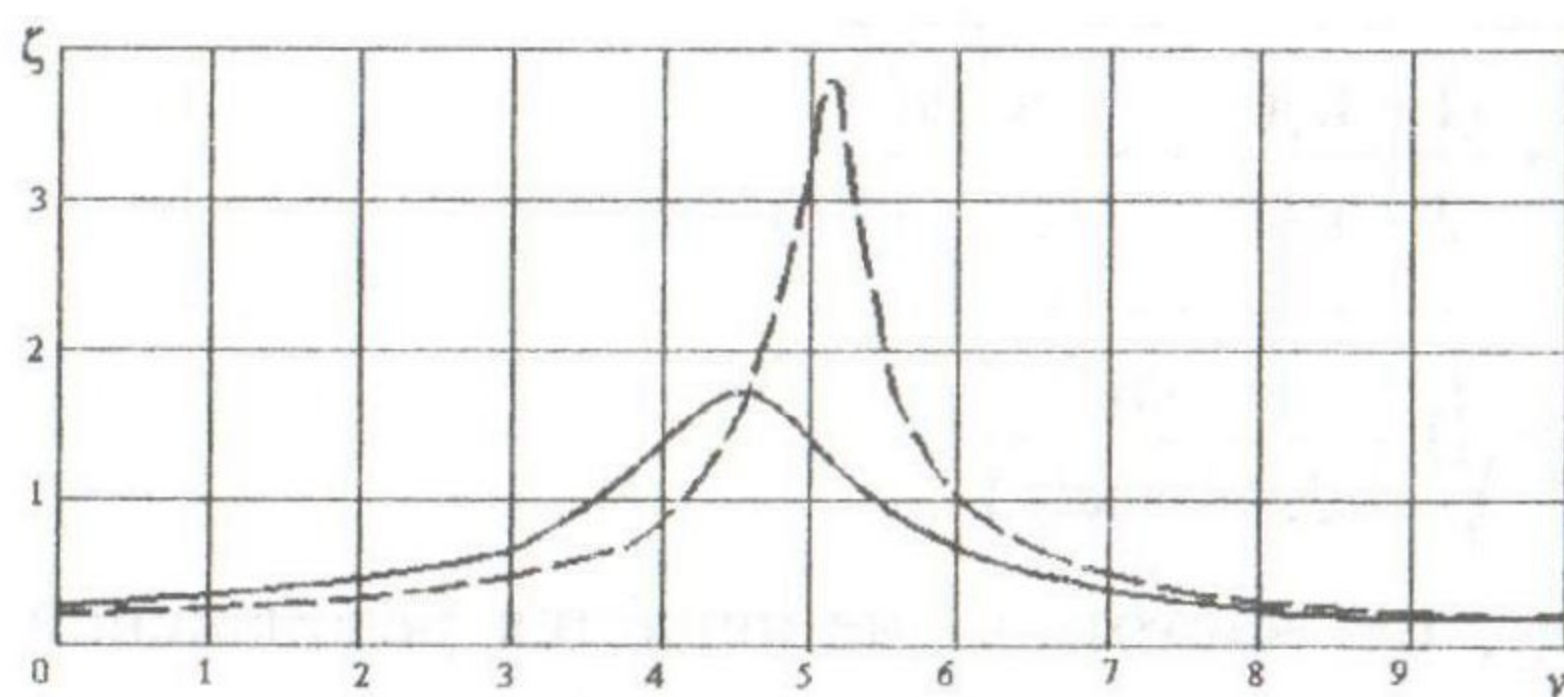


Рис.5

на рис.5. Сплошной линией показан график максимальных значений ζ (т.е. η / η_0 для нелинейной задачи) в зависимости от частоты возмущения ν , а штриховой линией – аналогичный график для линейной задачи.

Вывод. Максимальные значения амплитуд нестационарных колебаний массы, расположенной на конце железобетонной колонны, вызванных гармоническими колебаниями опоры при учете физической нелинейности упругости бетона, гораздо меньше таковых, определенных по линейной теории.

1. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вестник ОГАСА. Вып. 28, – Одесса, 2007. – с. 354 – 368.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). – М.: Издательство литературы по строительству, 1964. – 332 с.
3. Прудников Ф.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.