УДК 624.073.13

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКО - НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

Яременко А.Ф., *д.т.н., проф.*, **Еньков Е.У.**, *к.т.н., доц.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Разработанная Н.И. Карпенко теория кратковременного деформирования железобетона [1, 2] учитывает влияние процесса образования и развития трещин, а также характера их расположения. Согласно этой теории железобетон с трещинами является анизотропным материалом, причем эта анизотропия зависит от величины действующих усилий, т.е. анизотропия связана как с уровнем загружения, так и с геометрическими координатами.

При низком уровне нагрузки, не вызывающем трещин, железобетонная конструкция может рассматриваться как изотропная. Это относится и к зонам (элементам) конструкций, где трещины не образуются. Для плоского напряженного состояния изотропного и однородного тела, обладающего линейной ползучестью, получено интегро-дифференциальное уравнение И.Е. Прокоповичем [3]:

$$\nabla^2\nabla^2 F^*(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} \nabla^2\nabla^2 F^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau = -E(t)\left[\frac{\partial^2\varepsilon_x^0(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y^0(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\gamma_{xy}^0(t)}{\partial x\partial y}\right] \quad (1)$$

где: $F^*(t) = F^*(x, y, t)$ - функция напряжений; ∇^2 - гармонический оператор Лапласа;

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau) \quad (2)$$

$\delta(t,\tau)$ - полная относительная деформация; $E(\tau)$ - модуль упруго-мгновенных деформаций; $C(t,\tau)$ - мера простой ползучести при сжатии - растяжении.

Привлечены дополнительные предпосылки, обоснованные в работах [1, 2, 3]:

а) применим принцип наложения воздействий к определению средних деформаций железобетонного элементами с трещинами;

б) трещины образуются по площадкам главных растягивающих напряжений;

в) арматура в виде ортогональной сетки считается «размазанной» по длине сечения с интенсивностью f_{ax} и f_{ay}; коэффициенты армирования равны

$$\mu_x = \frac{f_{ax}}{h}, \quad \mu_y = \frac{f_{ay}}{h}$$

где h - толщина рассматриваемого элемента;

г) арматура в наклонных к ней трещинах воспринимает, помимо растягивающих, также и сдвигающие усилия τ_{ax} и τ_{ay};

д) в направлении осей x и y деформации железобетонного элемента с трещинами складываются из проекции средних деформаций арматуры и деформаций полос бетона между трещинами

$$\varepsilon_x^*(t) = \varepsilon_{ax}^{*c}(t) + \varepsilon_{бx}^{*\prime}(t), \quad \varepsilon_y^*(t) = \varepsilon_{ay}^{*c}(t) + \varepsilon_{бy}^{*\prime}(t) \tag{3}$$

е) при определении деформаций полос бетона вдоль трещин влияние арматуры и поперечных деформаций бетона не учитывается;

ж) в сжатом и растянутом бетоне между трещинами развиваются деформации упругие, пластические и ползучести. Связь деформаций с напряжениями принимаем в виде [7]

$$\varepsilon_б^*(t) = \frac{\sigma_б^*(t)}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \frac{\sigma_б(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б^*(\tau) \frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau \tag{4}$$

где ν учитывает быстронатекающие деформации ползучести, развивающиеся при загружении;

з) влияние усадки бетона может быть учтено отдельно.

В теории Н.И.Карпенко [2], построенной применительно к кратковременному действию нагрузки, сложный характер работы арматуры в трещинах учитывается с помощью коэффициентов λ_x и λ_y, которые определяются из специальных экспериментов, а усреднение деформаций арматуры производится с помощью коэффициентов Мурашева В.И. ψ_{ax} и ψ_{ay}.

Средние деформации арматуры на участке между трещинами равны

$$\varepsilon_{ai}^*(t) = \frac{\sigma_{ai}^*(t)}{E_{ai}} \psi_{ai}^*(t) \tag{5}$$

$\sigma_{ai}^*(t)$ - напряжение в арматуре i-го направления в трещине. Из условий равновесия и совместимости осевых и тангенциальных перемещений арматурного стержня в зоне трещины $[3]$ с учетом (5) получены зависимости $[3, 2]$:

$$\varepsilon_{ax}^{*c}(t)=\frac{\sigma_x^*(t)+\tau_{xy}^*(t)ctg\alpha}{E_{ax}\mu_x}\lambda_x^*(t)\psi_{ax}^*(t)$$
$$\varepsilon_{ay}^{*c}(t)=\frac{\sigma_y^*(t)+\tau_{xy}^*(t)tg\alpha}{E_{ay}\mu_y}\lambda_y^*(t)\psi_{ay}^*(t) \tag{6}$$

где $\sigma_x^*(t)$, $\sigma_y^*(t)$ и $\tau_{xy}^*(t)$ - напряжения с учетом ползучести в железобетонном элементе с трещиной; α - угол, образуемый трещиной и осью *x*; E_{ai} - модуль упругости арматуры i - го направления $(i=x,y)$.

Проекции на оси *x* и *y* деформаций полос бетона между трещинами соответственно равны:

$$\varepsilon_{бx}^{*'}(t)=\varepsilon_{бt}^*(t)\cos^2\alpha;\quad \varepsilon_{бy}^{*'}(t)=\varepsilon_{бt}^*(t)\sin^2\alpha \tag{7}$$

Так как армирование полос бетона не учитывается (гипотеза *е*), то можно сказать, что

$$\varepsilon_{бt}^*(t)=\varepsilon_t^*(t);\quad \sigma_{бt}^*(t)=\sigma_t^*(t) \tag{8}$$

Используя известные из курса сопротивления материалов соотношения

$$\sigma_t^*(t)=\sigma_x^*(t)-\tau_{xy}^*(t)tg\alpha=\sigma_y^*(t)-\tau_{xy}^*(t)ctg\alpha, \tag{9}$$

деформации $\varepsilon_x^*(t)$ и $\varepsilon_y^*(t)$ с помощюь (3), (4), (7), (8) и (9) можно связать с напряжениями

$$\varepsilon_x^*(t)=\frac{1}{E(t)}\left\{\left[\sigma_x^*(t)+\tau_{xy}^*(t)ctg\alpha\right]a_x^*(t)+\Phi_x^*(t)\cos^2\alpha-\Phi_{xy}^*(t)\sin\alpha\cos\alpha\right\}$$
$$\varepsilon_y^*(t)=\frac{1}{E(t)}\left\{\left[\sigma_y^*(t)+\tau_{xy}^*(t)tg\alpha\right]a_y^*(t)+\Phi_y^*(t)\sin^2\alpha-\Phi_{xy}^*(t,\tau)\sin\alpha\cos\alpha\right\} \tag{10}$$

где

$$a_i^*(t)=\frac{m_i(t)}{\mu_i}\lambda_i^*(t)\psi_{ai}^*(t)\quad m_i(t)=\frac{E(t)}{E_{ai}}\quad (i=x,\,y), \tag{11), (12}$$

$$\Phi_x^*(t)=\sigma_x^*(t)+\frac{1-\nu}{\nu}\frac{E(t)}{E(\tau_1)}\sigma_x(\tau_1)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma_x^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{13}$$

$\Phi_y^*(t)$ и $\Phi_{xy}^*(t)$ определя.тся по формуле (13), если в ней заменить σ_x соответственно на σ_y и τ_{xy}.

Углы сдвига определяются по теории малых деформаций $[2]$:

$$\gamma_{xy}^*(t) = \varepsilon_x^*(t) ctg\alpha + \varepsilon_y^*(t) tg\alpha - \varepsilon_t^*(t)\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (14)$$

Деформация $\varepsilon_t^*(t)$ выражается через (18), где $\sigma_t^*(t)$ следует заменить на $[2]$:

$$\sigma_t^*(t) = \sigma_x^*(t)\cos^2\alpha + \sigma_y^*(t)\sin^2\alpha - 2\tau_{xy}^*(t)\sin\alpha\cos\alpha \qquad (15)$$

Тогда

$$\gamma_{xy}^*(t) = \frac{1}{E(t)}\Big\{\sigma_x^*(t)a_x^*(t)ctg\alpha + \sigma_y^*(t)a_y^*(t)tg\alpha + \tau_{xy}^*(t)\Big[a_x^*(t)ctg^2\alpha +$$

$$+a_y^*(t)tg^2\alpha\Big] - \Big[\Phi_x^*(t) + \Phi_y^*(t)\Big]\sin\alpha\cos\alpha + \Phi_{xy}^*(t)\Big\} \qquad (1.16)$$

Физические зависимости (10) и (16) позволяют учитывать нелинейность деформирования железобетона, вызванную трещинообразованием и ползучестью бетона при обобщенном плоском напряженном состоянии. При $t = \tau_1$ они совпадают с соответствующими выражениями для случая кратковременного действия нагрузки теории Н.И. Карпенко $[2]$.

Если известны a_i^*, то есть λ_i^*, ψ_{ai}^* (11), то уравнения равновесия, уравнение совместности деформаций и формулы (10) и (16) образуют полную систему уравнений, описывающую напряженное состояние. Эта система уравнений состояния может быть сведена к такому интегро-дифференциальному уравнению:

$$Д_a^4\left[F^*(t)\right] + Д_B^4\left[F^*(t) + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{E(t)}{E(\tau_1)}F(\tau_1) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} F^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right] = 0 \qquad (17)$$

$Д_a^4$ - дифференциальный оператор следующей структуры:

$$Д_a^4 = a_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2\left(a_{13}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + a_{23}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}\right) + a_{33}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} +$$

$$+\left(2\frac{\partial a_{11}}{\partial y} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \left(2\frac{\partial a_{22}}{\partial x} - \frac{\partial a_{23}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial a_{33}}{\partial y} - 3\frac{\partial a_{23}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} +$$

$$+\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial x}-3\frac{\partial a_{13}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_{13}}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_{13}}{\partial y^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_{13}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (18)$$

в котором обозначено

$$a_{11}=a_x^*(t);\quad a_{22}=a_y^*(t);\quad a_{33}=a_x^*(t)ctg^2\alpha+a_y^*(t)tg^2\alpha;$$

$$a_{13}=a_x^*(t)ctg\alpha;\quad a_{23}=a_y^*(t)tg\alpha \qquad (19)$$

$Д_B^4$ - то же, что и (1.19), но с заменой a_{ij} на b_{ij}, причем

$$b_{11}=\cos^2\alpha;\quad b_{22}=\sin^2\alpha;\quad b_{33}=1;\quad b_{13}=b_{23}=-\sin\alpha\cos\alpha$$

Решение уравнения (1.18) удобно выполнять путем разыскания функции F^* в определенные, наперед заданные моменты времени, то есть путем построения вектора значений этой функции. Если использовать известную зависимость между интегральным оператором и произведением вектора на матрицу $[3]$, то задачу можно свести к решению матричного уравнения

$$Д_a^4\left[\overrightarrow{F^*(t_k)}\right]+Д_B^4\left[\|\Delta\delta\|\cdot\overrightarrow{F^*(t_k)}\right]=0 \qquad (20)$$

где $\overrightarrow{F^*(t_k)}$ - вектор функции напряжений для моментов времени $\tau_1, t_1, t_2 \dots t_k$; $\|\Delta\delta\|$ - треугольная матрица вида

$$\|\Delta\delta\|=\begin{Vmatrix} 1/\nu & & & \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & & \\ \Delta_{20} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{k0} & \Delta_{k1} & \dots & \Delta_{kk} \end{Vmatrix} \qquad (21)$$

Элементы матрицы (1.21) определяются формулами

$$\Delta_{i0}=E(t_i)\left[\delta(t_i,\tau_1)-\delta\left(t_i,\xi\right)_{\tau_1}^{t_1}+\frac{1-\nu}{\nu E(\tau_1)}\right];$$

$$\Delta_{i1}=E(t_i)\left[\delta(t_i,\xi)_{t_{n-1}}^{t_n}-\delta\left(t_i,\xi\right)_{\tau_n}^{t_{n+1}}\right] \qquad (22)$$

$$\Delta_{ii}=E(t_i)\delta(t_i,\xi)_{t_{i-1}}^{t_i}\qquad (i, n=1, 2,\dots k;\ t_0=\tau_1)$$

$\delta(t_i,\xi)_{t_{i-1}}^{t_i}$ - средняя полная относительная деформация (2).

При кратковременном действии нагрузки $(t=\tau_1)$ может быть использован алгоритм, описанный в $[2]$. Для последующих моментов времени расчет принципиально не отличается от решений, основанных на использовании метода Н.М. Крылова - Н.Н. Боголюбова. Таким образом, решение сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка с переменными коэффициентами относительно функции напряжений F^* для моментов времени $t=\tau_1, t_1, t_2, \ldots t_k$.

Зоны (элементы) без трещин могут быть рассчитаны по уравнению (1), которое также представляется в дискретном по времени виде.

Дискретизация по координатам с помощюь одного из численных методов дает возможность для решения конкретных задач применить ЭВМ.

Как уже указывалось, коэффициенты a_{ij} (11) зависят от λ_i^* и ψ_{ai}^*. Методика определения величин λ_i^* потребовала дополнительного экспериментального обоснования; соответствующие опыты применительно к методике $[2]$ для случая длительного загружения были проведены в свое в ремя в Одесском инженерно-строительном институте $[5]$.

Для создания определенного представления о характере и величинах коэффициентов λ_i^*, ψ_{ai}^* и влиянии трещинообразования на деформации ε_x^*, ε_y^*, γ_{xy}^*, ниже рассмотрены два простейших случая.

Растяжение в направлении $n(\sigma_n > R_p)$. Стержни ортогональной арматурной сетки расположены под углом $\alpha = 45^\circ$ к образовавшейся трещине $\left(E_{ax}\mu_x = E_{ay}\mu_y = E_a\mu\right)$. В этом случае можно считать $[2]$

$$\lambda_i^*(t) = \lambda_i\ (\tau_1) = \lambda = const; \quad \psi_{ai}(t) = \psi_a^*(t), \quad (i = x, y)$$

Исходные данные: $\sigma_n = \sigma = 2.4 МПа, \quad E_a = 2.1 \cdot 10^5 МПа,$

$\mu = 0.01;$ бетон из опытов ОИСИ (1 серия) $[7]$, $\quad \tau_1 = 20$ сут.

Коэффициент затухания напряжений в бетоне между трещинами вследствие ползучести $H_{бi}^*(t,\tau_1)$, определяем, воспользовавшись аппаратом наследственной теории старения для случая простого растяжения железобетонного элемента без трещин $[7]$.

По формулам (1.10), (1.16) получаем: $\psi_a(\tau_1) = 0.5694$; $\varepsilon_x(\tau_1) = \varepsilon_y(\tau_1) = 65.07 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(\tau_1) = 130 \cdot 10^{-5}$; $\psi_a(900) = 0.6809$; $\varepsilon_x^*(900) = \varepsilon_y^*(900) = 77.72 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(900) = 155.52 \cdot 10^{-5}$.

Растяжение со сжатием $\left(\sigma_n = \sigma > R_p,\ \sigma_t = -\sigma\right)$. Квадрат, выделенный в пределах такого элемента под углом $\alpha = 45^\circ$, находится в условиях чистого сдвига. Исходные данные те же, что и в предыдущем примере.

В силу этого λ_i^* и ψ_{ai}^* равны соответствующим величинам из предыдущего примера.

Деформации (1.10) и (1.16): $\varepsilon_x\left(\tau_1\right) = \varepsilon_y\left(\tau_1\right) = 56.16 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}\left(\tau_1\right) = 147.95 \cdot 10^{-5}$; $\varepsilon_x^*\left(900\right) = \varepsilon_y^*(900) = 49.91 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}\left(900\right) = 211.22 \cdot 10^{-5}$.

В первом примере деформации растрескавшегося железобетонного элемента возрастают вследствие ползучести бетона до 20%. Во втором примере деформации ε_x^* и ε_y^* уменьшаются, но углы сдвига увеличивабтся на 43%. Т.о, влияние ползучести весьма значительно.

Заключение

Необходимо иметь в виду, что уравнения (1), (17) и (20) описывают весьма сложное напряженное и деформированное состояния. Учитывается характер, расположение, направление и ширина раскрытыя трещин, особенности деформаций арматуры в трещинах, и, наконец, ползучесть бетона. Это открывает возможности для детального описания поведения железобетонных дисков при достаточно широком диапазоне эксплуатационных уровней нагрузок. Реализация описанного алгоритма в ОГАСА показала вполне удовлетворительное совпадение результатов расчетов и экспериментальных данных, а это свидетельствует, что учет влияния ползучести на распределение напряжений в железобетонных конструкциях позволяет, как и предвидел И.Е. Прокопович, оптимизировать их проектирование.

Summury

The permitting integral-differential equation for the plane problem is obtained, taking into consideration the anisotropic character of work of reinforced concrete with cracks under prolonged load.

Литература

1. Гвоздев А.А., Карпенко Н.И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии. «Строительная механика и расчет сооружений». 1965, №2.

2. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976.

3. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.

4. Прокопович И.Е., Яременко А.Ф. Исследование работы железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести. Сб. «Проблемы ползучести и усадки бетона». ЦНИИ Минтрансстроя, вып.77, М., 1974.

5. Еньков Е.У. Физические зависимости плоского напряженного состояния железобетона с трещинами в условиях ползучести и экспериментальное обоснование соответствующих параметров. - Сб. Строительные конструкции. - К., 1979. с. 54-57.