УДК 620.193.4:624.012.45

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Фомин В.М.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Решение задач статики и динамики стержневых систем методом граничных элементов сводится к решению задачи Коши для некоторого линейного диффренциального уравнения. Если свойства материала и поперечное сечение стержня не меняются по его длине, то коэффициенты этого уравнения постоянны. В противном случае они являются функциями координаты, отсчитываемой вдоль оси стержня [1,2]. В работе [1] предлагается в этом случае разбивать стержень на несколько стержней, в пределах каждого из которых можно считать сечение стержня и свойства его материала неизменными. В настоящей статье предлагается довольно простой способ решения задачи Коши для дифференциального уравнения, не прибегая к делению стержня на отрезки.

Будем решать задачу Коши для дифференциального уравнения следующего вида

$$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)y(x)=q(x). \qquad (1)$$

При этом мы будем предполагать, что функции $a_i(x)$ (i = 1,2,…,n) и $q(x)$ являются либо достаточно гладкими функциями, либо хорошо аппроксимируемыми (например, при помощи метода наименьших квадратов) функциями, раскладывающимися в ряд Тэйлора в окрестности точки $x = 0$, т.е. фактически представимыми в виде полинома абсциссы x. Кроме того будем полагать, что длина стержня равна единице. Этого нетрудно добиться простой заменой независимой переменной в уравнении (1). Таким образом, предполагается, что имеют место следующие равенства:

$$a_i(x)=\sum_{m=0}^{N}a_{i,m}x^m,\; q(x)=\sum_{m=0}^{N}q_m x^m \qquad (2)$$

(можно, конечно, записать $a_i(x)$ (i = 1,2,…,n) и $q(x)$ в виде бесконечных рядов, полагая при этом $a_{i,m}$(i = 1,2,…,n) и q_m равными нулю при m > N).

Будем разыскивать решение уравнения (1) тоже в виде ряда Тэйлора

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k . \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что производные функции $y(x)$ могут быть записаны так:

$$y^{(j)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+j}\prod_{i=1}^{j}(k+i)x^k . \tag{4}$$

После подстановки выражений (2 — 4) в (1), перемножения рядов и приравнивания коэффициентов в левой и правой частях (1) при x^k, приходим к следующему соотношению:

$$y_{k+n}\prod_{i=1}^{n}(k+i)+\sum_{m=0}^{k} y_{m+n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(m+i)a_{1,m-k}+\ldots+\sum_{m=0}^{k} y_m a_{n,m-k}=q_k ,$$

откуда находим, что

$$y_{k+n}=\frac{-\sum\limits_{m=0}^{k} y_{m+n-1}\prod\limits_{i=1}^{n-1}(m+i)a_{1,m-k}-\ldots-\sum\limits_{m=0}^{k} y_m a_{n,m-k}+q_k}{\prod\limits_{i=1}^{n}(k+i)} . \tag{5}$$

Положим в (5) k = 0. В результате получим

$$y_n=\frac{-y_{n-1}(n-1)!\,a_{1,0}-y_{n-2}(n-2)!\,a_{2,0}\ldots-y_0 a_{n,0}+q_k}{\prod\limits_{i=1}^{n}(k+i)} . \tag{6}$$

Из (6) следует, что y_n выражается через y_0, y_1,…, y_{n-1}. При k = 1 из (5) найдем, что y_{n+1} выражается через y_0, y_1,…, y_{n-1}, y_n , а, значит, опять таки через y_0, $y_1,\ldots$, y_{n-1} и т.д.. Таким образом, независимыми являются y_0, $y_1,\ldots$, y_{n-1}, а остальные коэффициенты разложения (3) вычисляются через них.

Отсюда следует алгоритм построения общего решения задачи Коши для уравнения (1). Сначала строится фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1). Для этого полагаем в (5) все $q_k = 0$ ($k = 0,1,2,\ldots$), а затем принимаем $y_{1,0} = 1$, $y_{1,1} = y_{1,3} = \ldots = y_{1,n-1} = 0$ (первый индекс означает номер фундаментального решения) и при помощи рекуррентного соотношения (5) определяем остальные коэффициенты. Останавливаясь на некотором шаге, получаем представление первого фундаментального решения ($j = 1$)

$$Y_j(x) = \sum_{k=0}^{K} y_{j,k} x^k \ . \tag{7}$$

Аналогично поступаем и с остальными фундаметальными функциями. Для построения функции с номером j ($j > 1$) полагаем $y_{j,j-1} = 1 / j!$, $y_{m,0} = 0$ ($m \neq j$-1), а дальше используем (5) и в результате приходим к выражению (7).

Для построения частного решения $Y^*(x)$ уравнения (1), отвечающего нулевым начальным условиям, принимаем $y_m^* = 0$ $(m = 0,1,\ldots,n-1)$ и используем (5) при $q_k \neq 0$ ($k = 0,1,2,\ldots N$):

$$Y^*(x) = \sum_{k=0}^{K} y_k^* x^k \ . \tag{8}$$

Общее решение задачи Коши для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) + Y^*(x) \, . \tag{9}$$

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$y'''(x) + a_1(x) y''(x) + a_2(x) y'(x) + a_3(x) y(x) = q(x).$$

Примем $N = 3$ и пусть $a_1(x) = -0{,}5 - 0{,}5x + 4x^2 - 1{,}5x^3$, $a_2(x) = -0{,}3 + x - 4{,}5x^2 + 2{,}5x^3$, $a_3(x) = 0{,}8 + 0{,}07x - x^2 + 0{,}5x^3$, $q(x) = -0{,}9 - 4{,}5x + 22x^2 - 15x^3$ (графики функций представлены на рис. 1).

Решение уравнения (1), соответствующее начальным условиям $y(0) = 0{,}25$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 5$, было получено двумя способами ─ предложенным выше (при $K = 10$) и при помощи метода Рунге-Кутты. Результаты сведены в таблицу.

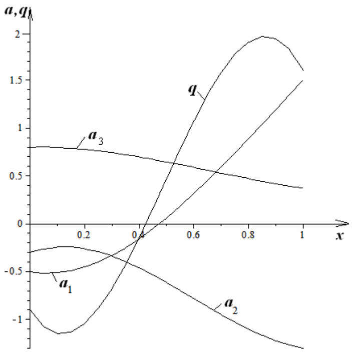

Рис. 1

x	Метод Рунге-Кутты	Предложенный метод
0.0	0,25	0,25
0.1	-0,0248978855	-0,0248978971
0.2	-0,2490714085	-0,2490714061
0.3	-0,4216032139	-0,4216031320
0.4	-0,5415660510	-0,5415649596
0.5	-0,6081977231	-0,6081864522
0.6	-0,6210329836	-0,6209548046
0.7	-0,5800010047	-0,5795993033
0.8	-0,4855007285	-0,4838503406
0.9	-0,3384728999	-0,3367582123
1.0	-0,1404903623	-0,1405568830

При $K = 20$ получается совпадение результатов до 8 – 9 знаков после запятой.

Вывод

Предложенный метод позволяет построить аналитические выражения для фундаментальных функций и частного решения задачи Коши, необходимые для применения метода граничных элементов для решения задач статики и динамики стержневых систем с переменными параметрами стержней.

SUMMARY

The method presented here enables one to construct analytical expressions for fundamental functions and particular solution of Cauchy problem, nessesary for application of boundary elements method to solving static and dynamic problems of rod constructions with variable parameters of rods.

Литература

1. В. А. Баженов, В. Ф. Оробей и др. Численные методы в механике ─ Одесса, 2004 ─ 564 с.

2. В.Ф.Оробей, А.В.Ковров. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов ─ Одесса, 2004 ─ 123 с.