УДК 624.072.233

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА БАЛОЧНЫХ ПЛИТ НА ДВУХСЛОЙНОМ ОСНОВАНИИ

Зюкин Ю.П. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина)*

Отримані розрахункові формули для визначення контактних напружень та внутрішніх зусиль для балкової плити скінченої довжини, що лежить без тертя на двошаровій основі з різними пружними характеристиками середовища.

Целью настоящей работы является построение инженерных формул для приближенного решения контактной задачи об изгибе балочной плиты конечной длины на двухслойном основании, которые можно применять при расчете оснований и фундаментов. Существующие программные комплексы для решения подобных задач на основе метода конечных элементов значительно сложнее и не позволяют анализировать зависимость различных факторов в этих задачах. Представляют интерес, например, зависимости контактных напряжений и внутренних усилий в балочной плите от различных значений соотношений модулей упругости материала слоев и их глубины.

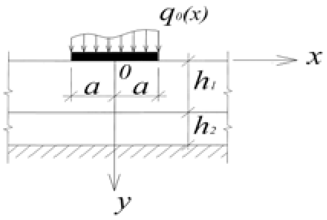

Рис.1

Рассмотрим теоретическую постановку контактной задачи теории упругости об изгибе балочной плиты (балки – полоски) конечной длины и постоянной жесткости, лежащей без трения на двухслойном основании с различными высотами слоев и их упругими свойствами (рис.1). Отметим, что силы трения между слоями и жестким основанием последних не учитываются.

Функция $V(x\text{-}s)$, описывающая перемещения поверхностных точек данного основания от единичной силы, приложенной в точке $x=s$, называемая в контактных задачах теории упругости ядром основания, имеет вид:

$$V(x-s)=\frac{\theta}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\cos\left(\frac{x-s}{h_1}\right)u\frac{du}{u}, \tag{1}$$

где функция $\varphi(u)$ определяется соотношениями

$$\varphi(u)K(u)=2\left[sh^2u\beta R(u)+\Delta sh^2uR(u\beta)\right],$$

$$K(u)=4sh^2u\beta\left(sh^2u-u^2\right)+\Delta R(u)R(u\beta),\quad R(u)=sh2u+2u. \tag{2}$$

Параметры, входящие в выражение (2), зависят от геометрических и механических характеристик двухслойного основания и имеют вид:

$$\theta=\frac{2(1-\mu_1^2)}{E_1},\quad \Delta=\frac{E_2(1-\mu_1^2)}{E_1(1-\mu_2^2)},\quad \beta=\frac{h_2}{h_1} \tag{3}$$

Здесь E_i, μ_i $(i=1,2)$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно при $i=1$ для верхнего слоя , при $i=2$ для нижнего.

Балочная плита $(-a \le x \le a)$ загружена произвольной нагрузкой $q_0(x)$, функция прогибов балочной плиты $y_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (D –цилиндрическая жесткость балочной плиты)

$$D\frac{d^4y_0(x)}{dx^4}=q_0(x)-p_0(x),\quad -a\le x\le a, \tag{4}$$

при краевых условиях $y''(\pm a)=y'''(\pm a)=0$, а также условиям равновесия:

$$\int_{-a}^{a}q_0(x)dx=\int_{-a}^{a}p_0(x)dx,\quad \int_{-a}^{a}xq_0(x)dx=\int_{-a}^{a}xp_0(x)dx \tag{5}$$

Задача определения неизвестного контактного напряжения $p_0(x)$ решена в общем виде в работе [1],путем сведения её к решению интегрального уравнения первого рода и применения метода ортогональных многочленов [2] для многочленов Чебышева $T_n(x)$. Согласно результатам работы [1] в безразмерных координатах $x=at$ для функции $p(t)=ap_0(at)$ приближенное решение имеет вид конечного отрезка ряда по указанным выше многочленам, в случае чётной задачи $p(t) = p(-t)$:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{N} Y_{2n} T_{2n}(t), \quad -1 \leq t \leq 1 \tag{6}$$

Коэффициенты Y_{2n} определяются из решения простой системы линейных алгебраических уравнений согласно процедуре метода ортогональных многочленов.

В случае нечётной задачи $p(t) = -p(-t)$ следует заменить $2n$ на $2n+1$. Значения N определяются путем численного эксперимента в зависимости от требуемой точности результата.

Для наиболее часто встречающихся на практике случаев расчетов балочных плит на двухслойном упругом основании, которые определяются следующими значениями параметров $\nu \leq 0,7,\ \beta \leq 2\ ,\ \Delta \geq 0,1$, а также показателем гибкости балки (по М.И. Горбунову-Посадову) $t_0 \leq 10$, можно принять в формуле (4) значение $N=2$. Здесь введены обозначения:

$$\nu = a / h_1, \qquad t_0 = a^3\pi / 2\theta D. \tag{7}$$

Следует отметить, что из условий равновесия балочной плиты (5) можно сразу определить Y_0 (для четного случая) и Y_1 (для нечетного случая) по формулам:

$$Y_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} q(x)dx, \quad Y_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} xq(x)dx, \quad q(x) = aq_0(ax) \tag{8}$$

Это позволяет получить простые формулы для остальных коэффициентов в разложении (6), а именно:

$$Y_2 = (f_2 - H_{2,0}\, Y_0) / (\eta_2 + H_{4,0}), \quad Y_4 = (f_4 - H_{4,0}\, Y_0) / \eta_4 \tag{9}$$

Соответствующие формулы могут быть получены для нечетного случая путем замены индексов.

Значения коэффициентов $H_{2n,0}$ $(n=1,2)$ определяются по формулам, которые приведены в работе [1] , там же содержаться формулы для вычисления коэффициентов f_2, f_4. Эти коэффициенты зависят от значений показателя гибкости балочной плиты t_0 и внешней нагрузки на балочную плиту. Они определяются один раз для каждого вида нагружения, например в случае действия на балочную плиту равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q , $f_2 = 7aqt_0 /48\pi$, $f_4 = aqt_0 / 192\pi$. При действии на балку сосредоточенной силы P, приложенной посредине пролета $(x=0)$, соответственно имеем $f_2 = 2Pt_0 / 15\pi^2$, $f_4 = 2Pt_0 / 105\pi^2$. Если имеется воздействие сосредоточенного момента M, приложенного посредине пролета ($x=0$), в нечетном случае задачи, коэффициенты имеют вид $f_3 = 2Mt_0 / 15a\pi^2$, $f_5=2Mt_0 / 105a\pi^2$. Коэффициенты η_{2n} определяются из выражения $2\eta_{2n} = 1 / 2n$.

Отметим в заключении, что при определении величин коэффициентов $H_{2n,0}$ необходимо воспользоваться Таблицей 1,приведенной в работе [3] для значений коэффициентов $B^{i}_{m,k}$, а именно $B^{1}_{2,0}$ = 1/1769472, $B^{2}_{2,0}$ =1/14745600, $B^{2}_{4,0}$ = 1/147456.

Внутренние усилия в балочной плите, поперечная сила $Q(t)$ и изгибающий момент $M(t)$ определяются (для безразмерных координат $x=at$) по формулам:

$$Q(t) = \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin t\right)Y_0 - \sqrt{1-t^2}\,[0{,}5Y_2U_1(t) + 0{,}25Y_4U_3(t)] \tag{10}$$

$$M(t) = \left(\frac{\pi}{2}t + \sqrt{1-t^2} + t\arcsin t\right)Y_0 - $$
$$- \sqrt{1-t^2}\,\left\{0{,}25Y_2\left[0{,}334\,U_2(t) - 1\right] + 0{,}125\,Y_4\left[0{,}20\,U_4(t) - 0{,}334\,U_2(t)\right]\right\} \tag{11}$$

Здесь $U_k(t)$ – многочлены Чебышева второго рода. Истинные значения контактных напряжений, поперечных сил и изгибающих моментов в балочной плите определяются по формулам:

$$p_0(x) = \frac{1}{a}p\left(\frac{x}{a}\right), \qquad Q_0(x) = Q\left(\frac{x}{a}\right), \quad M_0(x) = aM\left(\frac{x}{a}\right) \tag{12}$$

Представляет интерес формула максимального изгибающего момента в балочной плите max*M* при симметричной внешней нагрузке, так как при проектировании соответствующих конструкций используется именно это значение:

$$max\,M = M(0) = Y_0 + \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{15}Y_4$$

Полученные формулы (6), (10) и (11) позволяют производить исследования по изменению величины контактных напряжений, а также внутренних усилий в балочной плите для различных значений параметров ν, β, Δ и t_0.

Особенный интерес вызывает случай, когда нижний слой является более податливым, чем нижний, что соответствует изменениям параметра Δ, определяемого по формуле (3), в пределах $0,1 \leq \Delta < 1$. При этом следует учитывать размеры нижнего слоя по отношению к верхнему, что фиксируется параметром β. Практическое значение имеют величины $0,5 \leq \beta \leq 2$, причем, чем больше значение β, тем больше высота нижнего слоя.

Расчет балочных плит на упругом основании производился ранее по таблицам работы [4], где в качестве основания использовалось упругое полупространство с характеристиками E_0 ,μ_0 , при этом полученные значения внутренних усилий в балочной плите значительно превышали (по опытным данным) истинные значения. В работе [5] использовалось однослойное основание с характеристиками E_0 ,μ_0 , что привело к корректировке значений внутренних усилий согласно [4] в пределах 10%, особенно при значениях показателя гибкости балки t_0 >5.

В действительности основания фундаментов, как правило, представляют собой многослойные грунты с различными механическими характеристиками, что и вызвало потребность изучения влияния таких оснований на величину внутренних усилий в балочной плите. Учитывая относительную простоту полученных формул, были проведены численные эксперименты для выяснения границ их применения для практических расчетов балочных плит на упругом основании. Проведенные вычисления для различных видов загружения балочной плиты привели к следующим выводам.

При значениях параметров $\nu \leq 0,7$ и $\Delta > 1,4$ для различных значений показателей гибкости балки t_0 можно пользоваться таблицами работы [5] для расчета балочных плит на упругом основании.

Для значений $0,1 \leq \Delta < 1$ и $0,5 \leq \beta \leq 2$ необходимо использовать предлагаемую методику, которая позволяет корректировать результаты [5] в пределах от 7% до 12% в сторону увеличения максимального изгибающего момента в балочной плите особенно в пределах $0,3 < t_0 < 5$.

Заключение

Получены простые инженерные формулы для определения величин контактных напряжений и внутренних усилий в балочной плите, лежащей без трения на упругом двухслойном основании. Приведены примеры исследований влияния параметров, характеризующих упругие и механические свойства балочной плиты и основания на внутренние усилия в балочной плите, что устанавливает границы применения этих формул.

На основании полученных результатов можно разработать специальные таблицы для определения величин внутренних усилий в балочной плите на двухслойном упругом основании при наиболее часто встречающихся видах внешних нагрузках на балку.

Summary

In the given work engineering formulas for definition of contact voltages and internal force in a slab laying without a friction on the two-layer base with various elastic characteristics of layers are gained.

Литература

1.Зюкин Ю.П., Об изгибе балки конечной длины на двухслойном основании. «Известия вузов»,раздел «Строительство и архитектура», 1973,№3.

2. Попов Г.Я., О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости, ПММ, т.33, вып. 3, 1969.

3. Лутченко С.А., О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина, «Прикладная механика», т.II, в. 12, 1966.

4. Горбунов –Посадов М.И., Расчет конструкций на упругом основании, Госстройиздат, М, 1963.

5. Крашенинникова Г. В., Расчет балок на упругом основании конечной глубины, Энергия,1964.