УДК 620.193.4:624.012.45

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК И РАМ

**Фомин В.М., Фомина И.П.**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса*

Начнем с решения статических задач. В [1] было выведено дифференциальное уравнение изменения изогнутой оси железобетонной балки при пошаговом методе решения, которое может быть представлено в следующем виде

$$y'''+Z_1(s)y''+Z_2(s)y'=Z_3(s)dN(0)/H_0-Z_4(s)dQ(0)/H_0\,. \quad (1)$$

Здесь через $y$ обозначено $dv$ — приращение перемещения точки оси балки с материальной абсциссой $s$, штрих означает производную по $s$, $Zj$(s) ($j$ = 1,2,3,4) − непрерывные функции $s$, $dN(0)$ и $dQ(0)$ − приращение продольной и поперечной сил в начале рассматриваемого участка, $H_0 = H / l^2$ , $l$ — его длина, $H$ – приведенная жесткость поперечного сечения.

Действуя аналогично [2], заменим эти функции кусочно-постоянными функциями, т.е. фактически заменим рассматриваемый участок балки рядом более мелких участков (будем называть их сегментами), каждому из которых соответствует дифференциальное уравнение (12) с постоянными коэффициентами.

Построение фундаментальных функций задачи Коши для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1), производится следующим образом: на первом сегменте $j$–я фундаментальная функция удовлетворяет начальным условиям

$$y_j^{(j-1)}=1,\; y_j^{(m)}=0 \text{ при } m\neq j-1 \; (j=1,2,3).$$

А далее эта функция продолжается на следующий сегмент непрерывно вместе с ее первой и второй производными.

Аналогично поступаем и с построением частного решения уравнений

$$y'''+z_{1,i}y''+z_{2,i}y'=z_{3,i}/H_0\,, \quad (2)$$

$$y'''+z_{1,i}y''+z_{2,i}y'=-z_{4,i}/H_0\,, \quad (3)$$

при нулевых начальных условиях.

Затем производится построение матрицы $\boldsymbol{A}(x)$ и векторов $\boldsymbol{B}_Q(x)$ и $\boldsymbol{B}_N(x)$ :

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_Q(x)=\begin{bmatrix} y_Q(x) \\ y_Q'(x) \\ y_Q''(x) \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_N(x)=\begin{bmatrix} y_N(x) \\ y_N'(x) \\ y_N''(x) \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие построения продемонстрированы на примере 1.

**Пример 1.**

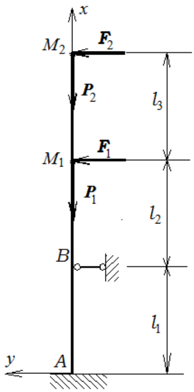

Рис.1

Исследуем процесс плоского изгиба статически неопределимой железобетонной колонны, на которой расположены два груза и на которую действуют гармонически изменяющиеся горизонтальные силы $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t / T_i)$ $(i = 1,2)$ (рис. 1), причем периоды изменения этих сил таковы, что можно считать деформации изгиба квазистатическими.

Колонну будем считать балочной системой, состоящей из трех балочных элементов (участков), пограничные сечения которых проходят через точки $A$, $B$, $M_1$ и $M_2$. Предполагается, что нагружение колонны происходит в два этапа. На предварительном этапе происходит постепенное увеличение массы грузов (т. е., постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Затем при $t = 0$ начинается основной этап: включаются силы $F_1$ и $F_2$. Продольные силы остаются неизменными.

Используя алгоритм метода граничных элементов [2], можно записать следующие соотношения:

$$\boldsymbol{X}_k(l_k) = \boldsymbol{A}_k(l_k)\boldsymbol{X}_k(0) + \boldsymbol{B}_{Q,k} dQ_k(0) . \tag{4}$$

Здесь

$$\boldsymbol{X}_k(x)=\begin{bmatrix} dv_k(x) \\ dv_k'(x) \\ dv_k''(x) \end{bmatrix}$$

(введен индекс $k$, обозначающий номер элемента, $k = 1,2,3$).

Из равенства $\boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(l_1)$ имеем

$$\boldsymbol{X}_2(l_2) = \boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{A}_1(l_1)\boldsymbol{X}_1(l_1) + \boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{B}_{Q,1} dQ_1(0) + \boldsymbol{B}_{Q,2} dQ_2(0).$$

Учитывая, что $\boldsymbol{X}_3(0) = \boldsymbol{X}_2(l_2)$, получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_3(l_3) &= \boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{A}_1(l_1)\boldsymbol{X}_1(l_1) + \boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{B}_{Q,1} dQ_1(0) + \\ &+ \boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{B}_{Q,2} dQ_2(0) + \boldsymbol{B}_{Q,3} dQ_3(0). \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, очевидно (см. рис.1), что

$$dQ_3(0) = -dF_2,\ dQ_2(0) = -dF_1 - dF_2.$$

Тогда (5) запишется так

$$\boldsymbol{X}_3(l_3) = \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{X}_1(0) + \boldsymbol{U}_1 dQ_1(0) + \boldsymbol{U}_2 , \qquad (6)$$

где

$$\boldsymbol{A}_p = \boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{A}_1(l_1),\ \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{A}_2(l_2)\boldsymbol{B}_{Q,1},$$

$$\boldsymbol{U}_2 = -\boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{B}_{Q,2}dF_2 - (\boldsymbol{A}_3(l_3)\boldsymbol{B}_{Q,2} + \boldsymbol{B}_{Q,3})dF_3.$$

Из условий закрепления на концах колонны следует

$$\boldsymbol{X}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_1''(0) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_3(l_3) = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Образуем матрицу $\boldsymbol{A}_p^{(0)}$, которая получается из $\boldsymbol{A}_p$ обнулением первых двух столбцов и вектор $\boldsymbol{X}_1^*$, состоящий из незаданных элементов векторов $\boldsymbol{X}_1(0)$ и $\boldsymbol{X}_1(l_3)$:

$$\boldsymbol{X}_1^* = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\boldsymbol{A}_p^{(0)}\boldsymbol{X}_1^* = \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{X}_1(0) . \qquad (7)$$

Кроме того, также нетрудно выяснить, что

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1^* = \boldsymbol{X}_3(l_3) , \qquad (8)$$

где

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При помощи (7) и (8) равенство (6) записывается так

$$(\boldsymbol{A}_p^{(0)} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{X}_1^* = -\boldsymbol{U}_1 dQ_1(0) - \boldsymbol{U}_2 ,$$

откуда находим

$$\boldsymbol{X}_1^* = -(\boldsymbol{A}_p^{(0)} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{U}_1 dQ_1(0) - (\boldsymbol{A}_p^{(0)} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{U}_2 . \qquad (9)$$

Из равенства (4) при $k = 1$ имеем

$$\boldsymbol{X}_1(l_1) = \boldsymbol{A}_1^{(0)}(l_1)\boldsymbol{X}_1^* + \boldsymbol{B}_{Q,1}dQ_1(0) . \qquad (10)$$

Здесь учтено, что

$$\boldsymbol{A}_1(l_1)\boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{A}_1^{(0)}(l_1)\boldsymbol{X}_1^*$$

( $\boldsymbol{A}_1^{(0)}(l_1)$ - матрица, полученная из $\boldsymbol{A}_1(l_1)$ обнулением первых двух столбцов).

Принимая во внимание (9), равенство (10) можно записать так

$$\boldsymbol{X}_1(l_1) = \boldsymbol{U}_3 dQ_1(0) + \boldsymbol{U}_4 \,. \tag{11}$$

Здесь

$$\boldsymbol{U}_3 = -\boldsymbol{A}_1^{(0)}(l_1)(\boldsymbol{A}_p^{(0)} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{B}_{Q,1},\ \boldsymbol{U}_4 = -\boldsymbol{A}_1^{(0)}(l_1)(\boldsymbol{A}_p^{(0)} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{U}_2.$$

Учтем теперь, что $dv_1(l_1) = 0$ , т.е.

$$\boldsymbol{X}_{1,1}(l_1) = 0$$

( $\boldsymbol{X}_{1,1}(l_1)$ − первый элемент вектора $\boldsymbol{X}_1(l_1)$ ). Тогда из (11) будем иметь

$$dQ_1(0) = -\boldsymbol{U}_{4,1} / \boldsymbol{U}_{3,1} \,.$$

Таким образом, неизвестная величина $dQ_1(0)$ найдена. А из (9) находим остальные неизвестные величины.

Переходим к решению динамических задач. Исследуется движение статически неопределимой железобетонной балки или рамы под действием системы сосредоточенных переменных сил. При этом предполагается, что масса этих балок или рам сосредоточена в системе материальных точек (сосредоточенных масс) на них расположенных, а переменные силы $\boldsymbol{F}_k(t)$ = $\boldsymbol{A}_k$ $\sin(2\pi t\ /T_k)$ ($k$ = 1,2,…,$n$, $n$ — число материальных точек) приложены к этим точкам. При определении приращений прогибов будем используется метод линейного ускорения с модификацией Вильсона [3].

Составляя основное уравнение динамики для каждой из сосредоточенных масс, получаем

$$\mathbf{M}\widehat{\Delta}\mathbf{a} = \widehat{\Delta}\mathbf{F} + \widehat{\Delta}\mathbf{R} \,. \tag{12}$$

В формуле (12) $\boldsymbol{M}$ — диагональная матрица масс точек, $\widehat{\Delta}\mathbf{a}$ — вектор – столбец приращений ускорений, $\widehat{\Delta}\mathbf{F}$ и $\widehat{\Delta}\mathbf{R}$ — вектора приращений вынуждающих сил и реакций конструкции. На основании метода линейных ускорений имеем

$$\widehat{\Delta}\mathbf{a} = \frac{6}{(\widehat{\Delta}t)^2}[\widehat{\Delta}\mathbf{v} - \mathbf{V}\widehat{\Delta}t - \frac{1}{2}\mathbf{\bar{a}}(\widehat{\Delta}t)^2\,]\,. \tag{13}$$

Здесь $\widehat{\Delta}t$ - расширенный шаг по времени, причем в соответствии с методом Вильсона $\widehat{\Delta}t = \theta\Delta t$ ($\theta$ > 1 — скалярный множитель, $\Delta t$ — временной шаг), $\widehat{\Delta}\mathbf{v}$ — вектор приращений перемещений точек, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{a}$ — векторы их скоростей и ускорений, определенные на предыдущем шаге. Используя вышеизложенную методику решения статических задач, можно определить вектор перемещений, вызванный статической нагрузкой $\widehat{\Delta}\mathbf{F}_{stat}$ :

$$\widehat{\Delta}\mathbf{v} = \mathbf{Y}\,\widehat{\Delta}\mathbf{F}_{stat}$$

($\boldsymbol{Y}$ — матрица, столбцами которой являются векторы приращений перемещений точек, вызванные векторами приращений нагрузок $\Delta\boldsymbol{F}_k$ ($k = 1,2,\ldots,n$), $k$ – й элемент каждого из которых равен единице, а остальные нулю). Очевидно,

$$\widehat{\Delta}\mathbf{v} = -\mathbf{Y}\,\widehat{\Delta}\mathbf{R}\,. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), а затем (13) и (12), получаем

$$\widehat{\Delta}\mathbf{R} = -[\mathbf{I} + \frac{6}{(\widehat{\Delta}t)^2}\mathbf{MY}]^{-1}\{\frac{6}{(\widehat{\Delta}t)^2}\mathbf{M}[\mathbf{V}\widehat{\Delta}t + \mathbf{a}\frac{(\widehat{\Delta}t)^2}{2}] + \widehat{\Delta}\mathbf{F}\}\,. \qquad (15)$$

### *Заключение*

Определив из (15) $\widehat{\Delta}\mathbf{R}$, находим из (14) и (13) $\widehat{\Delta}\mathbf{v}$ и $\widehat{\Delta}\mathbf{a}$, а затем из формул

$$\Delta\mathbf{a} = \frac{1}{\theta}\widehat{\Delta}\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{V} = (\mathbf{a} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{a})\Delta t,\ \Delta\mathbf{v} = \mathbf{V}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \frac{1}{3}\Delta\mathbf{a})(\Delta t)^2\,,$$

определяем приращения ускорений, скоростей и перемещений материальных точек, соответствующие промежутку времени $\Delta t$. Завершается шаг вычислением новых значений ускорений, скоростей и перемещений:

$$\boldsymbol{a}_{нов} = \boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{V}_{нов} = \boldsymbol{V} + \Delta\boldsymbol{V}, \boldsymbol{v}_{нов} = \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}\ .$$

### *Литература*


1.Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345−353.

2. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Оробей В.Ф. и др. Численные методы в механике — Одесса, 2004 — 564 с.

3. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. — М.: Стройиздат, 1979. — 319 с.