УДК 624.074

О ВОЗМУЩЕНИЯХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ СВЯЗЯМИ

Бекшаев С.Я. (*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса*)

Исследуется изменение собственных частот конструкций, содержащих упругие стержни и гибкие растянутые элементы, подкрепленные упругими связями, вызванное изменением расположения связей. Получены результаты, позволяющие в линейном приближении оценивать указанные изменения. Рассмотрены особые случаи, связанные с нарушениями непрерывности в распределении характеристик исследуемых конструкций.

Одним из способов управления характеристиками, в частности собственными частотами, деформируемых конструкций является наложение связей. При этом для достижения нужных результатов необходимо, чтобы как упругие характеристики, так и расположение связей удовлетворяли довольно жестким требованиям, что в силу различных обстоятельств не полностью выполняется на практике. Цель работы – выяснить влияние некоторых изменений параметров связей на собственные частоты подкрепленной конструкции.

1. Пусть положение системы определяется функцией $y = y(M)$ ее точки M (в недеформированном состоянии $y = 0$). Собственные частоты и формы являются решениями линейной задачи на собственные значения

$$Dy = \lambda\mu y\,, \tag{1}$$

где D – оператор жесткости конструкции (определяет силу, действующую на точку M со стороны других точек системы и упругих связей), $\lambda\mu$ – оператор инерции, определяющий силу инерции, действующую на точку M при гармонических колебаниях с амплитудным смещением y и круговой частотой $\sqrt{\lambda}$. Представим оператор жесткости в виде суммы $D = B + C$, где B – жесткость основной конструкции (до усиления связями), C – жесткость, обусловленная связями. Связь – упругая конструкция, смещения точек M' которой равны $Y(M')$. Наложение связи означает, что некоторые из точек M и M'

жестко скреплены и значения функций y и Y в этих точках равны. Работу нагрузки $p = p(M)$, приложенной к системе, при смещении $y(M)$ обозначим (p, y). Тогда условие связи можно выразить равенством $(r, y) = (r, Y)$, справедливым для любой функции $r = r(M)$, определенной в тех точках конструкции, для которых $y(M) = Y(M')$. Реакция связи – вообще говоря, распределенная нагрузка $r = r(M)$, определенная в тех же точках. При любых смещениях системы реакция, действующая на основную конструкцию со стороны связей, выражается через единичные «базисные» реакции

$$r = \sum R_k r_k ,$$

где единичные реакции r_k – векторнозначные линейно независимые функции с той же областью определения, что и r, R_k – скалярные значения реакций.

Упругие свойства связи определяются самосопряженным оператором C жесткости связи и характеризуются коэффициентами податливости α_{ik}, определяемыми следующим образом. Пусть $CY_k = r_k$ (Y_k – такое смещение связи, при котором она порождает базисную реакцию r_k). Тогда $\alpha_{ik} = (r_i, Y_k) = (r_k, Y_i) = \alpha_{ki}$ – работа базисной реакции r_i на перемещении связи, порождающем реакцию r_k. Смещение связи можно представить в виде

$$Y = \sum R_k Y_k + Y_0 ,$$

где Y_0 – смещение, при котором связь не напряжена, т.е. $CY_0 = 0$, откуда в силу самосопряженности оператора C $(r_k, Y_0) = (CY_k, Y_0) = (CY_0, Y_k) = 0$.

Из условия связи

$$(r_i, y) = (r_i, Y) = \sum R_k (r_i, Y_k) + (r_i, Y_0) = \sum \alpha_{ik} R_k .$$

Отсюда, используя обратную матрицу $\| c_{ji} \| = \| \alpha_{ik} \|^{-1}$, выразим реакции связей через смещение основной конструкции

$$R_j = (q_j, y) = \left(\sum c_{ji} r_i, y \right). \tag{2}$$

Оператор C определен на множестве смещений Y связи самой по себе даже при отсутствии основной конструкции. Соответствующий оператор для усиленной системы определим равенством $Cy = CY$, где смещение Y связи вызвано смещением y основной конструкции. Это позволяет уравнение (1) переписать в виде

$$Dy = By + Cy = By + \sum (q_i, y) r_i = \lambda \mu y. \tag{3}$$

2. Для определения изменений собственных частот, вызванных малым изменением оператора D, заменим в (1) D на $D + \varepsilon D'$, y – на $y + \varepsilon y'$, λ – на $\lambda + \varepsilon \lambda'$ и применим стандартную процедуру теории возмущений [1]. Если λ – r-кратная частота, которой отвечают формы y_k, $k = 1,2,...,r$, ортонормированные условием $(\mu y_i, y_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), придем к системе

$$\sum a_i (d_{ik} - \lambda' \delta_{ik}) = 0, \tag{4}$$

определяющей r возмущений частоты и соответствующие предельные (при ε ® 0) возмущенные формы $y = a_1 y_1 + ... + a_r y_r$. Здесь $d_{ik} = (D' y_i, y_k) = (D' y_k, y_i)$. Условием существования нетривиального решения является вековое уравнение $\det \| d_{ik} - \lambda' \delta_{ik} \| = 0$, из которого находятся искомые возмущения λ'. Для $r = 2$ это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} (D' y_1, y_1) - \lambda' & (D' y_1, y_2) \\ (D' y_2, y_1) & (D' y_2, y_2) - \lambda' \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Далее рассматриваются одномерные упругие конструкции, например вантово-стержневые системы, в которых положение точек определяется одной координатой x. Реакция распределена по участку $\xi < x < \eta$.

Рассмотрим возмущение оператора D, вызванное сдвигом связи вдоль оси x на ε.

$$Dy = By + Cy = By + \sum R_i r_i = By + \sum (q_i, y) r_i = By + \sum (q_i(x), y) r_i(x),$$

$$Dy + \Delta Dy = By + \sum (q_i(x - \varepsilon), y) r_i(x - \varepsilon),$$

$$\Delta Dy = \sum (q_i(x - \varepsilon), y) r_i(x - \varepsilon) - \sum (q_i(x), y) r_i(x).$$

$$(q(x), y) = \int_{\xi}^{\eta} q(x) y(x) dx, \quad (q(x-\varepsilon), y) = \int_{\xi+\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} q(x-\varepsilon) y(x) dx = \int_{\xi}^{\eta} q(x) y(x+\varepsilon) dx,$$

Для любой пары непрерывных функций y и v

$$\left(D'y,v\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\sum\int_{\xi}^{\eta}q_i\left(x\right)y\left(x+\varepsilon\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)v\left(x+\varepsilon\right)dx-\right.$$

$$\left.-\sum\int_{\xi}^{\eta}q_i\left(x\right)y\left(x\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)v\left(x\right)dx\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\int_{\xi}^{\eta}q_i\left(x\right)\frac{y\left(x+\varepsilon\right)-y\left(x\right)}{\varepsilon}dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)v\left(x+\varepsilon\right)dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\int_{\xi}^{\eta}q_i\left(x\right)y\left(x\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)\frac{v\left(x+\varepsilon\right)-v\left(x\right)}{\varepsilon}dx\ .$$

Здесь первая сумма в силу самосопряженности ($c_{ik}=c_{ki}$) равна

$$\sum_i\int_{\xi}^{\eta}\sum_k c_{ik}r_k\left(x\right)\frac{y\left(x+\varepsilon\right)-y\left(x\right)}{\varepsilon}dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)v\left(x+\varepsilon\right)dx=$$

$$=\sum_k\int_{\xi}^{\eta}\sum_i c_{ki}r_i\left(x\right)v\left(x+\varepsilon\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_k\left(x\right)\frac{y\left(x+\varepsilon\right)-y\left(x\right)}{\varepsilon}dx=$$

$$=\sum_k\int_{\xi}^{\eta}q_k\left(x\right)v\left(x+\varepsilon\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_k\left(x\right)\frac{y\left(x+\varepsilon\right)-y\left(x\right)}{\varepsilon}dx\,.$$

Если функции $r_k\left(x\right)$ интегрируемы, а $y\left(x\right)$ и $v\left(x\right)$ имеют непрерывные производные, оправдан переход к пределу под знаком интеграла, откуда

$$\left(D'y,v\right)=\sum\int_{\xi}^{\eta}q_k\left(x\right)v\left(x\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_k\left(x\right)y'\left(x\right)dx+$$

$$+\sum\int_{\xi}^{\eta}q_i\left(x\right)y\left(x\right)dx\int_{\xi}^{\eta}r_i\left(x\right)v'\left(x\right)dx=\sum R_i\left(v\right)\left(r_i,y'\right)+\sum R_i\left(y\right)\left(r_i,v'\right),\quad(6)$$

где $R_i(y)$ – величины реакций связей при смещении конструкции по форме $y(x)$, определяемые формулами (2).

3. Рассмотрим представляющий практический интерес случай симметричной конструкции, $B(l-x)=B(x)$, и одной симметричной связи, порождающей реакцию, распределенную по участку длины h по закону $r(x)$, причем $r(\xi+h-(x-\xi))=r(x)$, в точках с координатами $x<\xi$ и $x>\xi+h$ $r(x)=0$. Собственные формы основной конструкции являются либо симметричными, далее С-формами, $y(l-x)=y(x)$, либо кососимметричными, далее К-формами, $y(l-x)=-y(x)$, собственные частоты будем предполагать простыми. Пусть в результате наложения связи, не нарушающего симметрию, одна из частот λ становится двукратной. Кратность возникла, благодаря тому, что одна из низших частот возросла до λ. Пусть v_1 и v_2 – ортонормированные собственные формы, соответствующие частоте λ. Возможны следующие случаи: а) и v_1, и v_2 – С-формы; б) v_1 – С-форма, v_2 – К-форма; в) по крайней мере одна из форм не является ни С-, ни К-формой, $v(x)\neq v(l-x)$, $v(x)\neq -v(l-x)$. Случай, когда и v_1, и v_2 – К-формы, невозможен, т.к. тогда $(r,v_1)=(r,v_2)=0$, откуда, с учетом (3), следует, что и v_1, и v_2 являются формами конструкции до усиления, что противоречит предположению о простоте спектра до усиления. Случай в) на самом деле является случаем б), т.к. в этом случае существуют С- и К-формы, каковыми являются $y_1(x)=(\mu y_1,y_1)^{-1/2}\left[v(x)+v(l-x)\right]$ и $y_2(x)=(\mu y_2,y_2)^{-1/2}\left[v(x)-v(l-x)\right]$. Кроме того, можно считать, что в любом из случаев одна из форм, например y_2, удовлетворяет условию $(q,y_2)=\alpha^{-1}(r,y_2)=0$ (откуда, с учетом (3), следует, что y_2 является формой конструкции до усиления). Действительно, в случае б) $(r,y_2)=0$ как работа симметричной нагрузки на кососимметричном перемещении. В случае а), если $(r,v_1)=b_1\neq 0$ и $(r,v_2)=b_2\neq 0$, перейдем к новым формам $y_1(x)=\left(b_1^2+b_2^2\right)^{-1/2}\left(b_1v_1+b_2v_2\right)$ и $y_2(x)=\left(b_1^2+b_2^2\right)^{-1/2}\left(b_2v_1-b_1v_2\right)$,

причем $(r, y_2) = 0$. Таким образом, всегда можно считать, что из двух ортонормированных форм y_1 и y_2, соответствующих λ, форма y_2 удовлетворяет условию $(r, y_2) = 0$ и является либо С-, либо К-формой, а y_1 – С-форма.

Пусть некоторое смещение связи от симметричного расположения (вызванное, например, неточностью сборки) приводит к «расщеплению» этой частоты, $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon\lambda_1'$, $\lambda_2 = \lambda + \varepsilon\lambda_2'$, где λ_1' и λ_2' являются корнями уравнения (5), которое в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2R_1(r, y_1') - \lambda' & R_1(r, y_2') + R_2(r, y_1') \\ R_1(r, y_2') + R_2(r, y_1') & 2R_2(r, y_2') - \lambda' \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

где $R_i = R(y_i)$ – реакция связи на смещение по форме y_i, согласно (2) равная $R_i = (q, y_i) = \alpha^{-1}(r, y_i)$. Отсюда сразу следует, что $R_2 = 0$. Кроме того, т.к. y_1 симметрична, ее производная y_1' - кососимметрична, $y(l - x) = y(x) \Rightarrow y'(l - x) = -y'(x)$. Поэтому $(r, y_1') = 0$ как работа симметричной нагрузки на кососимметричном перемещении, и уравнение (7) имеет корни $\lambda' = \pm R_1(r, y_2')$. Как видим, одна из совпадающих частот возрастает, а вторая убывает на одну и ту же величину $\lambda'\varepsilon$. Если форма y_2 также симметрична, то $\lambda' = 0$, т.е. в линейном приближении частота λ не изменяется и остается 2-кратной. Заметим, что при расщеплении формы уже не будут произвольными линейными комбинациями y_1 и y_2, а являются малыми возмущениями форм $a_1 y_1 + a_2 y_2$, где пары a_1 и a_2 определяются как собственные векторы задачи (4). В рассматриваемом случае возмущению $\lambda' = +R_1(r, y_2')$ отвечает форма $y^+ = 2^{-1/2}(y_1 + y_2)$, а $\lambda' = -R_1(r, y_2')$ – форма $y^- = 2^{-1/2}(y_1 - y_2)$, причем, как легко убедиться, $y^+(l - x) = y^-(x)$.

4. В качестве примера рассмотрим свободно опертую призматическую балку, в середине которой ставится точечная упругая опора, повышающая основную частоту до второй. В стандартных обозначениях квадрат второй частоты равен $\lambda = 2^4 \lambda_1$, где $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu}$, μ – линейная плотность стержня, а необходимая податливость введенной опоры равна $\alpha = \frac{0,0311}{EI}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3$. На рис. 1 изображена соответствующая С-форма y_1. К-форма y_2 представляет собой синусоиду с одним узлом посередине. Сдвигая опору вправо на εl, получим расщепление, которое иллюстрируется рис. 2, где по горизонтали отложено ε, а по вертикали – приведенная частота λ/λ_1. Пунктирные прямые показывают линейное приближение, описанное выше. Соответствующие собственные формы и их приближения y^+ и y^- для $\varepsilon = 0,1$ показаны на рис. 3, где сплошная линия изображает точные формы, а пунктирная – приближенные. Левый рисунок отвечает меньшей из частот, а правый – большей. Опора помещена в точку с абсциссой 0,6.

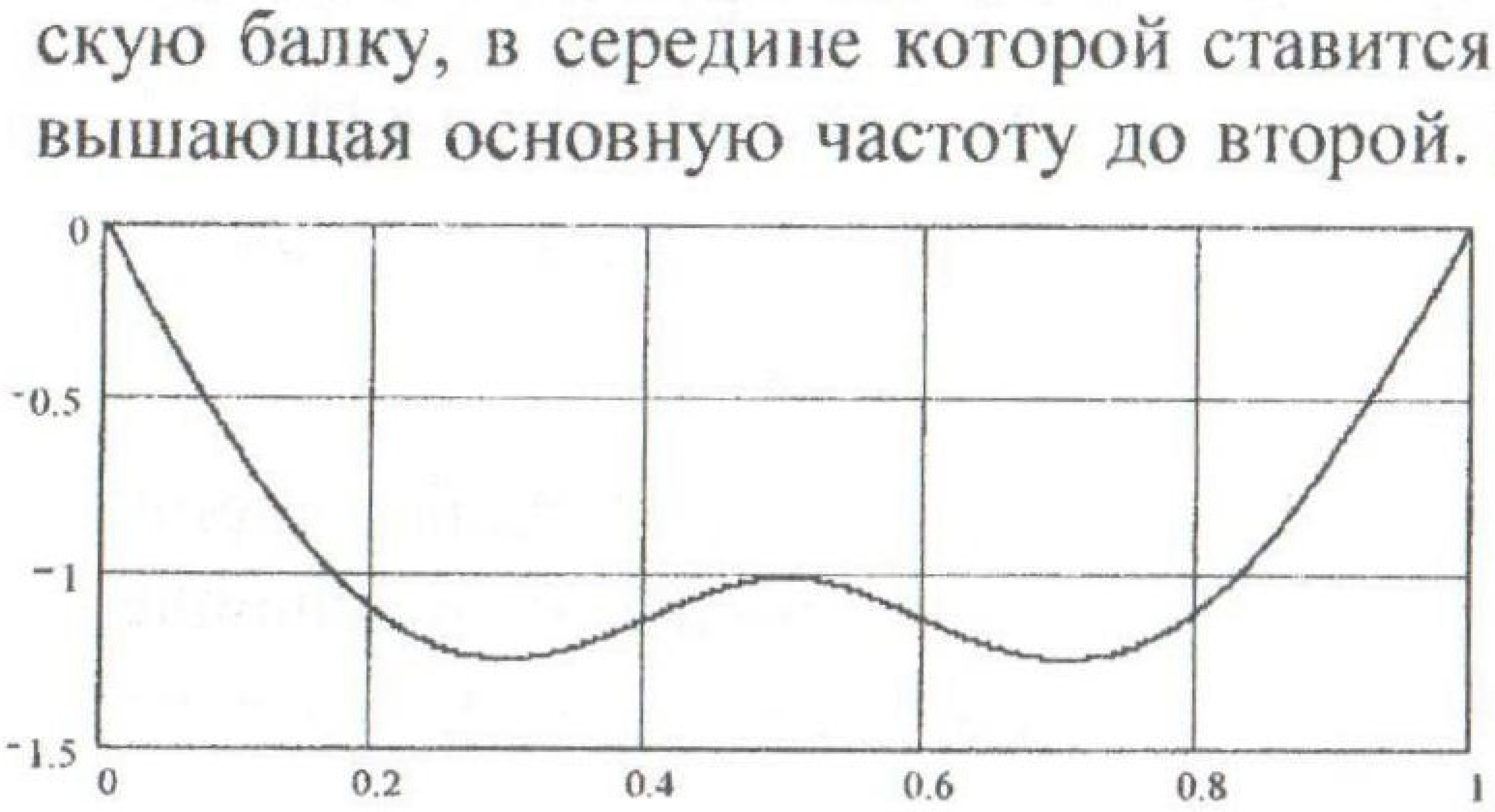

Рис. 1

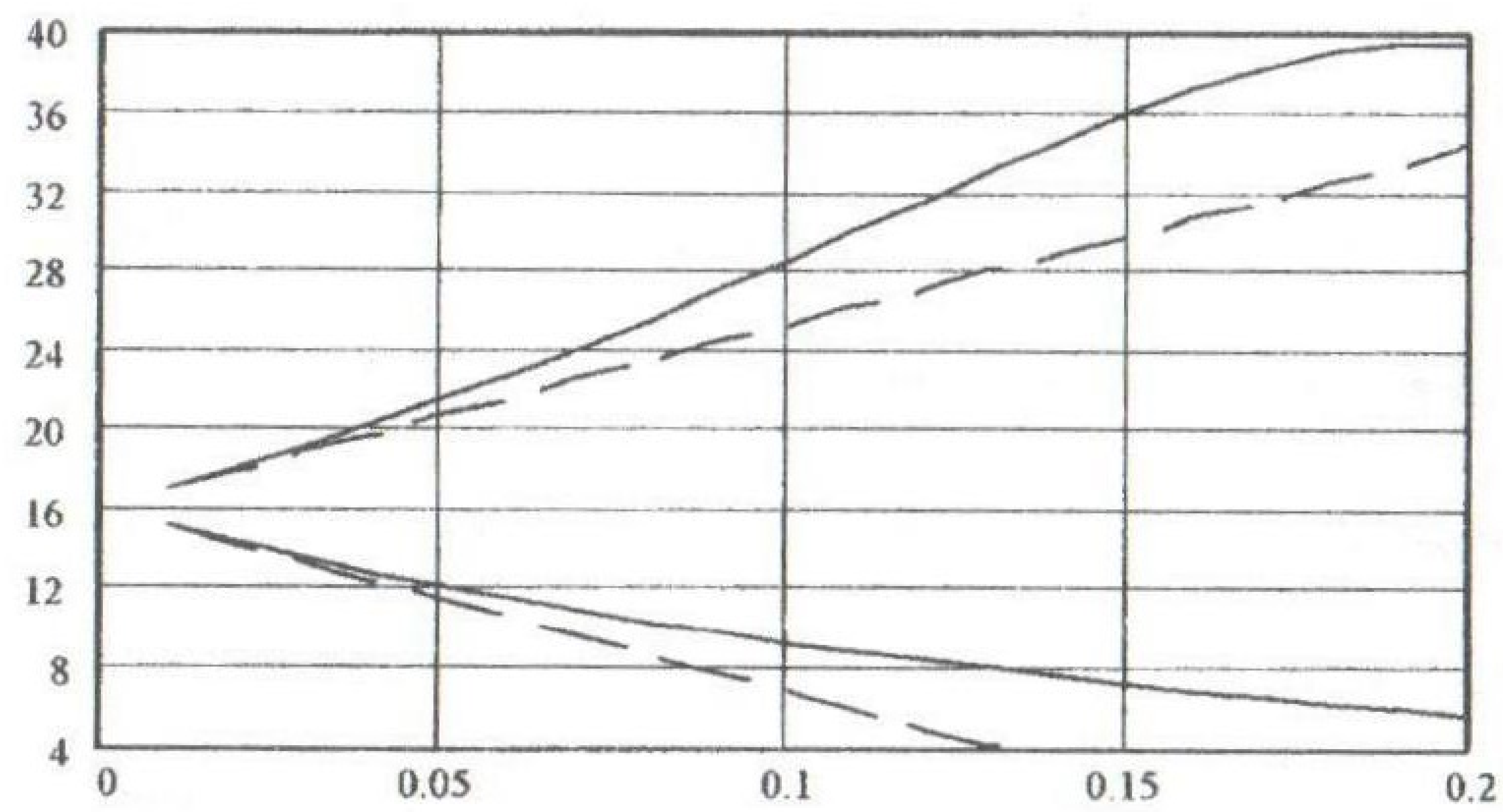

Рис. 2

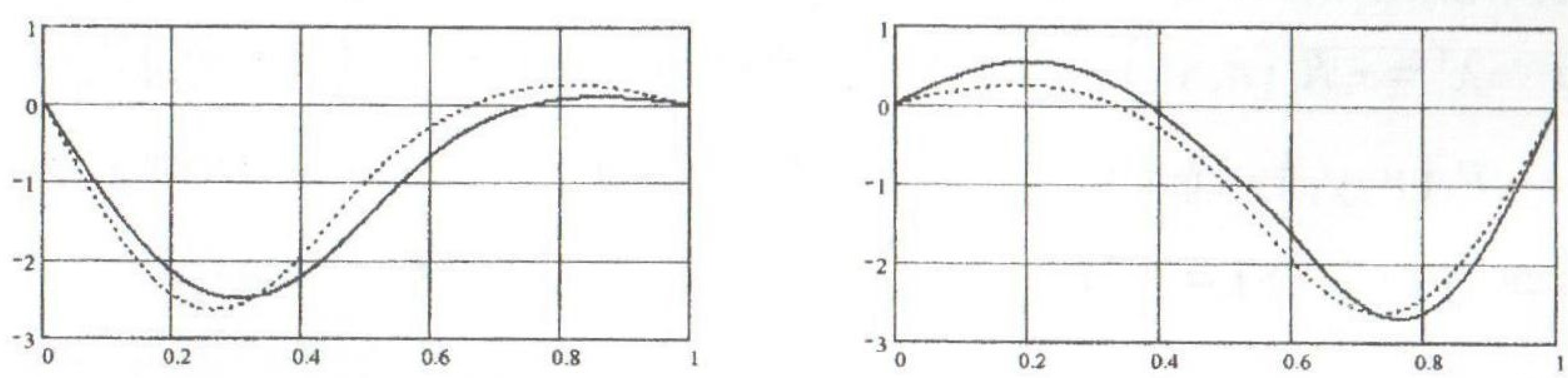

Рис. 3

5. Формулы $\lambda' = R(r, y')$ в случае точечной опоры приобретают

наглядную форму $\lambda' = R\theta$, где θ – угол поворота того сечения балки, в котором помещена опора (при соответствующей нормировке) [2]. Это выражение теряет смысл в случае опоры, подкрепляющей гибкие элементы конструкций, т.к. на опоре линии прогибов таких элементов имеют изломы и угол θ, равный производной y', в этих точках не определен. Возмущения простых частот в этих случаях можно найти из следующих соображений. Уравнение, определяющее формы и частоты колебаний струны [3], в соответствии с (3) имеет вид

$$-\left(Ty'\right)' + Rr = \lambda\mu y, \tag{8}$$

где T – натяжение струны. Предположим вначале, что реакция распределена непрерывно, т.е. функция $r(x)$ непрерывна и форма $y(x)$ не имеет особенностей, в частности, изломов. Тогда $y'(x)$ существует в точках приложения реакции, и существуют интегралы в (6), что с учетом (8) позволяет записать

$$R\left(r, y'\right) = R\int_{\xi}^{\xi+h} ry'dx = \int_{\xi}^{\xi+h} \left(Ty'\right)' y'dx + \int_{\xi}^{\xi+h} \lambda\mu y\, y'dx .$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_{\xi}^{\xi+h} \left(Ty'\right)' y'dx = \int_{\xi}^{\xi+h} T^{-1}\left(Ty'\right)' Ty'dx = T\frac{y'^2}{2}\Bigg|_{\xi}^{\xi+h} + \int_{\xi}^{\xi+h} \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 T'dx, \tag{9}$$

$$\int_{\xi}^{\xi+h} \mu yy'dx = \int_{\xi}^{\xi+h} \mu ydy = \mu\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\xi}^{\xi+h} - \int_{\xi}^{\xi+h} \mu'\frac{y^2}{2}dx . \tag{10}$$

Если натяжение T и плотность μ изменяются по длине струны достаточно плавно, так что производные T' и μ' существуют и ограничены, то в правых частях подынтегральные выражения ограничены и остаются ограниченными при $h \to 0$. Поэтому оба интеграла в правых частях (9) и (10) при $h \to 0$ неограниченно убывают. То же справедливо для внеинтегрального члена формулы (10), т.к. $y(x)$ непрерывна. Отсюда, рассматривая точечную опору как предельный случай распределенной связи при $h \to 0$, $\int_{\xi}^{\xi+h} r(x)dx = 1$, найдем

$$\lim_{h\to 0} R(r, y') = \lim_{h\to 0} T \left.\frac{y'^2}{2}\right|_{\xi}^{\xi+h} = T \lim_{h\to 0} \frac{y'^2(\xi+h) - y'^2(\xi)}{2} =$$

$$= T\left(\theta^+ - \theta^-\right) \cdot \frac{\theta^+ + \theta^-}{2},$$

где θ^- и θ^+ – углы наклона струны соответственно слева и справа от опоры. Интегрируя (8) от ξ до $\xi + h$ и переходя к пределу при $h \to 0$, найдем, что $T\left(\theta^+ - \theta^-\right) = R$, откуда получаем формулу для производной от простой частоты подпертой струны по координате опоры

$$\lambda' = R\left(\theta^+ + \theta^-\right). \tag{11}$$

6. При ее выводе предполагалась ограниченность производных T' и μ', которая не имеет места, например, в точках, несущих сосредоточенные массы. Если при сдвиге на ε опора проходит через точку, в которой находится сосредоточенная масса m (см. рис. 4), форма изменяется на величину $o(1)$, неограниченно убывающую вместе с ε, углы θ_1 и θ_3 слева и справа от изломов также меняются непрерывно, а угол θ_2 между опорой и грузом получает конечное изменение $\theta_2' - \theta_2$.

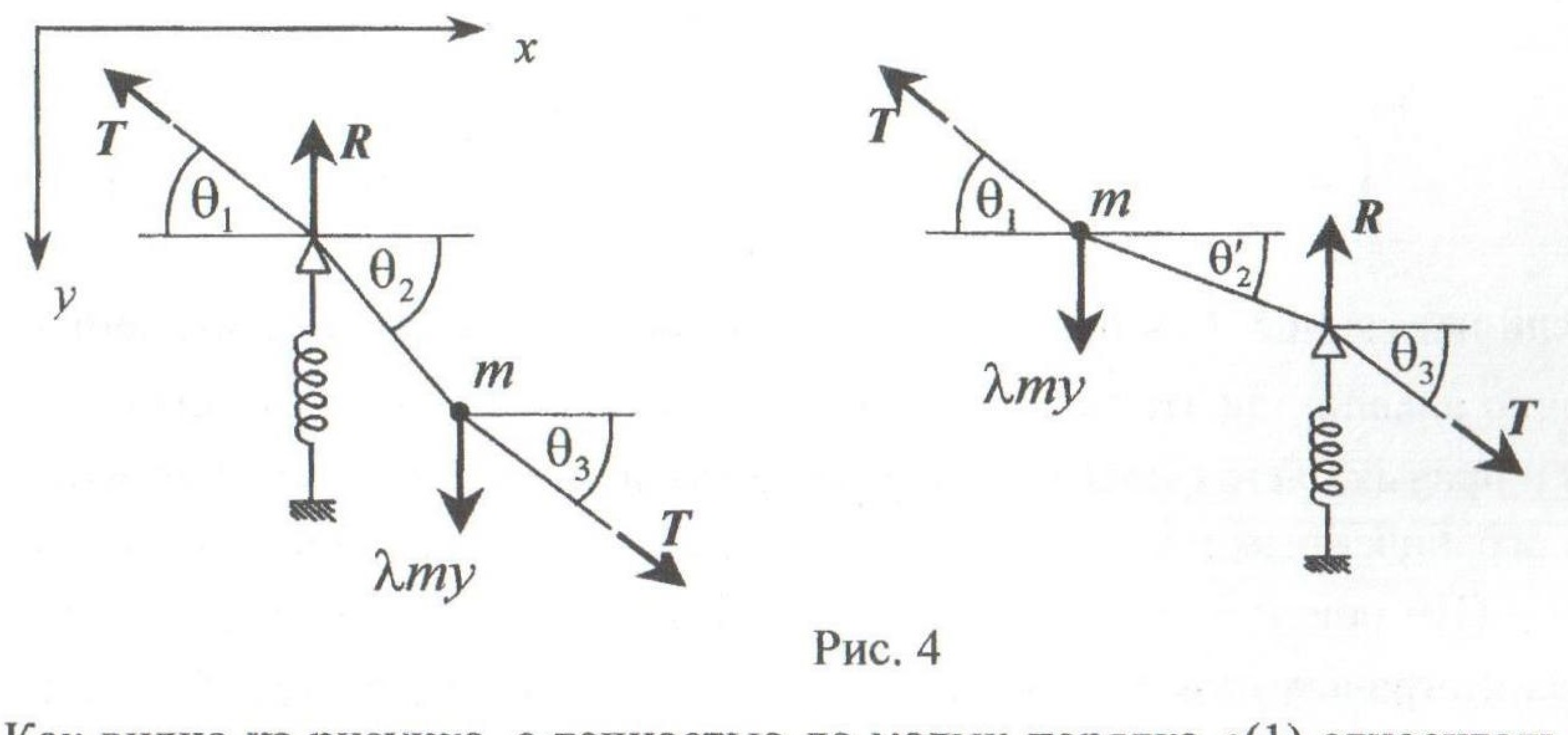

Рис. 4

Как видно из рисунка, с точностью до малых порядка $o(1)$ относительно ε,

$$T\left(\theta_3 - \theta_2\right) = -\lambda m y, \quad T\left(\theta_2' - \theta_1\right) = -\lambda m y.$$

Эти соотношения, выражающие амплитудное равновесие точечного груза, могут быть также получены интегрированием (8) по малому промежутку, содержащему этот груз.

Отсюда находим $\theta_2 - \theta_3 = \theta_2 + \theta_1 - (\theta_3 + \theta_1) = \dfrac{\lambda m y}{T}$,

$\theta_2' - \theta_1 = \theta_2' + \theta_3 - (\theta_3 + \theta_1) = \dfrac{-\lambda m y}{T}$, что позволяет найти пределы при приближении опоры к особой точке

$$\lim_{\text{слева}} (\theta_2 + \theta_1) = (\theta_3 + \theta_1) + \frac{\lambda m y}{T}, \quad \lim_{\text{справа}} (\theta_2' + \theta_3) = (\theta_3 + \theta_1) - \frac{\lambda m y}{T}. \quad (12)$$

Если опора проходит через точку, в которой натяжение струны терпит разрыв $T^+ - T^-$, то, как видно из рис.5, с точностью до слагаемых

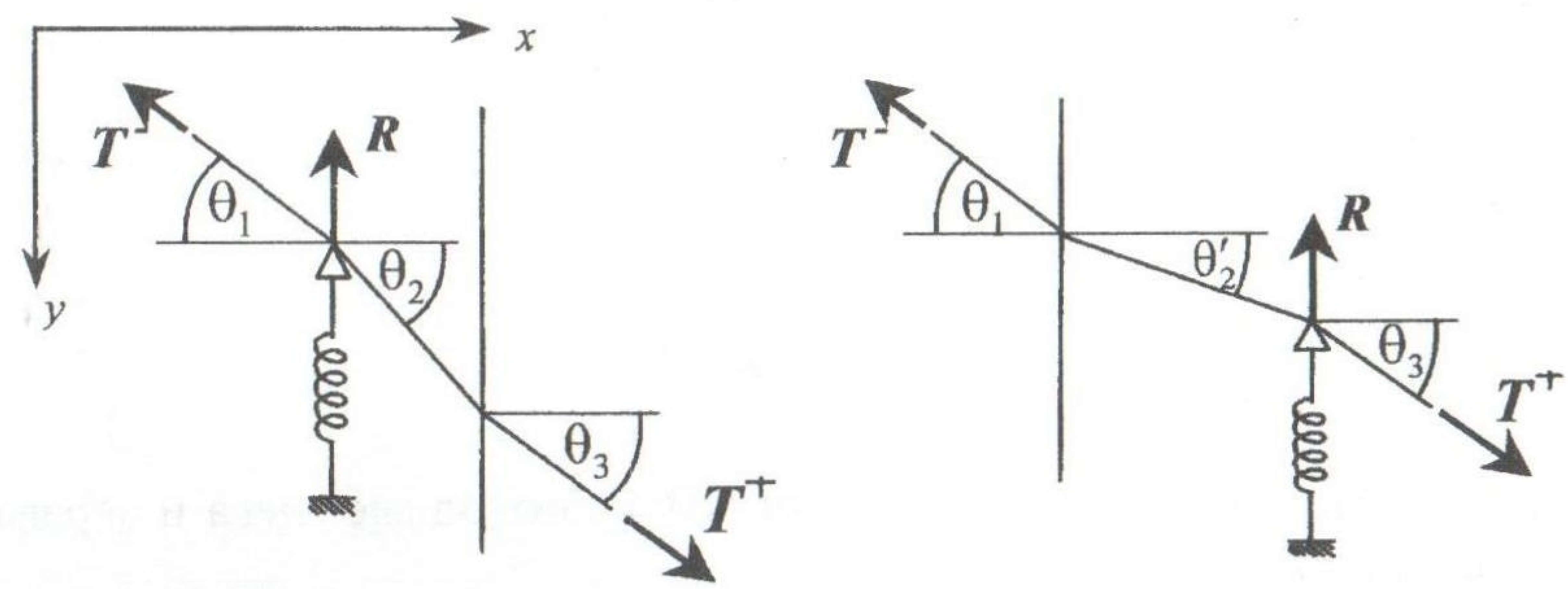

Рис. 5

$o(1)$ относительно ε $T^+\theta_3 = T^-\theta_2$, $T^+\theta_2' = T^-\theta_1$, откуда $T^-(\theta_1 + \theta_2) = T^-\theta_1 + T^+\theta_3$, $T^+(\theta_3 + \theta_2') = T^-\theta_1 + T^+\theta_3$, и соответствующие пределы равны

$$\lim_{\text{слева}} (\theta_2 + \theta_1) = \frac{(T^-\theta_1 + T^+\theta_3)}{T^-}, \quad \lim_{\text{справа}} (\theta_2' + \theta_3) = \frac{(T^-\theta_1 + T^+\theta_3)}{T^+}. \quad (13)$$

Наконец, если в точке присутствуют обе особенности, то, разведя их на малое расстояние, как показывает рис. 6, при вычислении левого предела можно принять во внимание только точечный груз, а при вычислении правого предела – только скачок натяжения и воспользоваться первым из равенств (12), заменив в нем, в соответствии с рис. 6, θ_3 на θ', T на T^- и учтя, что, $T^+\theta_3 = T^-\theta'$,

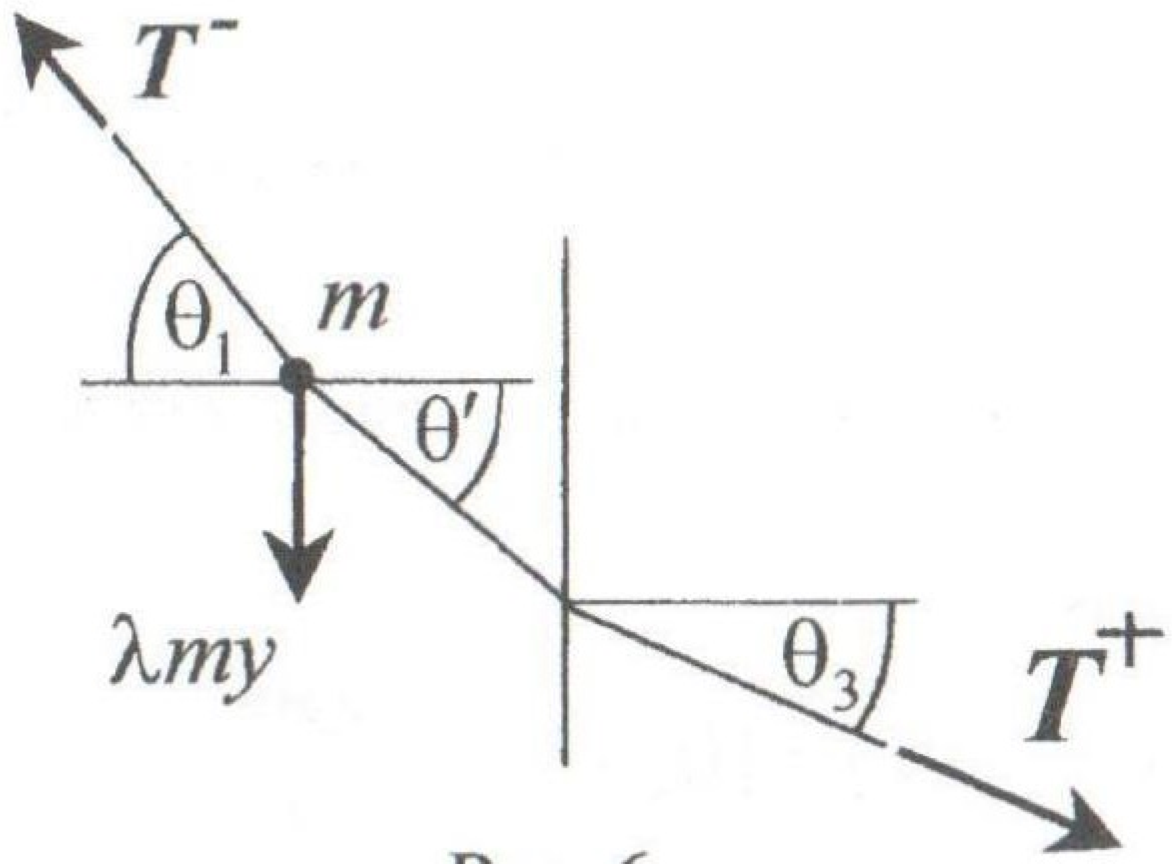

Рис. 6

$$\lim_{\text{слева}}\left(\theta_2+\theta_1\right)=\left(\theta'+\theta_1\right)+\frac{\lambda my}{T^-}=$$

$$=\frac{\left(T^-\theta_1+T^+\theta_3\right)}{T^-}+\frac{\lambda my}{T^-}, \qquad (14)$$

и вторым из равенств (12), заменив в нем θ_1 на θ' и учтя (см. рис. 6), что $T^-\theta_1=T^-\theta'+\lambda my$,

$$\lim_{\text{справа}}\left(\theta_2'+\theta_3\right)=\frac{\left(T^-\theta'+T^+\theta_3\right)}{T^+}=$$

$$=\frac{\left(T^-\theta_1-\lambda my+T^+\theta_3\right)}{T^+}=\frac{\left(T^-\theta_1+T^+\theta_3\right)}{T^+}-\frac{\lambda my}{T^+}. \qquad (15)$$

В итоге в обозначениях ф-лы (11) производная от квадрата частоты в общем случае равна

$$\lambda'_{\text{слева}}=R\left[\frac{\left(T^-\theta^-+T^+\theta^+\right)}{T^-}+\frac{\lambda my}{T^-}\right],\ \lambda'_{\text{справа}}=R\left[\frac{\left(T^-\theta^-+T^+\theta^+\right)}{T^+}-\frac{\lambda my}{T^+}\right].(17)$$

Легко видеть, что при $T^+=T^-$ и $m=0$ производные слева и справа совпадают и равны (11).

7. Из общих соображений о влиянии наложения связей на частоты известно [3], что уменьшение длины струны приводит, вообще говоря, к увеличению ее частот. Аналогичный вывод для стержня справедлив не всегда. По-видимому, впервые он был установлен Рэлеем [5, с.311] для стержня, жестко опертого по концам при отсутствии дополнительных промежуточных опор. Используя результаты, полученные в настоящей работе, можно установить увеличение собственных частот стержня, свободно опертого по концам на жесткие опоры и имеющего сколько угодно внутренних неподвижных шарнирных опор, даже совмещенных с упругими (но не абсолютно жесткими) защемлениями.

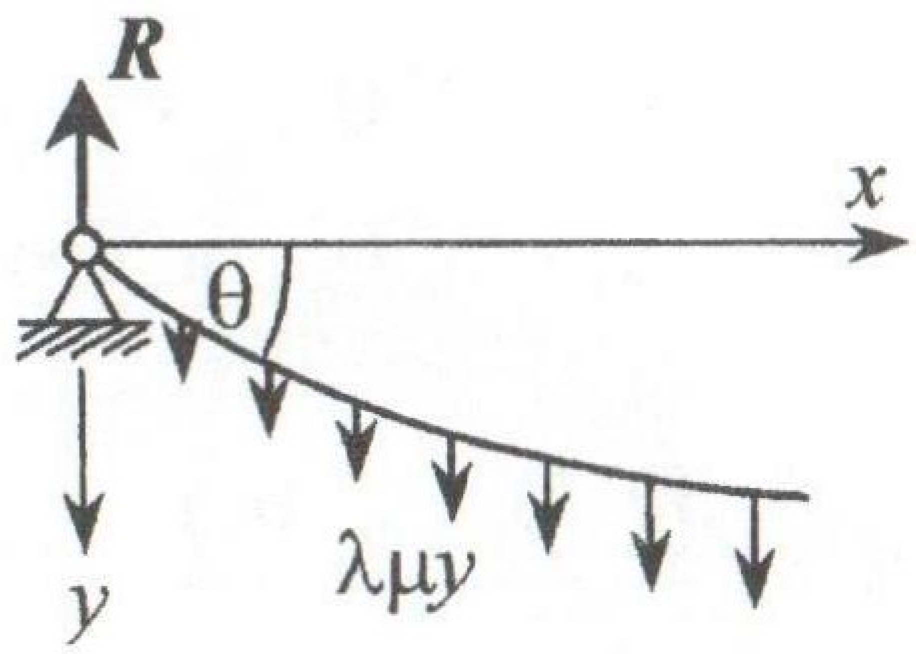

Рис. 7

Пусть левый конец стержня шарнирно оперт на неподвижную опору (см. рис. 7), и кроме нее могут быть только неподвижные опоры, не совмещенные с жесткими заделками. При этом $\theta = y'(0) \neq 0$. Действительно, пусть $\theta = 0$, а $y(x)$ не является тождественным нулем в некоторой окрестности левой опоры и a – первый слева нуль функции $y(x)$ (не считая левой опоры). Пусть $y(x) > 0$ при $0 < x < a$. Если $R \leq 0$, изгибающий момент в любом сечении $x \leq a$ равен $M(x) = Rx - \lambda \int\limits_0^x \mu y(x-s)\,ds < 0$, откуда следует, что $y''(x) = -M(x)/EI > 0$, т.е. $y'(x)$ возрастает, $y'(x) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y(x) > 0 \Rightarrow y(a) > 0$. Если $R > 0$, в некоторой окрестности левой опоры $M(x) = Rx - \lambda \int\limits_0^x \mu y(x-s)\,ds > 0 \Rightarrow y''(x) = -M(x)/EI < 0$ $\Rightarrow y(x) < 0$. Противоречие доказывает, что либо $\theta \neq 0$, либо в некоторой окрестности левой опоры $y(x) \equiv 0$. В последнем случае, обозначив правую границу окрестности через a_0, имеем $y(a_0) = 0$, $y'(a_0) = 0$, $M(a_0) = 0$ (т.к. нет жестких заделок) и, повторяя предыдущие рассуждения, устанавливаем существование окрестности точки a_0, в которой $y(x) \equiv 0$, что противоречит определению a_0. Таким образом, утверждение $\theta = y'(0) \neq 0$ установлено. Заметим, что из него вытекает известная теорема [4] о простоте спектра шарнирно опертого стержня при любом количестве внутренних шарнирно неподвижных опор. В самом деле, из двух форм, которым отвечают углы на левой опоре $\theta_1 \neq 0$ и $\theta_2 \neq 0$, можно было бы составить линейную комбинацию, для которой $\theta = 0$, что, как мы убедились, невозможно.

Пусть $\theta = y'(0) > 0$. Покажем, что в этих условиях $R > 0$, т.е. реакция опоры направлена вверх. В противном случае вся кривая прогибов должна лежать ниже оси x. Действительно, пусть a – первый слева нуль функции $y(x)$ (не считая левой опоры). Тогда $y(x) > 0$ при $0 < x < a$ и изгибающий момент в любом сечении $x \leq a$ равен

$M(x) = Rx - \lambda \int\limits_0^x \mu y(x-s)\,ds < 0$, откуда следует, что $y''(x) > 0$ $\Rightarrow y'(x) > \theta \Rightarrow y > \theta x \;\Rightarrow y(a) > \theta a \neq 0$. Противоречие доказывает, что для всех форм, кроме, возможно, одной, $R > 0$. Эта особая форма получается, если нет точки $a \neq 0$, в которой $y(a) = 0$, т.е. левая опора единственная. Очевидно для нее $\lambda = 0$, $y = \theta x$. Единственность особой формы гарантируется свойством ортогональности $\int\limits_0^l \mu y_i(x)\, y_k(x)\,dx = 0$ собственных форм. Уменьшение длины стержня можно рассмотреть как сдвиг левой опоры вправо и удаление массы

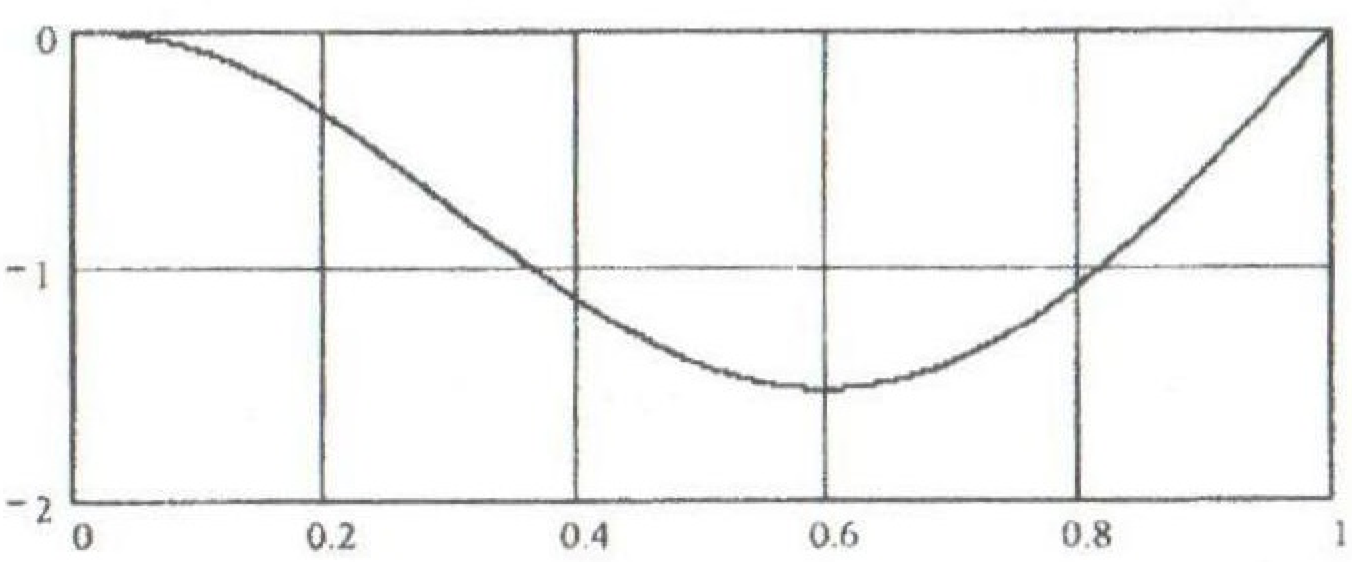

Рис. 8

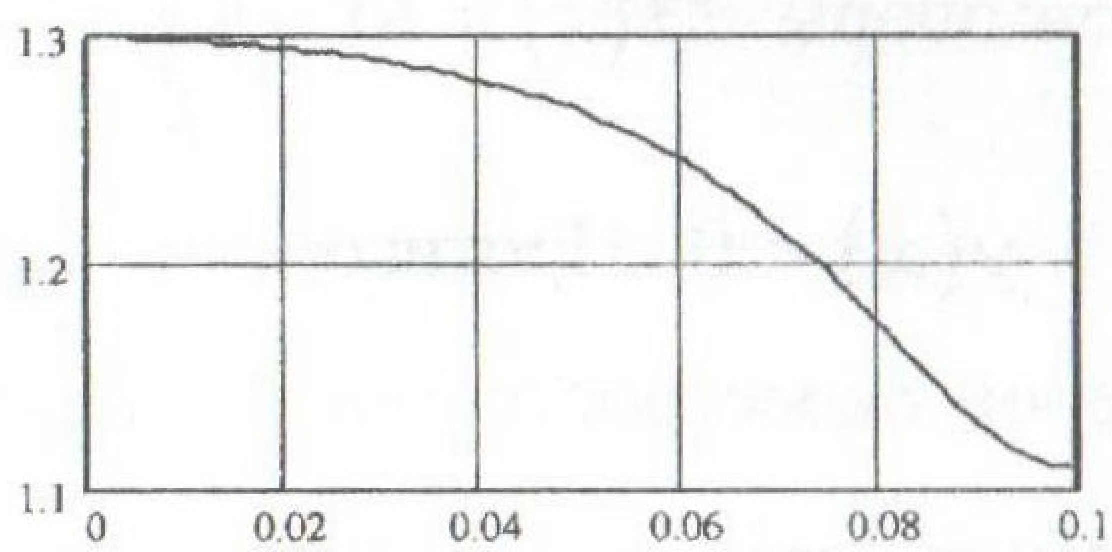

Рис. 9

образовавшегося слева от опоры консольного участка. Но, как видно из проведенных рассуждений, для левой опоры $\lambda' = R\theta > 0$, т.е. ее сдвиг приводит к росту частоты. Удаление массы может ее только увеличить [3,5], откуда и следует сформулированный вывод для всех частот, кроме нулевой, которая остается неизменной. Если не требовать абсолютной жесткости промежуточных опор, можно, укорачивая стержень, добиться не роста, а уменьшения частоты. Действительно, предыдущие рассуждения показывают, что при сдвиге опоры частота будет уменьшаться, если на левой опоре $R < 0$. Тогда в некоторой ее окрестности $M(x) < 0$, т.е. кривая прогибов обращена выпуклостью вверх. Удаление образовавшегося консольного участка даст обратный эффект. Совокупный результат зависит, вообще говоря, от распределения массы по стержню. На рис. 8 показана форма колебаний призматического стержня, подкрепленного упругой опорой в точке с абсциссой 0,1. Податливость опоры $\alpha = (0{,}0132/EI)(l/\pi)^3$ обеспечивает частоту основного тона $\lambda = 1{,}3^4 \lambda_1$. Рис. 9 показывает, как изменяется основная частота при уменьшении длины стержня за счет сдвига левой опоры вправо. Здесь по вертикали отложен параметр ν, $\lambda = \nu^4\lambda_1$, по горизонтали – сокращение длины стержня в долях его длины.

Заключение. В результате проведенного исследования получено уравнение (3), определяющее собственные частоты и формы колебаний упругой системы, подкрепленной связями, порождающими распределенные реакции из линейной оболочки заданного набора базисных реакций. В случае континуальных систем (струны, балки, пластинки и т. п.) уравнение (3) является интегро-дифференциальным, т.к. в выражении (q, y) форма y входит, вообще говоря, под знаком интеграла. Применение к этому уравнению метода теории возмущений позволило для одномерных связей получить выражение (6) для элементов матрицы, определяющей в линейном приближении возмущения собственных частот, вызванные изменением места расположения подкрепляющей конструкции (связи). Если связь является точечной упругой опорой, ее сдвиг на расстояние ε по оси x, как видно из уравнения (7), изменяет простую частоту упругой балки на $\lambda' = 2R\theta\varepsilon$ ([2]). Установленная в работе формула (11) обобщает этот результат на струны, для которых угол поворота θ в подпертом сечении не определен. Уравнения (12), (13) и (17) дают значения односторонних производных частоты струны в тех случаях, когда опора совпадает с сосредоточенным грузом или с тем сечением струны, в котором ее натяжение терпит разрыв. Полученные в работе результаты применены к изучению влияния изменения длины стержня на его собственные частоты, дополняющему и в некоторых отношениях уточняющему чисто качественные рассуждения Рэлея ([5]). В частности, обнаружено, что уменьшение длины стержня, имеющего внутренние упругие опоры, может привести к уменьшению его собственных частот.

Литература

1. Т.Като. Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972, 740 с.
2. С.Я.Бекшаев, Л.В.Кошкин, Я.Л.Нудельман. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. – «Судостроение и судоремонт». Вып.VII. 1976, с. 64 – 67.
3. Р.Курант и Д.Гильберт. Методы математической физики, т.1. – М.-Л., ГТТИ, 1951, 476 с.
4. Ф.Р.Гантмахер и М.Г.Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л., ГТТИ, 1950, 360 с.
5. Рэлей. Теория звука. Т. 1. – М., ГИТТЛ, 1955, 504 с.