

**КОЛЕБАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С
УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ
БЕТОНА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Фомин В.М., к.т.н., доцент

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

Будем полагать, что нагружение балки происходит в два этапа: первый этап – квазистатическое приложение силы P , при котором величина силы медленно возрастает от нуля до P . Методы определения напряженно-деформированного состояния в конце первого этапа изложены в [1]. Затем прикладываются силы $U(t)$ и $F(t)$, причем $U(0) = 0$ и $F(0) = 0$ (отсчет времени начинается с момента начала действия этих сил).

Для построения закона движения груза M (рис. 1) будем использовать пошаговый метод линейного ускорения. На основании этого метода имеем [2]

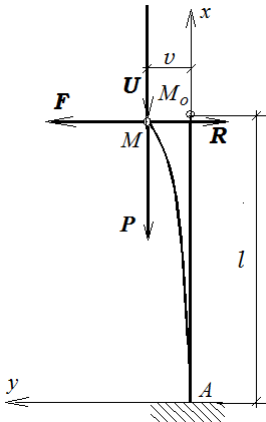


Рис. 1

$$\Delta \dot{v} = \ddot{v}_0 \Delta t + \Delta \ddot{v} \frac{\Delta t}{2}, \tag{1}$$

$$\Delta v = \dot{v}_0 \Delta t + \ddot{v}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \Delta \ddot{v} \frac{(\Delta t)^2}{6}.$$

Здесь \dot{v}_0 и \ddot{v}_0 – значения скорости и ускорения точки в начале шага, а $\Delta \dot{v}$ и $\Delta \ddot{v}$ – их приращения, Δv – приращение прогиба.

Для определения приращения реакции консоли ΔR составим основное уравнение динамики и спроектируем его на ось y . В результате будем иметь

$$m \Delta \ddot{v} = \Delta F + \Delta R. \tag{2}$$

Методами работы [1] можно построить зависимость

$$\Delta v = \Delta v(\Delta R) \tag{3}$$

на рассматриваемом шаге, т.е. при определенном на предыдущем шаге напряженно-деформированном состоянии консоли.

Далее, выражая $\Delta\ddot{v}$ через Δv из второго равенства (1) и подставляя в (2), получаем следующее уравнение относительно ΔR :

$$Y(\Delta R) = 0, \quad (4)$$

где

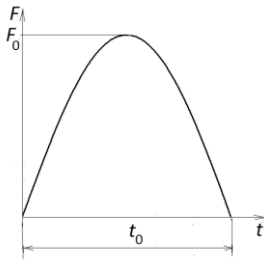
$$Y(\Delta R) = m \frac{6}{(\Delta t)^2} [\Delta v(\Delta R) - \dot{v}_0 \Delta t - \ddot{v}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}] - \Delta F - \Delta R \quad (4a)$$

(напомним, что \dot{v}_0 и \ddot{v}_0 определены на предыдущем этапе). Как показывают вычисления, проведенные на основе алгоритма, приведенного в [1], $Y(\Delta R)$ является монотонной функцией, а поэтому (4) имеет единственное решение. Определив из (4) ΔR , из (2) находим $\Delta\ddot{v}$. Далее из (1) определяем $\Delta\dot{v}$ и Δv . Приняв ΔR в качестве dF_1 , переходим к решению статической задачи, рассмотренной в [2] при числе участков $n = 1$. В результате получаем значения приращений напряжений и деформаций в точках консоли, а следовательно, напряженно-деформированное состояние балки в конце шага, что позволит построить функцию $\Delta v(\Delta R)$ на следующем шаге.

Для усиления устойчивости процесса вычислений можно использовать модификацию Вильсона метода линейного ускорения [2]. В этом случае при решении уравнения (4) в выражении (4a) для $Y(\Delta R)$ временной шаг Δt должен быть заменен на $\theta \Delta t$, где θ – коэффициент, больший единицы, а затем вместо определения $\Delta\ddot{v}$ из (2) используется выражение

$$\Delta\ddot{v} = \frac{1}{\theta m} (\Delta F + \Delta R). \quad (5)$$

Пример 1. Груз массой 20 Т расположен на вертикальной железобетонной колонне. Поперечное сечение колонны прямоугольное. Размеры поперечного сечения: ширина $b = 0.8$ м, высота $h = 0.28$ м. Длина колонны $l = 12$ м. Армирование симметричное: $S_1 = S_2 = 18,5 \text{ см}^2$. Сталь марки А-III, характеристики бетона: $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $R_c = 19 \text{ МПа}$, $R_p = 1,9 \text{ МПа}$, $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$. Рассматриваются колебания консоли в плоскости наименьшей жесткости поперечного сечения.



На груз в момент времени $t = 0$ с

Рис. 2 воздействует синусоидальный импульс (рис.2) с параметрами $t_0 = 1,73$ с, $F_0 = 0,7$ кН, что приводит к отклонению груза

из положения равновесия и свободным колебаниям. В этот момент на колонну начинает действовать вертикальная гармоническая сила

$$U(t) = U_0 \sin p_0 t,$$

где $U_0 = 83,4 \text{ кН}$. При $p_0 \ll 2\nu_0$ ($\nu_0 = 0,321 \text{ с}^{-1}$ – частота свободных линейных колебаний) влияние продольной силы $U(t)$ практически неощутимо – колебания, вызванные импульсом, быстро затухают (график 1 на рис. 3, $p_0 = 0,321 \text{ с}^{-1}$; на графике t – в секундах, ν – прогиб на конце колонны в метрах).

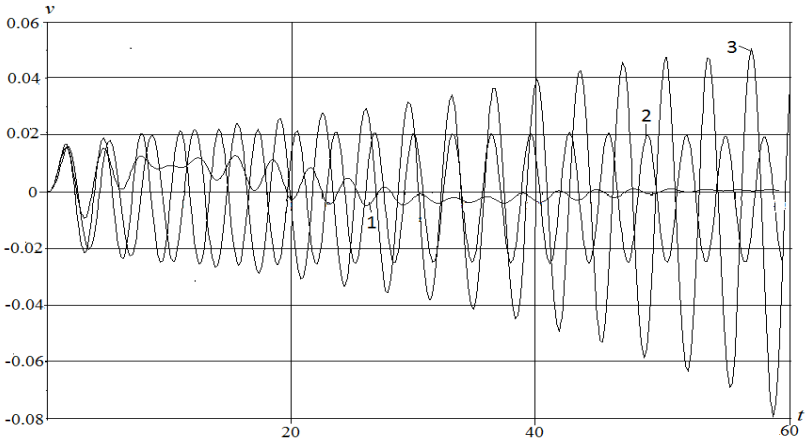


Рис. 3

При приближении p_0 к частоте $\nu_p = 2\nu_0$ колебания перестают быть затухающими (график 2, $p_0 = 0,583 \text{ с}^{-1}$), а при $p_0 = \nu_p$ наблюдается рост амплитуды колебаний. Явление, при котором гармоническая продольная сила вызывает раскачку поперечных колебаний балки, называется параметрическим резонансом. При дальнейшем увеличении частоты продольной силы колебания вновь становятся затухающими.

Следует заметить, что даже при $p_0 = \nu_p$ не при любых значениях амплитуды продольной силы наблюдается раскачка колебаний. На рис. 4 приведены графики движения груза при различных значениях U_0 : график 1 – при $U_0 = 83,4 \text{ кН}$, график 2 – при $U_0 = 73,6 \text{ кН}$, график 3 – при $U_0 = 49,1 \text{ кН}$. Легко заметить, что график 3 соответствует затухающим колебаниям груза.

Нетрудно заметить, что (а особенно при параметрическом резонансе) центр колебаний смещается от точки $\nu = 0$ вследствие накопления остаточных деформаций.

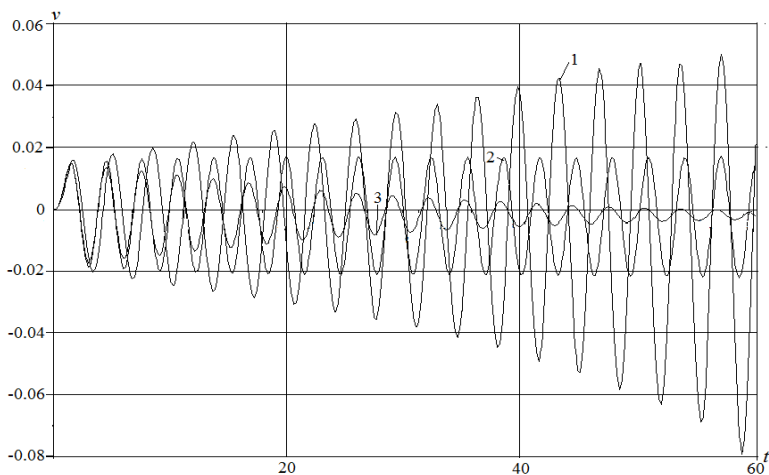


Рис. 4

Пример 2. Пусть теперь на груз действуют одновременно вертикальная и горизонтальная гармонические силы:

$$U(t) = U_0 \sin p_0 t, \quad F(t) = F_0 \sin q_0 t.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $q_0 = v_0$, т.е. резонансный случай. При отсутствии пульсирующей продольной силы (т.е. при $U_0 = 0$) будем иметь обычные вынужденные колебания. Так как амплитуда поперечной вынуждающей силы мала (принято $F_0 = 0,136 \text{ кН}$), то максимальная амплитуда колебаний оказывается малой (рис.5, график 1).

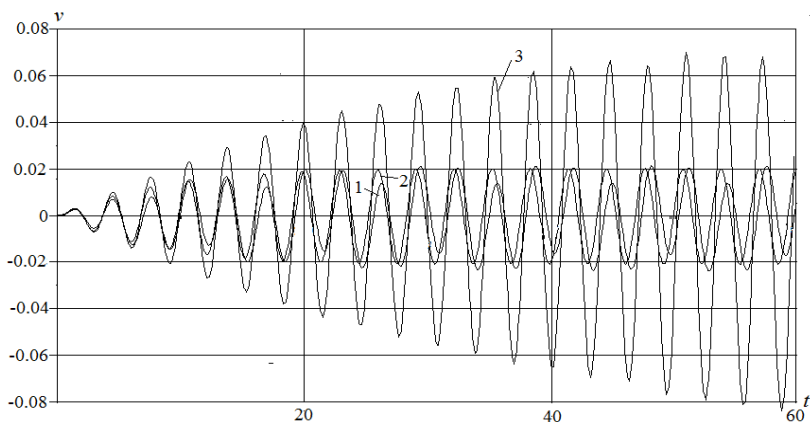


Рис.5

При U_0 , отличном от нуля, и p_0 , достаточно удаленном от v_p , графики колебаний практически совпадают с 1 (график 2 соответствует $U_0 = 61,3$ кН и $p_0 = 0,428$ с⁻¹) и при $p_0 = v_p$ (график 3) наблюдается раскачка колебаний, т.е. наблюдается параметрический резонанс.

Рассмотрим теперь случай, когда $q_0 \neq v_0$. График вынужденных колебаний (при $F_0 = 0,51$ кН и $U_0 = 0$) изображен на рис. 6 (график 1). Приложим теперь гармоническую продольную силу $U(t)$ с $U_0 = 98,1$ кН и $p_0 = v_p$. Перемещения груза в этом случае изображены в виде графика 2. Налицо присутствие параметрического резонанса.

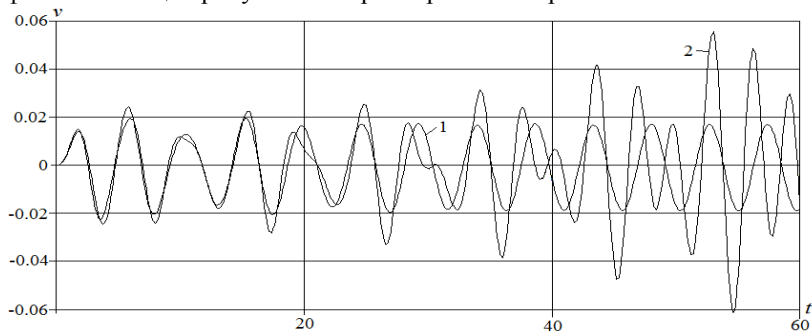


Рис.6

Выводы

Методика исследования плоского изгиба железобетонных балок с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона, предложенная в работах [1]-[2], позволяет выявить такие явления динамики конструкций как параметрический резонанс, которые невозможно обнаружить с помощью линейных теорий.

Summary

Methods of investigation of plain bending of RC beams with taking into account nonlinear behavior and plasticity of concrete offered in [1]-[2] enable one to detect such effects as parametric resonance, which couldn't be revealed by means of linear theories.

1. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345–353.

2. Фомин В.М., Фомина И.П. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении// Вісник ОДАБА. Вып.45, – Одесса, 2012. – с.279-284.