УДК624.071.3:539.4

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Бекирова М.М., Орлов А.Н., Хоменко О.И. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

У статті розглянута та розв'язана задача щодо стійкого гнучкого, однорідного, шарнірно обіпертого по кінцях стержня, завантаженого позацентрово прикладеним навантаженням. Рішення отримані на підставі залежностей нелінійної теорії пружної спадковості.

Рассмотрим гибкий однородный стержень с прямолинейным поперечным сечением. Опирание шарнирное. Загружен стержень постоянной во времени продольной силой P, приложенной с эксцетриситетом e_0 в плоскости перемещений. Материал стержня подчиняется законам нелинейной теории упругой наследственности.

$$\varepsilon(t)=\sigma(t)\delta(t,t)-\int_t^t F\left[\sigma(\tau)\right]\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (1)$$

$$\delta(t,\tau)=\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau), C(t,\tau)=C_0\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$

$$E(t)=E(\tau)=E=const, \frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}=-\gamma C_0 e^{-\gamma(t-\tau)} \qquad (2)$$

$$\delta(t,t)=\frac{1}{E}, \varphi=C_0E$$

$$F\left[\sigma(x,t)\right]=\beta_0\sigma(x,t)+\beta_1\sigma^2(x,t) \qquad (3)$$

В случае нелинейной ползучести интегро-дифференциальное уравнение движения стержня с учётом

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{1}{h}\left[\varepsilon_1(z,t)-\varepsilon_2(z,t)\right] \qquad (4)$$

выглядит так:

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{1}{h}\left\{\frac{P}{EI}\left[y(x,t)+e_0\right]-\int_{t_0}^t\left[F\left(\sigma_1(x,\tau)-F\left(\sigma_2(x,\tau)\right]\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d0\right\}\right. \qquad (5)$$

В выражениях (4), (5)

$\varepsilon_1(x,t), \varepsilon_2(x,t), \sigma_1(x,t), \sigma_2(x,t)$ - деформации и соответствующие им напряжения в крайних волокнах сечения, h – размер сечения в плоскости изгиба.

С учётом (3), разность функций напряжений в уравнении (5) представлена так:

$$F\left[\sigma_1(x,t)\right]-F\left[\sigma_2(x,t)\right]=\beta_0\left[\sigma_1(x,t)-\sigma_2(x,t)\right]+$$
$$+\beta\left[\sigma_1^2(x,t)\mp\sigma_2^2(x,t)\right] \qquad (6)$$

При внецентренном сжатии в крайних волокнах поперечного сечения возникают напряжения

$$\sigma_{1,2}(x,t)=\frac{P}{A}\left[1\pm\frac{6}{h}\left(y(x,t)+e_0\right)\right] \qquad (7)$$

В выражении (6) во втором слагаемом правой части знак "–" учитывать, когда эпюра напряжений σ однозначна, т. е. когда наиболее удалённое от линии действия продольной силы волокно сжато. Это возможно при:

$$y(x,t)+e_0\le\frac{h}{6} \qquad (8)$$

Знак "+" в (6) следует использовать, когда эпюра σ двузначна, т. е. когда наиболее удалённое волокно растянуто. Такая ситуация возможна при:

$$y(x,t)+e_0>\frac{h}{6} \qquad (9)$$

Разность и сумма квадратов напряжений, а также разность напряжений, входящих в функцию напряжений (6), имеют вид

$$\sigma_1^2(x,t) - \sigma_2^2(x,t) = \frac{24P^2}{hA^2}\left[y(x,t) + e_0\right],$$

$$\sigma_1^2(x,t) + \sigma_2^2(x,t) = \frac{2P^2}{A}\left\{1 + \frac{36}{h^2}\left[y(x,t+e_0)\right]^2\right\},$$

$$\sigma_1(x,t) - \sigma_2(x,t) = \frac{12P}{A}\left[y(x,t) + e_0\right] \tag{10}$$

С учётом приближенного выражения для кривизны $\frac{1}{\rho(x,t)} = -y''(x,t)$ приводим интегро-дифференциальное уравнение (5) к дифференциальному с частными производными

$$\dot{y}''(x,t) + \gamma y''(x,t) + \frac{P}{EI}\dot{y}(x,t) + \gamma\frac{P}{EI}(1+\beta_0\varphi)\left[y(x,t) + e_0\right] +$$
$$+ \frac{\gamma\varphi\beta_1}{hE}\left[\sigma_1^2(x,t) \mp \sigma_2^2(x,t)\right] = 0 \tag{11}$$

с граничными

$$y(0,t) = 0, y(e,t) = 0 \tag{12}$$

и начальным

$$y''(x,t_0) + \frac{P}{EI}\left[y(x,t_0) + e_0\right] = 0 \tag{13}$$

условиями.

Здесь и дальше точками обозначены производные по времени ***t***, а штрихами - по x.

С использованием соотношений (10) из уравнения (11) получаем уравнение состояния стержня в случае “малого” эксцентриситета (справедливо условие (8)) и в случае условно “большого” эксцентриситета справедливо условие (9).

Для случая 1 ($y + e_0 \le h/6$)

$$\dot{y}''(x,t) + \gamma y''(x,t) + \alpha_1^2\dot{y}(x,t) + \gamma\alpha_2^2\left[y(x,t) + e_0\right] = 0 \tag{14}$$

Для случая 2 ($y + e_0 > h/6$)

$$\dot{y}''(x,t) + \gamma y''(x,t) + \alpha_1^2\dot{y}(x,t) + \gamma\alpha_3^2\left[y(x,t) + e_0\right] +$$
$$+\gamma\alpha_4^2\left[\left(\frac{h}{6}\right)^2 + \left(y(x,t) + e_0\right)^2\right] = 0 \tag{15}$$

В уравнениях (14) и (15)

$$\alpha_1^2 = \frac{P}{EI}, \alpha_2^2 = \frac{P}{EI}\left[1 + \varphi\left(\beta_0 + \frac{2P}{A}\beta_1\right)\right],$$

$$\alpha_3^2 = \frac{P}{EI}(1+\beta_0\varphi), \alpha_4^2 = \frac{6\beta_1\varphi P^2}{hAEI} \tag{16}$$

Для этих двух случаев граничные и начальное условия (12), (13) одинаковы.

Форма изогнутой оси стержня, как при кратковременном воздействии нагрузки, так и при длительном, при наложенных на стержень связях (опорные закрепления), не меняющих своих свойств во времени, остаётся постоянной [1]. Изменения носят лишь количественный характер. Экспериментально установлено, что при равнонаправленных и равных по величине эксцентриситетах форма изогнутой оси стержня близка к полуволне синусоиду [2].

С учётом сказанного выше предполагается

$$y(x,t) = f(t)\sin\frac{\pi x}{l}, y(x,t_0) = f(t_0)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{17}$$

Из начального условия (13) после применения процедуры Бубнова-Галёркина [3] следует

$$f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi\left(\frac{P_Э}{P} - 1\right)}, \tag{18}$$

где $f(t_0)$ - амплитудное перемещение упруго-мгновенной задачи, $P_Э = \pi^2 EI \big/ l^2$ - эйлерова критическая сила.

Для придания всем последующим расчётам, уравнениям и формулам более компактных форм и выражений введём безразмерные характеристики

$$F(t) = \frac{\pi}{l} f(t), F(t_0) = \frac{\pi}{l} f(t_0), s = \frac{e_0}{l}, n = \frac{P_Э}{P} \tag{19}$$

Тогда
$$F(t_0) = \frac{4s}{n-1} \tag{20}$$

Случай 1 ($y(x,t) + e_0 \le \frac{h}{6}$)

После применения процедуры Бубнова-Галёркина с учётом (19) уравнение (14) преобразуется в дифференциальное в обыкновенных производных по *t*.

$$\left(\alpha_1^2 - \frac{\pi^2}{l^2}\right)\dot{F}(t) + \gamma\left(\alpha_2^2 - \frac{\pi^2}{l^2}\right)F(t) + 4\gamma\alpha_2^2 s = 0 \tag{21}$$

Это дифференциальное уравнение – уравнение с разделяющимися переменными и его решение имеет вид

$$F(t) = F(t_0)\left\{\left[1 - \frac{(1+\varphi_1)(n-1)}{n-(1+\varphi_1)}\right]e^{-\frac{n-(1+\varphi_1)}{(n-1)}(t-t_0)} + \frac{(1+\varphi_1)(n-1)}{n-(1+\varphi_1)}\right\} \tag{22}$$

Здесь
$$n = \frac{P_Э}{P}, \varphi_1 = \varphi\left(\beta_0 + \frac{2P}{A}\beta_1\right) = \varphi\left(\beta_0 + \frac{\pi^2 E}{6\lambda^2 n}\beta_1\right), \tag{23}$$

$\lambda = \frac{l}{h}$ - гибкость стержня.

Формула перемещений (22) справедлива в случае однозначной эпюры напряжений в среднем по длине стержня сечении, т. е. при соблюдении условия

$$F(t) \le \pi\left(\frac{1}{6\lambda} - s\right). \tag{24}$$

Это условие, записанное в безразмерных величинах эквивалентно условию (8).

Как при кратковременном, так и при длительном действии нагрузки перемещение, при котором эпюра напряжений остаётся однозначной, определяется величиной

$$F^+ = \pi\left(\frac{1}{6\lambda} - s\right), \tag{25}$$

однако нагрузки, приводящие к такому состоянию в двух этих случаях, будут разными.

Максимальная сила $P_{кр}^+$, при кратковременном (без учёта ползучести) действии которой, ещё остаётся однозначной, определяется из условия (24) с заменой $F(t)$ на $F(t_0)$ и удержании знака равенства.

$$P_{кр}^+ = \frac{F^+}{4s + F^+} P_э \tag{26}$$

Максимальная сила $P_{дл}^+$ при длительном (с учётом ползучести) действии которой, эпюра напряжений во всём промежутке времени ($t \to \infty$) остаётся однозначной, так же разыскивается с привлечением условия (24) с заменой $F(t)$ на $F(\infty)$

$$F(\infty) = \frac{(1+\varphi_1)(n-1)}{n-(1+\varphi_1)} F(t_0) \tag{27}$$

что приводит к уравнению

$$\frac{F^+}{4s + F^+} n^2 - (1 + \beta_0\varphi)n - \pi^2 \frac{\beta_1 E\varphi}{6\lambda^2} = 0, \tag{28}$$

имеющего 2 действительных (положительный и отрицательный) корня. Положительный корень определяет искомую силу $P^{+}_{дл}$. Если нагрузка находится в интервале $P^{+}_{дл} < P < P^{+}_{кр}$, то переход в напряжённое состояние с двухзначной эпюрой напряжений осуществляется за конечный промежуток времени.

Случай 2 ($y + e_0 > h/6$)

После преобразования по Бубнову-Галёркину с учётом (19) уравнение (15) принимает вид

$$a_1\dot{F}(t) + \gamma a_2 F^2(t) + \gamma a_3 F(t) + \gamma a_4 = 0, \tag{29}$$

где

$$a_1 = \lambda n(n-1),\ a_2 = -\frac{4}{3}\beta_1 E\varphi,\ a_3 = \lambda n^2 - (1+\beta_0\varphi)\lambda n - \pi^2\beta_1 E\varphi s,$$

$$a_4 = -2\left\{2(1+\beta_0\varphi)\lambda ns + \pi^2\beta_1 E\varphi\left[s^2 + \left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2\right]\right\} \tag{30}$$

После разделения переменных в уравнении (29) получим

$$\frac{dF(t)}{a_2F^2(t) + a_3F(t) + a_4} = -\frac{\lambda}{a_1}dt \tag{31}$$

$$\int\limits_{F(t_0)}^{F(t)} \frac{dF(t)}{a_2F^2(t) + a_3F(t) + a_4} = -\frac{\lambda}{a_1}\int\limits_{t_0}^{t} dt \tag{32}$$

Уравнение (29), а значит и (32) имеет 3 различных решения в зависимости от знака и величины дискриминанта $\Delta = 4a_2a_4 - a_3^2$ трёхчлена знаменателя в (31) и (32)

1. $\Delta < 0$ ($4a_2a_4 - a_3^2 < 0$)

$$\ln\left|\frac{2a_2F(t) + a_3 - \sqrt{-\Delta}}{2a_2F(t) + a_3 + \sqrt{-\Delta}}\cdot\frac{2a_2F(t_0) + a_3 + \sqrt{-\Delta}}{2a_2F(t_0) + a_3 - \sqrt{-\Delta}}\right| = -\gamma\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_1}(t - t_0) \tag{33}$$

или

$$F(t) = -\frac{1}{2a}\cdot\frac{\left(a_3 - \sqrt{-\Delta}\right) - \left(a_3 + \sqrt{-\Delta}\right)\dfrac{2a_2F(t_0) + a_3 - \sqrt{-\Delta}}{2a_2F(t_0) + a_3 + \sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_1}(t-t_0)}}{1 - \dfrac{2a_2F(t_0) + a_3 - \sqrt{-\Delta}}{2a_2F(t_0) + a_3 + \sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_1}(t-t_0)}} \tag{34}$$

Из (33) или (34) следует, что при $t \to \infty$

$$F(\infty) = \frac{(1+\varphi q)(n-1)}{n - (1+\varphi q)}F(t_0) \tag{35}$$

Значит при любой нагрузке, удовлетворяющей условию $4a_2a_4 - a_3^2 < 0$, перемещения во времени стремятся к конечной величине (35), т. е. деформирование носит затухающий характер.

2. $\Delta = 0$ ($4a_2a_4 - a_3^2 = 0$)

После интегрирования (32) следует

$$F(t) = \frac{F(t_0) + \dfrac{a_3}{2a_2}}{\lambda\dfrac{a_2}{a_1}\left[F(t_0) + \dfrac{a_3}{2a_2}\right](t - t_0) + 1} - \frac{a_3}{2a_2} \tag{36}$$

При $t \to \infty$ $F(t)$ стремится к конечной величине

$$F(\infty) = \frac{3}{8\beta_1 E\kappa}\left[\lambda n^2 - (1+\beta_0\varphi)\lambda n - \pi^2\beta_1 E\varphi s\right] \tag{37}$$

Деформирование носит затухающий характер при выполнении условия $\Delta = 0$, чему соответствует нагрузка, определяемая из $4a_2a_4 - a_3^2 = 0$

$$n^4 + b_1n^3 + b_2n^2 + b_3n + b_4 = 0 \tag{38}$$

$$b_1 = -2(1+\beta_0\varphi), b_2 = (1+\beta_0\varphi)^2 - 19{,}739\beta_1 E\varphi\frac{s}{\lambda},$$

$$b_3 = -1{,}594(1+\beta_0\varphi)\beta_1 E\varphi\frac{s}{\lambda}, \beta_4 = -2{,}924\left(\beta_1 E\varphi\right)^2\left(2{,}69s^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\lambda^2} \tag{39}$$

Уравнение (38) имеет 4 действительных корня: три положительных и один отрицательный. Наибольший из положительных корней определяет максимальную силу, при действии которой происходит затухающее деформирование. Назовём такую силу критической в условиях нелинейной ползучести - $P_{дл}^{н}$. Разыскивается она, как корень уравнения (37) в долях от $P_Э$. В условиях линейной ползучести $P_{дл}^{л} = \frac{P_э}{1+\varphi}$.

Нагрузка, превышающая эту максимальную силу, приводит к незатухающему деформированию за конечное время.

3. $\Delta > 0$ ($4a_2a_4 - a_3^2 > 0$)

При выполнении условия $\Delta > 0$ любая нагрузка, приводящая к $F(t) \to \infty$ может условно считаться критической, а отвечающее ей время – критическим.

После интегрирования (32) получаем

$$F(t) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}tg\left[arctg\frac{2a_2F(t_0)+a_3}{\sqrt{\Delta}} - \gamma\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_1}(t-t_0)\right] - \frac{a_3}{2a_2} \tag{40}$$

Очевидно, что $F(t) \to \infty$ при $tg\left[arctg\frac{2a_2F(t_0)+a_3}{\sqrt{\Delta}} - \gamma\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_1}(t-t_0)\right] \to \infty,$ а это возможно, если

$$arctg\frac{2a_2F(t_0)+a_3}{\sqrt{\Delta}} - \gamma\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_1}(t-t_0) = \frac{\pi}{2}, \tag{41}$$

откуда следует формула для критического времени $t_{кр}$ при заданной нагрузке, удовлетворяющей условию $4a_2a_4 - a_3^2 > 0$

$$t_{кр} = t_0 + \frac{2a_1}{\gamma\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{\pi}{2} + arctg\frac{2a_2F(t_0)+a_3}{\sqrt{\Delta}}\right]. \tag{42}$$

Для стержней с такими характеристиками:

$$E=3.3\cdot 10^7 \,{}^{кН}\!/_{м^2}, \varphi = 2{,}0; \gamma = 0{,}006сек^{-1}; \beta_0 = 1{,}0;$$

$$\beta_1 = 0{,}807\cdot 10^{-5}\,{}^{м^2}\!/_{кН}; s = {}^1\!/_{300}; \Delta = 30$$

получены численные результаты.

Критическая сила без учёта ползучести $P_{кр} = P_э;$ критические силы в условиях линейной и нелинейной ползучести соответственно $P_{дл}^{л} = 0{,}333P_э; P_{дл}^{н} = 0{,}242P_э$.

Величина относительного перемещения, при котором эпюра напряжений остаётся однозначной $F^{+} = 0{,}698\cdot 10^{-2}$ и соответствующие ей силы как при кратковременном загружении (без учёта ползучести), так и при длительном (нелинейная ползучесть) $P_{кр}^{+} = 0{,}343P_э, P_{дл}^{+} = 0{,}111P_э$.

– нагрузка $P = 0{,}2P_э, n = 5, \Delta < 0$. Деформирование носит затухающий характер $F(t_0) = 0{,}333\cdot 10^{-2}, F(\infty) = 2{,}43\cdot 10^{-2}$.

– нагрузка $P = 0{,}242P_э = P_{дл}^{н}, n = 4{,}1382; \Delta = 0$. Затухающее деформирование. $F(t_0) = 0{,}425\cdot 10^{-2}, F(\infty) = 8{,}72\cdot 10^{-2}$. $P_{дл}^{н}$ – максимальная сила, при действии которой перемещения стремятся (при $t \to \infty$) к величине $F(\infty)$.

– нагрузка $P = \frac{1}{3}P_э, n = 3, \Delta > 0$. Деформирование носит незатухающий характер $F(t_0) = \frac{2}{3}\cdot 10^{-2}, t_{кр} = t_0 + 750c$.

– нагрузка $P = 0,5P_э, n = 2, \Delta > 0$. Деформирование носит незатухающий характер $F(t_0) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-2}, t_{кр} = t_0 + 140c.$

Выводы

Полученные решения позволяют проследить деформированное состояние стержня от момента загружения до $t = \infty$. Рассмотрены две формы деформирования: затухающее и незатухающее. Под критической силой в условиях нелинейной ползучести понимается максимальная сила при затухающем деформировании.

Приведенные решения можно использовать для расчётов стержней неоднородных и армированных, если использовать так называемые приведенные характеристики сечений и материалов.

Summary

The article discussed and solved the stability problem of a flexible, uniform hinged at the ends of the rod, loaded with eccentrically applied load. Decisions are based on the dependences of the nonlinear theory of elastic heredity.

Литература

1. Орлов А.Н. Определение критических сил при длительном действии нагрузки для гибких стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью. «Известия АН Арм. ССР, Механика», XXX, №3, Ереван, 1977.
2. Калинин А.А. Экспериментальное исследование несущей способности сжатых железобетонных стоек при длительном действии нагрузки. Строительные конструкции. Вып. XXXI, Киев, 1978.
3. Вольмир Н.С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, Москва, 1963.