УДК 539.3

СОПРОТИВЛЕНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Кобринец В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

Предлагается методика расчета внецентренно сжатых стержней с учетом физической нелинейности. Применение классической методики, когда связь между напряжениями и деформациями принимается не по закону Гука, а в виде нелинейной зависимости не представляется возможным.

Рассматривается внецентренно сжатый стержень прямоугольного сечения $b \times h$. Сила прикладывается с эксцентриситетом e_0. Выгиб стержня плоский, проходит без кручения. Связь между напряжениями и деформациями представлена степенным законом [1]

$$\varepsilon = k \cdot \sigma^n, \tag{1}$$

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Зависимость (1) принята в качестве примера. Она была предложена Бахом (Bach C.) в 1877г., а еще ранее Бюльфингером (Bulfinger) 1729г.

Параметры k и n, характеризующие физические свойства материала, для сжатой и растянутой зон как правило, имеют разные значения. Но в данном случае это не имеет принципиального значения.

Перенесем силу P в центр тяжести и добавим момент $M = Pe_0$. Определим напряжения и деформации отдельно от силы и момента, как это делается в классической теории расчета внецентренно загруженных стержней.

Напряжения и деформации от силы P

$$\sigma_P = \frac{P}{bh}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_P = k\left(\frac{P}{bh}\right)^n. \tag{4}$$

Напряжения и деформации от момента по недеформированной схеме [2]

$$\sigma_M = \frac{2M(2n+1)}{n \cdot bh^2} \cdot \left(\frac{2y}{h}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_M = k\left[\frac{2M(2n+1)}{n \cdot bh^2}\right]^n \cdot \frac{2y}{h}. \tag{6}$$

Полные напряжения и деформации

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_M = \frac{P}{bh}\left[1 + \frac{2(2n+1)}{n} \cdot \frac{e_0}{h} \cdot \left(\frac{2y}{h}\right)^{\frac{1}{n}}\right]; \tag{7}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_P + \varepsilon_M = k\left(\frac{P}{bh}\right)^n \cdot \left[1 + \left(\frac{2(2n+1)}{n} \cdot \frac{e_0}{h}\right)^n \cdot \frac{2y}{h}\right]. \tag{8}$$

Определим максимальные напряжения и деформации при $y = h/2$, принимая $n = 1$. Это соответствует физически линейной постановке. Формула (1) и (2) в этом случае представляет собой закон Гука, где $k = \frac{1}{E}$.

$$\sigma_P = \frac{P}{bh},\ \varepsilon_P = \frac{P}{Ebh}. \tag{9}$$

$$\sigma_M = \frac{6P \cdot e_0}{bh^2},\ \varepsilon_M = \frac{6P \cdot e_0}{Ebh^2}. \tag{10}$$

Полные напряжения и деформации от внецентренно приложенной силы определяются суммированием формул (9) и (10)

$$\sigma = \frac{P}{bh}\left(1 + 6\frac{e_0}{h}\right), \tag{11}$$

$$\varepsilon = \frac{P}{E \cdot bh}\left(1 + 6 \cdot \frac{e_0}{h}\right). \tag{12}$$

Для линейного варианта деформирования материала эти выражения получаются сразу из формул (7) и (8).

Подставляя (12) в (2) при $n = 1$ и $k = \frac{1}{E}$, получим формулу (11). Таким образом в физически линейной постановке внецентренно приложенную силу можно перенести в центр тяжести поперечного сечения и определение напряжений и деформаций получить наложением центрального сжатия и продольного изгиба.

Запишем напряжения и деформации в физически нелинейной постановке, полагая в формулах (7) и (8) $n = 3$ и $y = h/2$

$$\sigma = \frac{P}{bh}\left[1 + 4,667\frac{e_0}{h}\right], \tag{13}$$

$$\varepsilon = k\left(\frac{P}{bh}\right)^3 \cdot \left[1 + \left(4,667 \cdot \frac{e_0}{h}\right)^3\right]. \tag{14}$$

Подставим (14) в формулу (2)

$$\sigma = \frac{P}{bh}\left[1 + \left(4,667\frac{e_0}{h}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} \tag{15}$$

Напряжения по (15) не совпадают с (13). При решении поставленной задачи в физически нелинейной постановке переносить внецентренно прикладываемую силу в центр тяжести недопустимо. Принцип наложения справедлив в физически линейной постановке. В физически нелинейной постановке и в этом случае его применять нельзя. Поэтому предлагается новая методика расчета внецентренно сжатых стержней.

Напряжения вычисляются по одной формуле

$$\sigma = \frac{M_{но} \cdot y_{но}}{I_{z.но}} \tag{16}$$

здесь момент инерции сечения, момент силы и расстояние до волокна, в котором определяются напряжения, определяются относительно нейтральной оси, а не оси стержня

$$I_{z.но} = \frac{n \cdot b}{(2n+1)}\left[\left(C_{но} + 0,5h\right)^{\frac{2n+1}{n}} - \left(C_{но} - 0,5h\right)^{\frac{2n+1}{n}}\right]; \tag{17}$$

$$M_{но} = P\left(e_0 + f\left(l/2\right) + C_{но}\right); \tag{18}$$

$$\left(C_{но} - 0,5h\right) \le y_{но} \le \left(C_{но} + 0,5h\right), \tag{19}$$

где $f\left(l/2\right)$ - прогиб.

Расчет начинается с линейного варианта. Расстояния до нейтральной оси

$$C_{но} = \frac{I_{z.но}}{A_0\left[e_0 + f\left(l/2\right)\right]} \tag{20}$$

для прямоугольного сечения

$$C_{но} = \frac{h}{12\left[e_0 + f\left(l/2\right)\right]};$$

$$I_{z\,но} = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot C_{но}^2 .$$

Напряжения вычисляются по (16). В физически линейном варианте M и I_z в формуле (16) можно определять относительно оси стержня и только $y_{но}$ относительно нейтральной оси.

По формуле (1) вычисляются деформации в крайних волокнах поперечного сечения ε_1 и ε_2. Далее процесс определения напряжений и деформаций выполняется итерационно. Уточняется расстояние до нейтральной оси и прогиба. Можно использовать формулы, применяемые для расчета колонн, полученные с учетом гипотезы Бернулли, которая принимается и для физически нелинейных задач

$$C_{но} = \frac{h(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} ; \qquad (21)$$

$$f(l/2) = 0{,}125 l^2 \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} . \qquad (22)$$

По (23) определяется прогиб для шарнирно опертого стержня.

Заключение

Формула (1) подвергается критике и справедливо. Но есть достаточно других предложений по описанию физически нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями.

Они конечно могут применяться для расчета внецентренно сжатых стержней по предлагаемой методике. При этом могут возникнуть трудности математического порядка, но их необходимо преодолевать.

Литература

1. Глушков Г.С. Инженерные методы расчета на прочность и жесткость. – М.: Машиностроение, 1971. – 384с.
2. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – К.: Выща школа, 1979. – 694с.