

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ
ИССЛЕДОВАНИИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК И РАМ С УЧЕТОМ
НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА**

Фомин В.М.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

В статьях [1]-[3] был предложен алгоритм решения задач статики и динамики статически определимых железобетонных балок и плоских рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона, основанный на решении систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1]. В настоящей работе предлагается использовать для решения указанных задач метод граничных элементов.

В статье [1] было выведено следующее дифференциальное уравнение для определения приращения углов поворота поперечных сечений железобетонной балки при пошаговом методе решения:

$$d\phi' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi = -Z_3(s)d\xi - Z_4(s)d\eta. \quad (1)$$

Здесь ϕ — угол поворота поперечного сечения балки (оно предполагается прямоугольным, b — ширина, h — высота), s — длина отрезка дуги оси балки между ее левым концом и рассматриваемым поперечным сечением (рис. 1), $\xi = np_x H_A / H_0$, $\eta = np_x V_A / H_0$, $H_0 = H / l^2$,

$$H = \frac{E_b b h^3}{12(1 - \nu_0^2)} + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2), \quad l — \text{длина отрезка } AB \text{ оси балки, } E_b —$$

начальный модуль упругости бетона, ν_0 — его начальный коэффициент Пуассона, E_a — модуль упругости арматуры, S_1 и S_2 — площади поперечных сечений верхней и нижней арматур, h_1 и h_2 — расстояния от центра сечения до арматур, H_A и V_A — горизонтальная и вертикальная составляющие главного вектора внешних сил, приложенных к балке (или раме) левее точки A . Штрих означает производную по s . Следует заметить, что в настоящей работе, так же как и в [1]-[3], рассматривается случай, когда нагрузка представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных в узловых точках балки или рамы.

Как показали многочисленные примеры решения задач статики и динамики с помощью указанного выше алгоритма функции $Z_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) непрерывны и хорошо аппроксимируются многочленами невысокой степени (третьей-четвертой) по методу наименьших квадратов, т.е. в дальнейшем мы полагаем, $Z_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) являются многочленами степени $n \leq 4$:

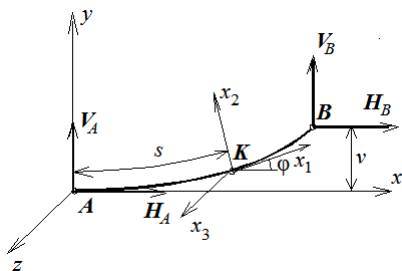


Рис. 1

Для построения этих решений будем использовать метод, предложенный в [6]. В соответствии с этим методом решения будем искать в виде степенных рядов:

$$\Phi_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k} s^k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

причем

$$\Phi_i'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k+1} (k+1) s^k, \quad \Phi_i''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k+2} (k+1)(k+2) s^k. \quad (3a)$$

После подстановки рядов (2), (3) и (3a) в уравнение (1), их перемножения и сложения приравняем коэффициенты при различных степенях s в выражении, стоящем в левой части (1), нулю. В результате приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$\Phi_{i,k+2} = - \frac{\sum_{m=0}^k \Phi_{i,m+1} (m+1) Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k \Phi_{i,m} Z_{2,k-m}}{(k+1)(k+2)} \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Для построения функции $\Phi_1(s)$ полагаем $\Phi_{1,0} = 1$, $\Phi_{1,1} = 0$ и принимаем в формуле (4) $k = 0$. В результате получаем $\Phi_{1,2}$, затем приравни-

ваем $k = 1$ и находим $\Phi_{1,3}$ и т.д. Остановливаясь на некотором шаге N , получаем приближенное выражение для $\Phi_1(s)$ в виде полинома.

Для построения функции $\Phi_2(s)$ полагаем $\Phi_{2,0} = 0$, $\Phi_{2,1} = 1$ и повторяем процедуру нахождения коэффициентов при помощи соотношения (4).

Таким образом, получаем приближенные выражения

$$\Phi_i(s) = \sum_{k=0}^N \Phi_{i,k} s^k \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Для построения частного решения $\Phi_p(s)$ уравнения (1), соответствующего нулевым начальным условиям, используем следующее рекуррентное соотношение:

$$\Phi_{p,k+2} = - \frac{\sum_{m=0}^k \Phi_{p,m+1} (m+1) Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k \Phi_{p,m} Z_{2,k-m} + Z_{3,k} d\xi + Z_{4,k} d\eta}{(k+1)(k+2)} \quad (6)$$

в котором следует положить $\Phi_{p0} = \Phi_{p1} = 0$. В результате получим приближенное выражение для $\Phi_p(s)$ в виде полинома переменной s :

$$\Phi_p(s) = \sum_{k=0}^N \Phi_{p,k} s^k \quad (7)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$d\phi(s) = d\phi(0)\Phi_1(s) + d\phi'(0)\Phi_2(s) + \Phi_p(s). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по s , получаем

$$d\phi'(s) = d\phi(0)\Phi_1'(s) + d\phi'(0)\Phi_2'(s) + \Phi_p'(s). \quad (8a)$$

В векторно-матричном виде уравнения (8)-(8a) записываются так:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{A}(s)\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(s), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} d\phi(s) \\ d\phi'(s) \end{bmatrix}, \mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & \Phi_2(s) \\ \Phi_1'(s) & \Phi_2'(s) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} \Phi_p(s) \\ \Phi_p'(s) \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} d\phi(0) \\ d\phi'(0) \end{bmatrix}.$$

Для построения функции $dv(s)$ приращения прогибов балки воспользуемся соотношением [7]

$$dv(s) = \int_0^s \sin d\phi(\tau) d\tau + dv_A, \quad (10)$$

где dv_A — вертикальное перемещение точки A . Пользуясь тем, что для железобетонных балок $d\phi(s)$ мало, можно положить

$$dv(s) = \int_0^s d\phi(\tau) d\tau + dv_A.$$

откуда следует, что

$$V_i(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{i,k} s^k \quad (i=1,2), \quad V_p(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{p,k} s^k, \quad (11)$$

$$V_{i,k} = \frac{\Phi_{i,k-1}}{k}, \quad V_{p,k} = \frac{\Phi_{p,k-1}}{k}.$$

Пример.

Исследуем квазистатический изгиб железобетонной колонны, на которой расположены три груза массой $5 T$ и на которую действуют горизонтальные силы $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t / T_i)$ ($i=1,2,3$) (рис. 2), причем $A_1 = 4,9 \text{ кН}$, $A_2 = -4,1 \text{ кН}$, $A_3 = -3,25 \text{ кН}$, $T_1 = 10 \text{ с}$, $T_2 = 10 \text{ с}$, $T_3 = 15 \text{ с}$, $l_1 = l_2 = l_3 = 4 \text{ м}$. Размеры поперечного сечения, марка бетона и армирование такие же как и в примере 1 статьи [2].

Колонну будем считать стержневой системой, состоящей из трех стержней, пограничные сечения которых проходят через точки A , M_1 , M_2 и M_3 .

Нагружение колонны происходит в два этапа. На предварительном этапе происходит постепенное увеличение массы грузов (т.е. постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Это приводит к появлению сжимающих напряжений и перемещений, которые легко определяются при помощи деформационной теории пластичности.

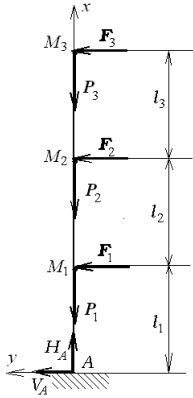


Рис. 2

Затем при $t = 0$ начинается основной этап: включаются силы F_1 , F_2 и F_3 . Для определения прогибов используем метод граничных элементов.

Примем шаг по времени $\Delta t = 0,25$ с. В соответствии с алгоритмом, изложенным в [1], на каждом шаге для каждого из стержней строятся функции $Z_{j,i}(s)$ ($i = 1,2,3,4$; $j = 1,2,3$; j — номер стержня). Затем с помощью метода наименьших квадратов получаем полиномиальную аппроксимацию для каждой из этих функций. Далее при помощи (4) находим коэффициенты разложения фундаментальных функций $\Phi_{j,i}(s)$ ($i = 1,2$; $j = 1,2,3$; j — номер стержня) задачи Коши для каждого из стержней, а при помощи (5) их полиномиальное представление.

Аналогично при помощи (6) и (7) строим частные решения $\Phi_{p,j}(s)$ ($j = 1,2,3$) задачи Коши для стержней.

Запишем следующее соотношение [4,5]:

$$A(l)X(0) - Y(l) = -B(l). \quad (12)$$

Здесь (для рассматриваемой стержневой системы)

$$A(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}(l_1) & \Phi_{1,2}(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{1,1}'(l_1) & \Phi_{1,2}'(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}(l_2) & \Phi_{2,2}(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}'(l_2) & \Phi_{2,2}'(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}(l_3) & \Phi_{3,2}(l_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}'(l_3) & \Phi_{3,2}'(l_3) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} d\phi_1(0) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}, \quad Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_1(l_1) \\ d\phi_1'(l_1) \\ d\phi_2(l_2) \\ d\phi_2'(l_2) \\ d\phi_3(l_3) \\ d\phi_3'(l_3) \end{bmatrix}, \quad B(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{p,1}(l_1) \\ \Phi_{p,1}'(l_1) \\ \Phi_{p,2}(l_2) \\ \Phi_{p,2}'(l_2) \\ \Phi_{p,3}(l_3) \\ \Phi_{p,3}'(l_3) \end{bmatrix}. \quad (13a)$$

Граничные условия для стержневой системы, изображенной на рис. 2, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} d\phi_1(0) = 0, d\phi_2(0) = d\phi_1(l_1), d\phi_2'(0) = d\phi_1'(l_1), \\ d\phi_3(0) = d\phi_2(l_2), d\phi_3'(0) = d\phi_2'(l_2), d\phi_2'(l_3) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, первый элемент вектора $X(0)$ и последний элемент вектора $Y(l)$ равны нулю.

Используя (14) можно записать вектор $Y(l)$ так:

$$Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \\ d\phi_3(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заменяем нулевой элемент вектора $X(0)$ на элемент $d\phi_3(l_3)$ вектора $Y(l)$:

$$X^*(0, l) = \begin{bmatrix} d\phi_3(l_3) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A(l)X(0) = A_0(l)X^*(0, l) \quad (15)$$

($A_0(l)$ равна матрице $A(l)$ с обнуленным первым столбцом).

Матрица C , которая опустит первый элемент вектора $X^*(0, l)$ на пятую ступеньку, второй сделает равным нулю, а четыре последних поднимет вверх на два номера, выглядит так:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Очевидно, что

$$CX^*(0, l) = Y(l). \quad (16)$$

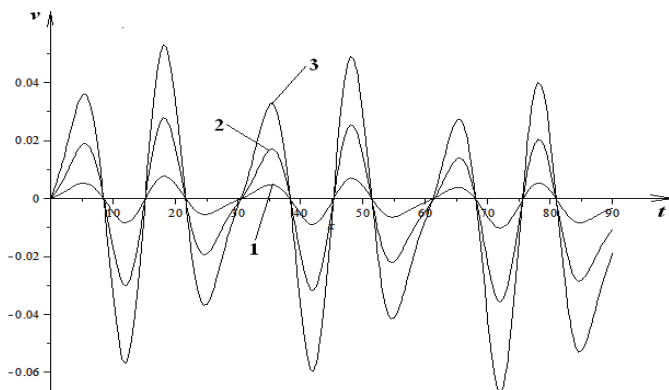


Рис. 3

Тогда учитывая (15) и (16), равенство (12) можно записать в следующем виде:

$$A^*(l)X^*(0, l) = -B(l), \quad (17)$$

где $A^*(l) = A_0(l) - C$.

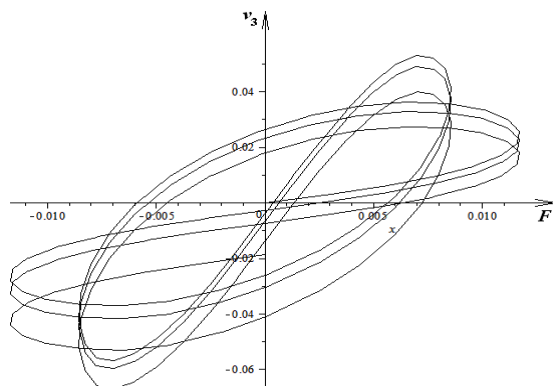


Рис. 4

Таким образом, нахождение неизвестных величин $d\phi_1'(0)$, $d\phi_2(0)$,

$d\phi_2'(0)$, $d\phi_3(0)$, $d\phi_3'(0)$ и $d\phi_3(l_3)$, необходимых для построения прогибов колонны свелось к решению системы линейных уравнений (17). На основании изложенного алгоритма был проведен ряд расчетов.

На рис. 3 приведены графики движения грузов M_i ($i = 1,2,3$; время t в секундах, перемещения грузов v в метрах). На рис. 4 приведена траектория движения изображающей точки на плоскости ($F(t)$, $v_3(t)$) ($v_3(t)$ — перемещение третьего груза, $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$).

На рис. 4 заметно накопление остаточных деформаций.

Вывод

Изложенная методика позволяет применить метод граничных элементов при расчете железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона.

SUMMARY

The procedure stated here enables one to apply boundary elements method in RC beam and frame design with taking into account physical and geometrical nonlinearity and concrete plasticity.

Литература

1. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345–353.
2. Фомин В.М., Фомина И.П. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении// Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, . – с..3.
3. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона при сложном нагружении. // Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, . – с..
4. В. А. Баженов, В. Ф. Оробей и др. Численные методы в механике — Одесса, 2004 — 564 с.
5. В. Ф. Оробей, А.В. Ковров. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов — Одесса, 2004 — 123 с.
6. Фомин В.М. Об одном методе решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами// Вісник ОДАБА. Вып. 48, часть 2. – Одесса, 2012. – с.175-178.
7. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л. : Машиностроение, 1986. — 336 с.