УДК 691.32

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕКУЩИХ ОБЪЕМНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ И СДВИГА ДЛЯ БЕТОНА

Фомин В.М. , Фомина И.П. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

При исследовании нелинейных колебаний железобетонных конструкций возникает необходимость в аналитических зависимостях между средними напряжениями σ_0 и средними относительными деформациями ε_0, а также между октаэдрическими касательными напряжениями τ_0 и сдвигами на октаэдрических площадках γ_0 для бетона. Подобные зависимости приведены в статье [1], однако они достаточно громоздки и неудобны для качественного исследования колебаний. В настоящей работе предлагается вывод указанных зависимостей и аналитических выражений для соответствующих секущих модулей из формул для диаграмм одноосного растяжения (сжатия) и поперечных деформаций, приведенных в книге [2].

Пусть бетонный стержень испытывает деформацию одноосного продольного сжатия. Обозначив через ε_b и ε_p соответственно продольную и поперечную относительные деформации, будем иметь

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_b + 2\varepsilon_p)/3 \tag{1}$$

Учитывая, что $\varepsilon_p = -\nu_b \varepsilon_b$, а $\varepsilon_b = \sigma_b/(E_0 V_b)$ (σ_b - нормальное напряжение в поперечном сечении стержня, ν_b - коэффициент Пуассона, E_0 - начальный модуль упругости бетона, V_b - коэффициент изменения секущего модуля [2]), можем записать

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_b(1-2\nu_b)}{3E_0V_b} \tag{2}$$

Заметим, что [2]

$$V_b = \hat{V}_b + (V_0 - \hat{V}_b)\sqrt{1-\omega_1\eta - \omega_2\eta^2} \tag{3}$$

$$\nu_b = \hat{\nu}_b + (\nu_0 - \hat{\nu}_b)\sqrt{1-\eta^2} \tag{4}$$

В формуле (3) $\widehat{V}_b$ - максимальное значение коэффициента V_b, V_0 - его начальное значение; ω_1 и ω_2 - некоторые постоянные величины. Их значения определяются из формул

$$\widehat{V}_b = \frac{\widehat{\sigma}_b}{\widehat{\varepsilon}_b E_0},\ \widehat{\sigma}_b = -R_{b,ser} \qquad (5)$$

$$\widehat{\varepsilon}_b = -\frac{(18 + R_{b,ser})(62R_{b,ser} + 0.675R_{b,ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{b,ser})(7R_{b,ser} + R_{b,ser}^2 + 22)} \qquad (6)$$

($R_{b,ser}$ в МПа – приводится в СниПе, а $V_0 = 1$, $\omega_1 = 2 - 2{,}5V_b$ для восходящей ветви диаграммы одноосного сжатия; $V_0 = 2{,}05\widehat{V}_b$, $\omega_1 = 1{,}95\widehat{V}_b - 0{,}138$ для нисходящей; $\omega_2 = 1 - \omega_1$).

В формуле (4) $\widehat{\nu}_b$ - максимальное значение ν_b:

$$\widehat{\nu}_b = \nu_0 + 1 - \sqrt[3]{\widehat{V}_b} \qquad (7)$$

Заметим, что величины V_b и ν_b в формулах (3) и (4) являются функциями уровня нормальных напряжений η:

$$\eta = \sigma_b / \widehat{\sigma}_b \qquad (8)$$

Введем величину ζ, которая характеризует уровень среднего напряжения:

$$\zeta = \varepsilon_0 / \widehat{\varepsilon}_b \qquad (9)$$

Тогда (2) может быть записано так:

$$\zeta = A\eta f(\eta) \quad \left(A = \frac{\widehat{\sigma}_b(1 - 2\nu_0)}{3E_0\widehat{\varepsilon}_b};\ f(\eta) = \frac{1 - 2\nu_b(\eta)}{[1 - 2\nu_0]V_b(\eta)} \right) \qquad (10)$$

Формула (10) выражает зависимость ε_0 от σ_b, а значит, и от σ_0, так как $\sigma_0 = \sigma_b / 3$ при одноосном сжатии. Поскольку нас интересует обратная зависимость σ_0 от ε_0, то проблема состоит в обращении выражения (10). Для однозначного обращения будем рассматривать только восходящую ветвь диаграммы, т.е. при $\zeta_b < \widehat{\zeta}_b$, $\eta < 1$ ($\widehat{\zeta}_b = Af(1)$). Обозначим искомую зависимость η от ζ так: $\eta = \chi(\zeta)$. Тогда (10) можно представить так:

$$\eta = \frac{1}{A}\zeta \frac{1}{f[\chi(\zeta)]} \qquad (11)$$

Так как $\nu(0) = \nu_0$, а $V_b(0) = 1$, то $f(0) = 1$. Как уже отмечалось, на восходящей ветви диаграммы зависимость $\eta = \chi(\zeta)$ однозначна. Отсюда следует, что $\eta(0) = 0$. Поэтому можно записать следующее равенство:

$$\frac{1}{f[\chi(\zeta)]} = 1 + \varphi(\zeta) \tag{12}$$

где $\varphi(0) = 0$. Используя (12), запишем (11) в следующем виде:

$$\eta = \frac{1}{A}\zeta[1 + \varphi(\zeta)] \tag{13}$$

Аналитическая запись функции $\varphi(\zeta)$ неизвестна, однако, ее аппроксимацию при помощи полиномов легко построить. Разбиваем отрезок $[0, \eta^*]$ ($\eta^* < 1$) на n частей и для каждой точки $\eta_k = k\eta^* / n$ ($k = 0,1,..., n$) определяем соответствующее значение ζ_k по формуле (10). Далее из формулы (13) при найденных значениях η_k и ζ_k определяется $\varphi(\zeta_k)$. Используя какую-либо интерполяционную формулу (Лагранжа, Ньютона или др.), можем записать

$$\eta = \frac{1}{A}\zeta[1 + \tilde{\varphi}(\zeta)], \quad \tilde{\varphi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k \tag{14}$$

Заменяя η и ζ их выражениями (8) и (9) и учитывая, что $\sigma_0 = \sigma_b / 3$, получаем

$$\begin{gathered} \sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0 \\ K(\varepsilon_0) = K_0[1 + \tilde{\phi}(\frac{\varepsilon_0}{\hat{\varepsilon}_b})] \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $K(\varepsilon_0)$ - секущий объемный модуль упругости бетона, $K_0 = \dfrac{\hat{\sigma}_b}{3A\hat{\varepsilon}_b}$. Легко убедиться в том, что $K_0 = \dfrac{E_0}{3(1 - 2\nu_0)}$, т.е. представляет собой начальный объемный модуль упругости.

Переходим к определению сдвига на октаэдрических площадках. Из формулы $\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$ получаем

$$\gamma_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\, \varepsilon_b \,| (1 + \nu_b) \tag{16}$$

так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_b$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu_b \varepsilon_b$. Таким же образом получаем, что октаэдрические касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_0 = \sqrt{2}\,|\,\sigma_b\,|\,/\,3 \qquad (17)$$

Тогда из зависимости

$$\tau_0 = G\gamma_0 \qquad (18)$$

следует, что

$$G = \frac{\tau_0}{\gamma_0} = \frac{E_0 V_b(\eta)}{2[1+\nu_b(\eta)]} \qquad (19)$$

Введем обозначение

$$\rho = \frac{3\gamma_0}{4\sqrt{2}\,|\,\hat{\sigma}_b\,|} \qquad (20)$$

Учитывая, что $\sigma_b = \eta\hat{\sigma}_b$, а также (17), (19), (20), получаем из (18)

$$\rho = B\eta g(\eta) \quad \left(B = \frac{\hat{\sigma}_b(1+\nu_b)}{2E_0\hat{\varepsilon}_b},\ g(\eta) = \frac{1+\nu_b(\eta)}{(1+\nu_0)V_b(\eta)},\ g(0)=1 \right) \qquad (21)$$

Теперь проблема состоит в обращении функции (21), т.е. в определении зависимости η от ϱ. Действуя аналогично предыдущему случаю, приходим к соотношению, аналогичному (13)

$$\eta = \frac{1}{B}\varrho[1+\psi(\varrho)],\ \ (\psi(0)=0) \qquad (22)$$

Продолжая так же далее, получаем

$$\eta = \frac{1}{B}\varrho[1+\tilde{\psi}(\varrho)],\ \ \tilde{\psi}(\varrho) = \sum_{k=0}^{m} b_k \varrho^k \qquad (23)$$

где коэффициенты b_k $(k = 1,2,...,m)$ определяются так же, как a_k $(k = 1,2,...,n)$. Заменяя η отношением $\sigma_b / \hat{\sigma}_b$, а ϱ в соответствии с (20), находим

$$\begin{aligned} \tau_0 &= G(\gamma_0)\gamma_0 \\ G(\gamma_0) &= G_0[1+\tilde{\psi}(d_b\gamma_0)] \end{aligned} \qquad (24)$$

($G(\gamma_0)$ -секущий модуль сдвига бетона, а G_0 - соответствующий начальный модуль, $d_b = \dfrac{3}{4\sqrt{2}\,|\,\hat{\sigma}_b\,|}$).

Пусть теперь стержень подвергается одноосному растяжению. Все вышеприведенные формулы за исключением (6), оказываются верными при замене индекса "b" на индекс "bt". Вместо (6) следует использовать формулу [3]

$$\hat{\varepsilon}_{bt} = A_0 R_{bt}^{\alpha} \qquad (25)$$

где A_0 и α - параметры, зависящие от типа бетона.

Таким образом, формулы (15) и (26) с учетом вышеуказанной замены справедливы и для одноосного растяжения. Следовательно, коэффициенты диаграмм сдвига для сжатия и растяжения (т.е. для разных значений параметра Лоде-Надаи) отличаются друг от друга, что было отмечено в работе [1].

Пример. В качестве примера рассмотрим стержень, выполненный из бетона В40:

$R_{b,ser}$=29 МПа, E_0=36*10^3 МПа, $R_{bt,ser}$ = 2,1 МПа.

Рассматриваем сначала случай одноосного сжатия. По формулам (3)-(7) находим

$\hat{\varepsilon}_b$=-2,056*10^{-3}; $\hat{V}_b$=0,392; ω_1=2-2,5$\hat{V}_b$=1,02; $\omega_2 = 1-\omega_1$ = -0,02; $\hat{\nu}_b$=0,468 (принято, что ν_0=0,2). Из формул (3) и (4) определяем

$$V_b = 0{,}392 + 0{,}608\sqrt{1-1{,}02\eta+0{,}02\eta^2},\ \nu_b = 0{,}468 - 0{,}268\sqrt{1-\eta^2},$$

а из (10):

$$A = 0{,}0784;\ f(\eta) = \frac{0{,}064 + 0{,}536\sqrt{1-\eta^2}}{0{,}6(0{,}392 + 0{,}608\sqrt{1-1{,}02\eta+0{,}02\eta^2})}$$

Примем $\eta^* = 0{,}8$ и разобьем отрезок [1, 0,8] на два участка. Тогда из (10) получаем $\eta_0 = 0;\ \eta_1 = 0{,}4;\ \eta_2 = 0{,}8;\ \zeta_0 = 0;\ \zeta_1 = 0{,}0337;$ $\zeta_2 = 0{,}0609$. Из (12) находим $\varphi(\zeta_0) = 0;\ \varphi(\zeta_1) = -0{,}0695;\ \varphi(\zeta_2) = 0{,}0297$. Очевидно, что $a_0 = 0$. Для нахождения a_1 и a_2 составляем систему уравнений

$$a_1 0{,}0337 + a_2 0{,}0337^2 = -0{,}0695$$
$$a_1 0{,}0609 + a_2 0{,}0609^2 = 0{,}0297$$

решая которую находим: a_1 = -5,224; a_2 = 93,807. Далее, из (15) получаем

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0;\quad K(\varepsilon_0) = 20*10^3(1 + 2{,}541*10^3\varepsilon_0 + 22{,}192*10^6\varepsilon_0^2)$$

Последние два слагаемых внутри скобок показывают отклонение поведения материала от линейного в рассматриваемом диапазоне деформаций.

Покажем, что это отклонение мало. Максимальное значение ζ равно ζ_2=0,0609. Тогда соответствующее значение $\varepsilon_{0,2} = \hat{\varepsilon}_b\zeta_2$ = -0,1252*10^{-3}. Таким образом, необходимо найти максимум модуля функции $\varphi_0(\varepsilon_0) = 2{,}541*10^3\varepsilon_0 + 22{,}192*10^6\varepsilon_0^2$ на отрезке $[-0{,}1252*10^{-3},\ 0]$. Приравнивая нулю производную, находим точку минимума функции $\varphi_0(\varepsilon_0): \varepsilon_{0,\min} =$ -0,05725*10^{-3}. Соответствующее значение функции: $\varphi_0(\varepsilon_{0,\min}) = -0{,}0728$. Значение $\varphi_0(-0{,}1252*10^{-3}) =$ =0,0298. Следовательно, отклонение от линейности $|\varphi_0(\varepsilon_0)| \le 0{,}0728$, т.е. гораздо меньше 1.

Переходим к определению модуля сдвига. Действуя в соответствии с формулами (17)-(24), получаем

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0; \quad G(\gamma_0) = 15*10^3(1 - 0{,}383*10^3\gamma_0 + 0{,}0468*10^6\gamma_0^2)$$

Аналогично показывается, что отклонение от линейности мало.

Для растяжения имеем

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0; \ K(\varepsilon_0) = 20*10^3(1 - 2{,}785*10^3\varepsilon_0 - 1041{,}453*10^6\varepsilon_0^2)$$

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0; \quad G(\gamma_0) = 15*10^3(1 - 0{,}148*10^3\gamma_0 - 23{,}714*10^6\gamma_0^2)$$

Заметим, что в этом случае $\varepsilon_{0,2} = \hat{\varepsilon}_{bt}\zeta_2 = 7{,}753*10^{-5}*0{,}8=6{,}202*10^{-5}$. Нетрудно показать, что и в этом случае отклонение от линейности в $K(\varepsilon_0)$ и $G(\gamma_0)$ малы.

***Вывод*:**

Предложены аналитические выражения для объемных модулей упругости и модулей сдвига для бетона, удобные для исследования статики и динамики бетонных и железобетонных конструкций.

Литература

1. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1985, №11, с. 1-5.

2. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М: Стройиздат, 1996.-416 с.

3. Ящук В.Е., Курган П.Г. О связи напряжения-деформации растянутого бетона // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1981, №12, с. 12-17.