

## ВЛИЯНИЕ РЕЖИМА ЗАГРУЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Орлов А.Н.**, *к.т.н., доц.*, **Хоменко О.И.**, *к.т.н., доц.*,  
**Бекирова М.М.**, *к.т.н., доц.*, **Хоменко А.А.**, *асп.*

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

### 1. Общие предпосылки и допущения

При расчете на устойчивость при длительных действиях нагрузки необходимо определить максимальную силу, при которой скорость перемещений во времени монотонно затухает, а перемещения стремятся к конечной величине. Решение задачи в такой постановке приемлемо для стержней, развитие перемещений которых во времени приводит к изменению напряженного состояния. Это условие для сжатого стержня выполняется лишь при наличии начальных несовершенств (внецентренное приложение сжимающей силы, начальная погибь и пр.).

Так как время существования и эксплуатации строительных конструкций достаточно велико, следует исходить из достижения состояния, соответствующего потере прочности при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. принимать, что критическое время  $t_k \rightarrow \infty$ .

При решении задачи об устойчивости железобетонного стержня в условиях ползучести приняты следующие допущения: 1) считается справедливой гипотеза плоских сечений; 2) деформации бетона и арматуры у мест контакта одинаковы; 3) модули деформаций как бетона, так и арматуры при сжатии и растяжении попарно равны; 4) бетон в растянутой зоне работает без трещин.

Связь между деформациями и напряжениями в бетоне устанавливается формулой, основанной на зависимостях линейной теории ползучести

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot \delta(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} dt, \quad (1)$$

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (2)$$

где  $E(\tau)$  – модуль упруго-мгновенных деформаций,  $C(t, \tau)$  – мера ползучести [1].

## 2. Напряженное и деформированное состояние

Рассматривается достаточно гибкий железобетонный стержень. Опираие шарнирное. Загружен стержень переменной во времени продольной силой  $P(t)$ , приложенной с эксцентриситетом  $e_0$ . Изгиб, как при кратковременном действии нагрузки, так и при длительном, происходит в плоскости  $zOy$ . Изгиб из этой плоскости исключен. Стержень имеет постоянное поперечное сечение в виде прямоугольника по всей длине. Армирование симметричное.

В произвольном по длине стержня сечении в любой момент времени  $t$  сформируется напряженное состояние, изображенное на рис. 1.

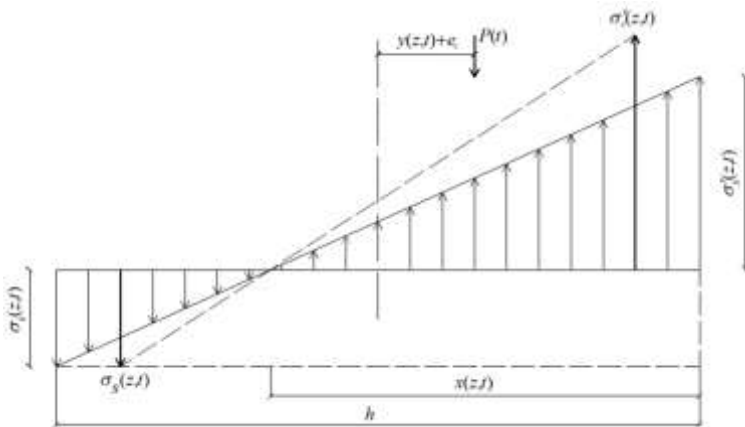


Рис. 1. Напряженное состояние в поперечном сечении стержня.

Здесь  $\sigma'_b(z,t)$ ,  $\sigma_b(z,t)$  – напряжения в крайних волокнах бетона;  $\sigma'_s(z,t)$ ,  $\sigma_s(z,t)$  – напряжения в арматуре;  $x(z,t)$  – высота сжатой зоны;  $y(z,t)$  – перемещение, сформировавшееся к моменту времени  $t$ .

Если величина эксцентриситета удовлетворяет условию  $e_0 > \frac{h}{6}$ , то эпюра напряжений разнозначна во всем рассматриваемом интервале времени. Если же  $e_0 < \frac{h}{6}$ , то в начальный момент времени  $t_0$  эпюра будет однозначной. В дальнейшем она может оставаться однозначной, но может в какой-то момент времени перейти в двухзначную. Это зависит от вида и уровня нагрузки  $P(t)$ .

Для любого сечения по высоте стержня в момент времени  $t$  можно записать условие равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} [\sigma'_b(z, t) + \sigma_b(z, t)] A_b + [\sigma'_s(z, t) + \sigma_s(z, t)] A_s &= P(t) \\ \frac{1}{12} [\sigma'_b(z, t) - \sigma_b(z, t)] h A_b + [\sigma'_s(z, t) - \sigma_s(z, t)] h_1 A_s &= P(t) [y(z, t + e_0)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и уравнение совместности деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon'_s(z, t) &= \frac{x(z, t) - a'}{x(z, t)} \varepsilon'_b(z, t), \\ \varepsilon_s(z, t) &= \frac{h - x(z, t) - a}{x(z, t)} \varepsilon_b(z, t), \\ \varepsilon_s(z, t) &= -\frac{h - x(z, t)}{x(z, t)} \varepsilon'_b(z, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Физические зависимости между напряжениями и деформациями в арматуре имеют вид

$$\sigma'_s(z, t) = E_s \varepsilon'_s(z, t), \sigma_s(z, t) = E_s \varepsilon_s(z, t), \quad (5)$$

С использованием основного соотношения линейной теории ползучести (1) можно записать выражение, устанавливающее связь между деформациями и напряжениями в крайних волокнах бетона

$$\begin{aligned} \varepsilon'_b(z, t) &= \sigma'_b(z, t) \delta(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma'_b(z, t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ \varepsilon_b(z, t) &= \sigma_b(z, t) \delta(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma_b(z, t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Кривизна стержня представляется следующими зависимостями

$$\frac{1}{\rho(z, t)} = \frac{\varepsilon'_b(z, t) - \varepsilon_b(z, t)}{h}, \frac{1}{\rho(z, t)} = \frac{\sigma'_s(z, t) - \sigma_s(z, t)}{2h_1 E_s} \quad (7)$$

Из уравнений равновесия (3) следует

$$\begin{aligned} \sigma'_b(z, t) &= \left\{ P(t) - [\sigma'_s(z, t) + \sigma_s(z, t)] A_s \right\} \cdot \frac{1}{A_b} + \\ &+ \left\{ [y(z, t) + e_0] P(t) - [\sigma'_s(z, t) - \sigma_s(z, t)] h_1 A_s \right\} \cdot \frac{6}{h A_b}, \quad (8) \\ \sigma_b(z, t) &= \left\{ P(t) - [\sigma'_s(z, t) + \sigma_s(z, t)] A_s \right\} \cdot \frac{1}{A_b} - \\ &- \left\{ [y(z, t) + e_0] P(t) - [\sigma'_s(z, t) - \sigma_s(z, t)] h_1 A_s \right\} \cdot \frac{6}{h A_b} \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах под  $A_b$  следует понимать площадь бетонной составляющей сечения

$$A_b = A - 2A_s \quad (A = b \times h) \quad (9)$$

После подстановки в выражение для кривизны (7) (первая формула) значений  $\varepsilon'_b(z, t)$  и  $\varepsilon_b(z, t)$ , определяемых зависимостями (6) будет получено уравнение

$$h \cdot \frac{1}{\rho(z, t)} = [\sigma'_b(z, t) - \sigma_b(z, t)] \partial(t, t) - \int_{t_0}^t [\sigma'_b(z, t) - \sigma_b(z, t)] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (10)$$

Разность напряжений в крайних волокнах бетона с учетом зависимостей (8) имеет вид

$$\sigma'_b(z, t) - \sigma_b(z, t) = \frac{12}{h A_b} \left\{ [y(z, t) + e_0] P(t) - [\sigma'_s(z, t) - \sigma_s(z, t)] h_1 A_s \right\} \quad (11)$$

Так как разность напряжений в арматуре выражается через привязку по формуле (7) (вторая формула), то

$$\sigma'_b(z, t) - \sigma_b(z, t) = \frac{12}{h A_b} \left\{ [y(z, t) + e_0] P(t) - 2h_1^2 A_s E_s \cdot \frac{1}{\rho(z, t)} \right\}. \quad (12)$$

После подстановки выражения (12) в уравнение (10) и некоторых преобразований будет получено уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho(z, t)} - \frac{[y(z, t) + e_0] P(t)}{I_b [1 + \alpha(t) E_b(t) \delta(t, t)]} \delta(t, t) + \\ &+ \frac{1}{I_b [1 + \alpha(t) E_b(t) \delta(t, t)]} \times \\ &\times \int_{t_0}^t \left\{ [y(z, \tau) + e_0] P(t) - \alpha(\tau) I_b E_b(\tau) \frac{1}{\rho(z, \tau)} \right\} \frac{\partial \delta(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\alpha(t) = \mu \rho_1 n(t), \quad \mu = \frac{A_s}{A_b}, \quad \rho_1 = \frac{2h_1^2 A_b}{I_b}, \quad n(t) = \frac{E_s}{E_b(t)}, \quad I_b = \frac{h^2 A_b}{12}. \quad (14)$$

Для решения уравнения (13) необходимо, во-первых, выбрать зависимость между кривизной и перемещением и, во-вторых, принять какую-либо конкретную линейную теорию ползучести. После решения уравнения (13), т.е. нахождения  $y(z, t)$ , достаточно просто определяются характеристики напряженного состояния стержня по любому поперечному сечению по формулам

$$x(z, t) = \frac{h}{2} + \frac{I_b}{A_b} \frac{P(t)}{\left[ y(z, t) + e_0 \right] P(t) - 2h_1^2 A_s E_s \left( 1 - \frac{I_b}{h_1^2 A_b} \right) \cdot \frac{1}{\rho(z, t)}}, \quad (15)$$

$$\sigma'_b(z, t) = \frac{x(z, t)}{I_b} \left\{ \left[ y(z, t) + e_0 \right] P(t) - 2h_1^2 A_s E_s \cdot \frac{1}{\rho(z, t)} \right\}, \quad (16)$$

$$\sigma_b(z, t) = \frac{x(z, t) - h}{I_b} \left\{ \left[ y(z, t) + e_0 \right] P(t) - 2h_1^2 A_s E_s \cdot \frac{1}{\rho(z, t)} \right\}, \quad (17)$$

$$\sigma'_s(z, t) = E_s [x(z, t) - a'] \cdot \frac{1}{\rho(z, t)}, \quad (18)$$

$$\sigma_s(z, t) = -E_s [h - x(z, t) - a] \cdot \frac{1}{\rho(z, t)}, \quad (19)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (13) – уравнение медленного движения стержня. Задача об устойчивости в условиях ползучести сводится к рассмотрению устойчивых и неустойчивых форм движения. Устойчивым считается движение стержня, при котором перемещения при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к конечной величине. Под критической нагрузкой следует понимать наименьшее значение силы, вызывающей неограниченное увеличение перемещений.

При решении настоящей задачи применяется теория упругой наследственности (ТУН). В ТУН считается, что значение деформации ползучести – это функция только продолжительности действия нагрузки  $t - \tau$ , а модуль упруго-мгновенных деформаций не зависит от  $\tau$ , т.е.

$$E_b(t) = E_b(\tau) = E_b = \text{const},$$

$$\delta(t, \tau) = \delta(t - \tau) = \frac{1}{E_b} + C(t - \tau), \quad C(t - \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t - \tau)}],$$

$$\frac{\partial \gamma(t, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma C_0 e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad E_b C_0 = \varphi. \quad (20)$$

С учетом зависимостей (20) интегро-дифференциальное уравнение (13) запишется так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho(z, t)} - \frac{P(t)}{E_b I_b (1 + \alpha)} [y(z, t) + e_0] - \\ & - \frac{\gamma \varphi}{E_b I_b (1 + \alpha)} \int_{t_0}^t \left\{ [y(z, \tau) + e_0] P(t) - \alpha E_b I_b \frac{1}{\rho(z, \tau)} \right\} e^{-\gamma(t-\tau)} dt = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Предполагается, что между кривизной и перемещениями справедлива упрощенная приближенная зависимость

$$\frac{1}{\rho(z, t)} = -y''(z, t) \quad (22)$$

и окончательно интегро-дифференциальное уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} & y''(z, t) + \frac{P(t)}{E_b I_b (1 + \alpha)} [y(z, t) + e_0] + \frac{\gamma \varphi}{E_b I_b (1 + \alpha)} \times \\ & \times \int_{t_0}^t \left\{ [\alpha E_b I_b y''(z, \tau)] + [y(z, \tau) + e_0] P(\tau) \right\} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (23) преобразуется в дифференциальное с частными производными. Для этого следует найти первую производную (23) по  $t$  и сложить это выражение с уравнением (23), предварительно умноженным на  $\gamma$ . В результате таких операций будет получено уравнение

$$\begin{aligned} & \dot{y}''(z, t) + \gamma \frac{1 + \alpha(1 + \varphi)}{1 + \alpha} y''(z, t) + \frac{1}{E_b I_b (1 + \alpha)} [y(z, t) + e_0] \dot{P}(t) + \\ & + \frac{1}{E_b I_b (1 + \alpha)} P(t) \dot{y}(z, t) + \frac{\gamma(1 + \varphi)}{E_b I_b (1 + \alpha)} [y(z, t) + e_0] P(t) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

с начальным

$$y''(z, t_0) + \frac{1}{E_b I_b (1 + \alpha)} [y(z, t_0) + e_0] P(t_0) = 0 \quad (25)$$

и граничными условиями

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0. \quad (26)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по  $Z$ , а точками – по  $t$ .

С использованием метода Бубнова-Галёркина решение уравнения (24) разыскивается в виде

$$y(z, t) = f(t) \sin \frac{\pi z}{l} \quad (27)$$

Граничные условия (26) удовлетворяются, а

$$y(z, t) = f(t) \sin \frac{\pi z}{l} \quad (28)$$

Дифференциальное уравнение (24) и начальное условие (25) после введения обозначений

$$k_1 = \frac{1 + \alpha(1 + \varphi)}{1 + \alpha}, \quad k_2 = \frac{1}{E_b I_b (1 + \alpha)}, \quad \gamma_1 = \gamma(1 + \varphi). \quad (29)$$

будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} & \ddot{y}''(z, t) + \gamma k_1 y''(z, t) + k_2 [y(z, t) + e_0] \dot{P}(t) + \\ & + k_2 y(z, t) P(t) + \gamma_1 k_2 [y(z, t) + e_0] P(t) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$y''(z, t_0) + k_2 [y(z, t_0) + e_0] P(t_0) = 0 \quad (31)$$

Составляется уравнение

$$\int_0^l \left\{ y(z, t_0) + [k_2 y(z, t_0) + k_2 e_0] P(t_0) \right\} \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0 \quad (32)$$

или

$$\int_0^l \left\{ \left[ k_2 P(t_0) f(t_0) - \frac{\pi^2}{l^2} f(t_0) \right] \sin^2 \frac{\pi z}{l} + k_2 e_0 P(t_0) \sin \frac{\pi z}{l} \right\} dz = 0 \quad (33)$$

После интегрирования будет

$$f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P(t_0)}{P_s - P(t_0)}. \quad (34)$$

$f(t_0)$  – амплитудное значение перемещения стержня, т.е. перемещения среднего по высоте сечения;  $P(t_0)$  – значение продольной нагрузки в начальный момент времени;  $P_s$  – эйлеровская сила, которую следует трактовать как критическую при кратковременном действии нагрузки

$$P_s = \frac{\pi^2 E_b I_b}{l^2} (1 + \alpha). \quad (35)$$

Из формулы (34) следует, что при  $P(t_0) < P_s$  перемещение  $f(t_0)$  будет конечным. В случае  $P(t_0) = P_s$  перемещение  $f(t_0)$  обращается в бесконечность и имеет место упруго-мгновенная потеря устойчивости.

Составляется уравнение

$$\int_0^l \left\{ \begin{aligned} & \dot{y}''(z,t) + \gamma k_2 y''(z,t) + k_2 [y(z,t) + e_0] \dot{P}(t) + \\ & + k_2 \dot{y}(z,t) P(t) + \gamma_1 k_2 [y(z,t) + e_0] P(t) \end{aligned} \right\} \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0 \quad (36)$$

или

$$\int_0^l \left\{ \begin{aligned} & \left[ k_2 P(t) \dot{f}(t) - \frac{\pi^2}{l^2} + k_2 \dot{P}(t) f(t) \gamma_1 k_2 P(t) f(t) - \gamma k_1 \frac{\pi^2}{l^2} f(t) \right] \sin^2 \frac{\pi z}{l} + \\ & + \left[ k_2 e_0 \dot{P}(t) + \gamma_1 k_2 e_0 P(t) \right] \sin \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \right\} dz = 0 \quad (37)$$

После интегрирования будет получено дифференциальное уравнение в обыкновенных производных относительно  $f(t)$ .

$$[P_3 - P(t)] \dot{f}(t) + \left\{ \gamma_1 [\bar{P} - P(t)] \dot{P}(t) \right\} f(t) - \frac{4e_0}{\pi} \left[ \gamma_1 P(t) + P(t) \right] = 0 \quad (38)$$

$$\bar{P} = \frac{\pi^2 E_b I_b}{l^2} \left( \alpha + \frac{1}{1 + \varphi} \right). \quad (39)$$

Решение уравнения (38) зависит от вида продольной нагрузки  $P(t)$ .

### 3. Постоянная нагрузка

Предполагается, что во всем рассматриваемом интервале времени нагрузка остается постоянной  $P(t) = P(t_0) = P = const$ . В этом случае перемещение в начальный момент времени  $t_0$  определяется формулой

$$f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{P_3 - P} \quad (40)$$

а дифференциальное уравнение (38) принимает вид

$$(P_3 - P) \dot{f}(t) + \gamma_1 (\bar{P} - P) f(t) - \gamma_1 \frac{4e_0}{\pi} P = 0 \quad (41)$$

$$\dot{f}(t) + \gamma_1 \frac{\bar{P} - P}{P_3 - P} f(t) - \gamma_1 f(t_0) = 0. \quad (42)$$

Решение этого дифференциального уравнение запишется так:

$$f(t) = f(t_0) \left[ \frac{P_3 - P}{\bar{P} - P} + \frac{\bar{P} - P_3}{\bar{P} - P} e^{-\gamma_1 \frac{\bar{P} - P}{P_3 - P} (t - t_0)} \right] \quad (43)$$

Характер роста перемещений во времени существенным образом зависит от знака разности  $\bar{P} - P$ . При  $\bar{P} - P < 0$  скорость деформиро-



вания во времени растет и при  $t - t_0 \rightarrow \infty$  перемещения стремятся к бесконечности. При  $\bar{P} - P > 0$  скорость деформирования во времени затухает и если  $t - t_0 \rightarrow \infty$ , то перемещения стремятся к конечной величине

$$f(\infty) = \frac{P_0 - P}{\bar{P} - P} f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{\bar{P} - P}. \quad (44)$$

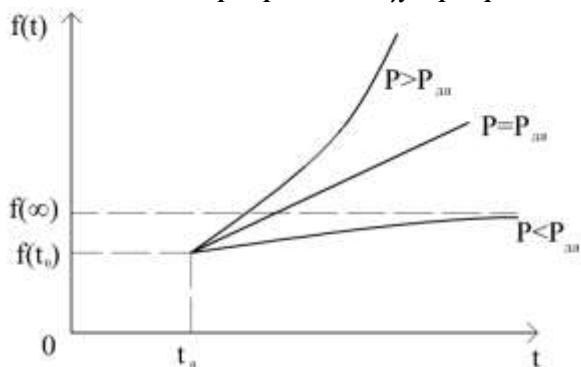


Рис. 2. Кривая увеличения во времени амплитуды перемещений при постоянной во времени нагрузке

В предельном случае, когда  $\bar{P} - P = 0$ , формула (43) приводит к неопределенности вида  $0/0$ . Раскрыв неопределенность, можно прийти к выражению для перемещения в случае выполнения условия  $\bar{P} - P = 0$ :

$$f(t) = f(t_0) \left[ 1 + \gamma_1 (t - t_0) \right]. \quad (45)$$

В этом случае деформирование стержня происходит с постоянной скоростью. Нагрузка, удовлетворяющая условию  $\bar{P} - P = 0$ , и представляет собой критическую силу  $P_{cr}$  при длительно действующей нагрузке в условиях ползучести

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_b I_b}{l^2} \left( \frac{1}{1 + \varphi} + \alpha \right) \quad (46)$$

Развитие амплитудных перемещений стержня во времени в трех случаях представлено на рис. 2. В параграфе 2 сформулировано понятие критической силы. В этой формулировке выражение "неограниченное увеличение перемещений" нужно понимать как условное, поскольку при решении задачи используется выражение для кривизны (23), пригодное для малых деформаций.

#### 4. Монотонно возрастающая во времени нагрузка.

Предполагается, что во всем рассматриваемом интервале времени  $t_0 \leq t \leq \infty$  монотонно возрастающая нагрузка описывается законом

$$P(t) = P \left[ 1 - m e^{-\beta(t-t_0)} \right], \quad (47)$$

где  $m$  – параметр, регулирующий уровень нагрузки в начальный момент времени  $t_0$ ;  $\beta$  – параметр, регулирующий скорость нарастания нагрузки;  $P$  – величина нагрузки в конечный момент времени  $t = \infty$ .

$$P(t_0) = (1-m)P, \quad P(\infty) = P, \quad 0 < m < 1 \quad (48)$$

В начальный момент времени  $t_0$  в соответствии с (34) и (48) будет

$$f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{(1-m) \cdot P}{P_3 - (1-m) \cdot P}, \quad (49)$$

и критический параметр нагрузки при кратковременном загрузении

$$P_{кр} = \frac{P_3}{1-m}. \quad (50)$$

С учетом (47) и выражения

$$\dot{P}(t) = m\beta P e^{-\beta(t-t_0)} \quad (51)$$

дифференциальное уравнение (38) будет выглядеть так:

$$\dot{f}(t) + b_1 f(t) = b_2 - b_3 e^{-\beta(t-t_0)} - \frac{mP}{P_3 - P} \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta) f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)}, \quad (52)$$

где

$$b_1 = \gamma_1 \frac{\bar{P} - P}{P_3 - P}, \quad b_2 = \gamma_1 \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{P_3 - P}, \quad b_3 = (\gamma_1 - \beta) m \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{P_3 - P} \quad (53)$$

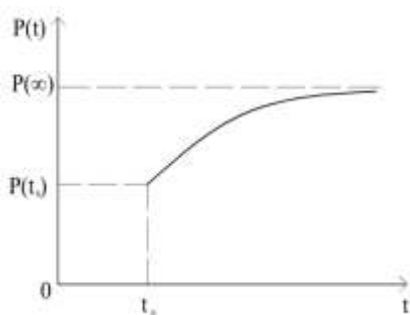


Рис. 3. Кривая роста нагрузки во времени

Уравнение (52) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Для получения решения этого уравнения целесообразно использовать преобразование Лапласа в сочетании с методом последовательных приближений.

В соответствии с основными теоремами и соотношениями преобразования Лапласа устанавливаются в соответствии между оригиналами элементов уравнения (52) и их изображениями

$$b_1 = \gamma_1 \frac{\bar{P} - P}{P_3 - P}, \quad b_2 = \gamma_1 \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{P_3 - P}, \quad b_3 = (\gamma_1 - \beta)m \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{P_3 - P} \quad (54)$$

После выполнения преобразования Лапласа над дифференциальным уравнением (52) будет получено соответствующее ему в пространстве изображений алгебраическое уравнение относительно  $F(s)$ .

$$sF(s) - f(t_0) + b_2 F(s) = \frac{b_2}{s} - \frac{b_3}{s + \beta} - \frac{mP}{P_3 - P} h \left\{ \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta)f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)} \right\} \quad (55)$$

Из решения уравнения (55) следует, что изображение  $F(s)$  искомой функции  $f(t)$  имеет вид

$$F(s) = \frac{f(t_0)}{s + b_1} + \frac{b_2}{s(s + b_1)} - \frac{b_3}{(s + b_1)(s + \beta)} - \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{1}{s + b_1} \cdot h \left\{ \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta)f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)} \right\} \quad (56)$$

Отбросив четвертый член в правой части (56), получим первое приближение в пространстве изображений

$$F_1(s) = \frac{f(t_0)}{s + b_1} + \frac{b_2}{s(s + b_1)} - \frac{b_3}{(s + b_1)(s + \beta)}, \quad (57)$$

которому в пространстве оригиналов соответствует первое приближение, полученное путем обратного перехода

$$f_1(t) = \left[ f(t_0) - \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1 - \beta} \right] e^{-b_1(t-t_0)} - \frac{b_3}{b_1 - \beta} e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{b_2}{b_1} \quad (58)$$

или

$$f_1(t) = A_1 + A_2 e^{-b(t-t_0)} - A_3 e^{-\beta(t-t_0)} \quad (59)$$

$$A_2 = f(t_0) - \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1 - \beta}; \quad A_3 = \frac{b_3}{b_1 - \beta}; \quad A_1 = \frac{b_2}{b_1} \quad (60)$$

Получив это приближение, вычислим выражение, стоящее под знаком  $h$  в фигурных скобках в четвертом слагаемом правой части выражения (56). Имеем

$$\dot{f}_1(t) = -b_1 A_2 e^{-b_1(t-t_0)} + \beta A_3 e^{-\beta(t-t_0)} \quad (61)$$

следовательно

$$\begin{aligned} \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta)f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)} &= (\gamma_1 - \beta)A_1 e^{-\beta(t-t_0)} + \\ &+ (\gamma_1 - b_1 - \beta)A_2 e^{-(b_1+\beta)(t-t_0)} - (\gamma_1 - 2\beta)A_3 e^{-2\beta(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (62)$$

или, после выполнения преобразования Лапласа,

$$\begin{aligned} h \left\{ \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta)f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)} \right\} &= \frac{(\gamma_1 - \beta)A_1}{s + \beta} + \\ &+ \frac{(\gamma_1 - b_1 - \beta)A_2}{s + (b_1 + \beta)} - \frac{(\gamma_1 - 2\beta)A_3}{s + 2\beta}. \end{aligned} \quad (63)$$

Таким образом, вторым приближением в пространстве изображений будет

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \frac{f(t_0)}{s + b_1} + \frac{b_2}{s(s + b_1)} - \frac{b_3}{(s + b_1)(s + \beta)} - \\ &- \frac{mP}{P_9 - P} \left\{ \frac{(\gamma_1 - \beta)A_1}{(s - b_1)(s + \beta)} + \frac{(\gamma_1 - b_1 - \beta)A_2}{(s + b_1)[s + (b_1 + \beta)]} - \frac{(\gamma_1 - 2\beta)A_3}{(s + b_1)(s + 2\beta)} \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

Соответствующим этому изображению оригинал и будет вторым приближением решения уравнения (52). Это приближение можно считать окончательным решением, т.к. оно дает полную качественную картину развития перемещений во времени, а все последующие приближения (третье, четвертое и т.д.) не вносят сколько-нибудь заметных количественных изменений.

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 + A_2 e^{-b_1(t-t_0)} - A_3 e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{mP}{P_9 - P} \left\{ \frac{\gamma_1 - \beta}{b_1 - \beta} A_1 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)} \right] - \right. \\ &\left. \frac{\gamma_1 - b_1 - \beta}{\beta} A_2 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-(b_1+\beta)(t-t_0)} \right] - \frac{\gamma_1 - 2\beta}{b_1 - 2\beta} A_3 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-2\beta(t-t_0)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (65)$$

Характер развития перемещений зависит от знака  $b_1$ , т.е. от знака разности  $\bar{P} - P$ , как и в предшествующем параграфе. При  $b_1 < 0$  ( $\bar{P} - P < 0$ ) скорость деформирования растет и при  $t - t_0 \rightarrow \infty$  перемещения неограниченно возрастают. При  $b_1 > 0$  ( $\bar{P} - P > 0$ ) ско-

рость деформирования затухает и в случае  $t - t_0 \rightarrow \infty$  перемещения определяются конечной величиной

$$f(\infty) = A_1 = \frac{b_2}{b_1} = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{\bar{P} - P}, \quad (66)$$

что по форме совпадает с формулой (44). Но если в формуле (44)  $P$  – нагрузка, постоянная на всем интервале  $t_0 \leq t \leq \infty$ , то в формуле (66)  $P$  – конечное значение возрастающей нагрузки, сформировавшееся к моменту  $t = \infty$ .

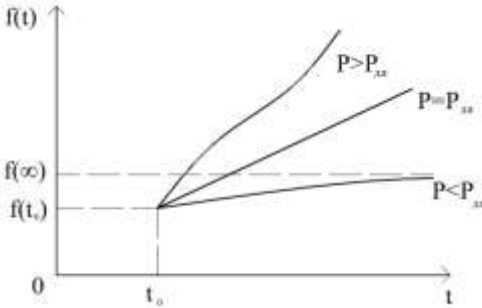


Рис. 4. Кривая увеличения

$$f(t) = f(t_0) + b_2(t - t_0) + b_2 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{\beta} e^{-\beta(t-t_0)} \cdot (t - t_0) - \left\{ \frac{b_3}{\beta} + b_2 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1}{\beta^2} + \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{\beta} \left[ f(t_0) - \frac{b_3}{\beta} \right] \right\} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] + b_3 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - 2\beta}{2\beta^2} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] \quad (67)$$

Как видно из этой формулы, характер развития перемещений определяется вторым, третьим, четвертым и пятым слагаемыми. Второе слагаемое непрерывно возрастает по линейному закону, третье – во времени амплитуды перемещения при возрастающей во времени нагрузке асимптотически стремится к нулю, четвертое и пятое – асимптотически приближаются к постоянным величинам

$$-\frac{b_3}{\beta} - b_2 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1}{\beta^2} - \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{\beta} \left[ f(t_0) - \frac{b_3}{\beta} \right] \text{ и}$$

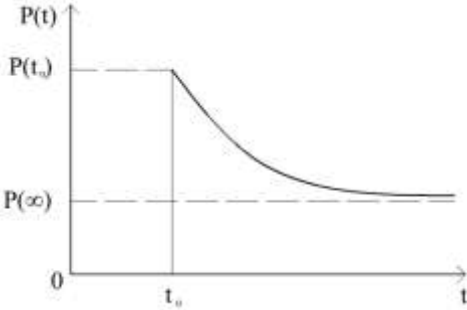
В предельном случае, когда

$b_1 = 0$  ( $\bar{P} - P = 0$ ), правая часть формулы (65) превращается в неопределенность вида  $0/0$ . После раскрытия неопределенности формула амплитудных перемещений при выполнении условия  $b_1 = 0$  ( $\bar{P} - P = 0$ ),

принимает вид

$$b_3 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - 2\beta}{2\beta^2} \text{ соответственно.}$$

Очевидно, что в моменты времени достаточно удаленные от момента загрузки деформирование стержня будет происходить с постоянной скоростью.



Нагрузка, удовлетворяющая условию  $b_1=0$ , есть критическая сила  $P_{\text{кр}}$  при длительном действии нагрузки. Также, как и в предыдущем параграфе, она определяется по формула (46).

Рис. 5. Кривая уменьшения нагрузки во времени

### 5. Монотонно убывающая во времени нагрузка

Такая нагрузка описывается зависимостью

$$P(t) = P \left[ 1 + m e^{-\beta(t-t_0)} \right]. \quad (69)$$

Здесь  $m$  – параметр, регулирующий уровень нагрузки в начальный момент времени;  $\beta$  – параметр, регулирующий скорость уменьшения нагрузки;  $P$  – величина нагрузки в конечный момент времени.

$$P(t_0) = (1+m)P, \quad P(\infty) = P, \quad m > 0. \quad (69)$$

В начальный момент времени  $t_0$

$$f(t_0) = \frac{4e_0}{\pi} \frac{(1+m)P}{P_3 - (1+m)P}, \quad (70)$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{P_3}{1+m}. \quad (71)$$

Из (68) следует

$$\dot{P}(t) = -m\beta P e^{-\beta(t-t_0)} \quad (72)$$

и дифференциальное уравнение (38) принимает вид

$$\dot{f}(t) + b_1 f(t) = b_2 + b_3 e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{mP}{P_3 - P} \left[ \dot{f}(t) + (\gamma_1 - \beta) f(t) \right] e^{-\beta(t-t_0)}, \quad (73)$$

$b_1, b_2, b_3$  определяются формулами (53).

Учитывая тот факт, что уравнение (73) имеет ту же структуру, что и уравнение (52), решение можно записать сразу

$$f(t) = A_1 + A_2 e^{-b_1(t-t_0)} - \frac{mP}{P_3 - P} \times \left. \begin{aligned} & \left[ \frac{\gamma_1 - \beta}{b_1 - \beta} \cdot A_1 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)} \right] - \frac{\gamma_1 - b_1 - \beta}{\beta} \times \right. \\ & \left. \times A_2 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-(b_1+\beta)(t-t_0)} \right] + \frac{\gamma_1 - 2\beta}{b_1 - 2\beta} \cdot A_3 \left[ e^{-b_1(t-t_0)} - e^{-2\beta(t-t_0)} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$A_1, A_2, A_3$  определяются по формулам (60) с изменением знака третьего слагаемого на противоположный в формуле  $A_2$ .

В двух предыдущих случаях перемещения во времени возрастают либо ограниченно ( $P < P_{\text{дл}}$ ), либо неограниченно ( $P \geq P_{\text{дл}}$ ), т.к. нагрузка во времени увеличивалась либо, как минимум, оставалась постоянной. В случае же, когда нагрузка во времени уменьшается, перемещения могут не только возрастать, но и уменьшаться при определенных условиях.

Критическая сила при длительном действии нагрузки разыскивается из условия  $b_1 = 0$  и определяется по формуле (46). Перемещения при действии нагрузки  $P = P_{\text{дл}}$  определяются по формуле

$$f(t) = f(t_0) + b_2(t-t_0) - b_2 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{\beta} e^{-\beta(t-t_0)} \cdot (t-t_0) + \left\{ \frac{b_3}{\beta} + b_2 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1}{\beta^2} + \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{\beta} \left[ f(t_0) - \frac{b_3}{\beta} \right] \right\} \left[ 1 - e^{-\beta(t-t_0)} \right] + (75) + b_3 \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - 2\beta}{2\beta^2} \left[ 1 - e^{-2\beta(t-t_0)} \right]$$

и при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно возрастают с постоянной скоростью. В силу того, что при уменьшающейся нагрузке критические силы при кратковременном и длительном загрузении могут находиться в различных соотношениях  $P_{\text{кр}} \gg P_{\text{дл}}$ , то действующая сила  $P$  должна удовлетворять условию

$$P < \min(P_{\text{кр}}; P_{\text{дл}}). \quad (76)$$

Из (74) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  перемещение  $f(\infty)$  определяется конечной величиной

$$f(\infty) = \frac{4e_0}{\pi} \cdot \frac{P}{\bar{P} - P} \quad (77)$$

Если параметр  $m$ , регулирующий уровень нагрузки, связан с характеристикой ползучести  $\varphi$  условием

$$m < \frac{\varphi}{1 + \alpha(1 + \varphi)}, \quad (78)$$

то  $P_{кр} > P_{ол}$ ,  $f(t_0) < f(\infty)$  и перемещения во времени растут, асимптотически приближаясь к величине  $f(\infty)$  (рис. 6, а).

Если

$$m > \frac{\varphi}{1 + \alpha(1 + \varphi)}; \quad (79)$$

то  $P_{кр} < P_{ол}$ ,  $f(t_0) > f(\infty)$  и перемещения во времени асимптотически уменьшаются (рис. 6, б).

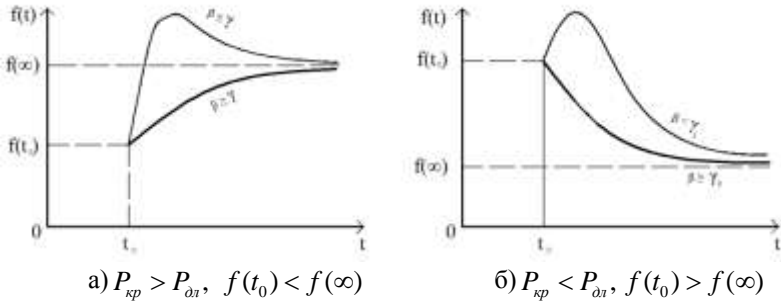


Рис. 6. Кривая амплитудных перемещений для случаев  $P_{кр} > P_{ол}$  и  $P_{кр} < P_{ол}$ .

При выполнении условия

$$m > \frac{\varphi}{1 + \alpha(1 + \varphi)}; \quad (80)$$

критические силы равны  $P_{кр} = P_{ол}$ , перемещения в начальный момент времени так же равны  $f(t_0) = f(\infty)$ .

В этом случае  $A_2 = -A_3$  и перемещения в любой момент времени определяются по формуле



$$f(t) = A_1 - \frac{mP}{P_3 - P} \cdot \frac{\gamma_1 - \beta}{b_1 - \beta} \cdot A \left[ e^{-b(t-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)} \right] -$$

$$- A_3 \left[ e^{-b(t-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)} \right] - \frac{mP}{P_3 - P} A_3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1 - 2\beta}{b_1 - \beta} \left[ e^{-b(t-t_0)} - e^{-2\beta(t-t_0)} \right] - \\ - \frac{\gamma_1 - b_1 - \beta}{\beta} \left[ e^{-b(t-t_0)} - e^{-(b_1 + \beta)(t-t_0)} \right] \end{array} \right\} \quad (81)$$

Анализ формулы (81) показывает, что после приложения нагрузки перемещения растут и достигают экстремального значения в момент времени  $t^*$  и далее убывают, асимптотически приближаясь к величине (рис. 7).

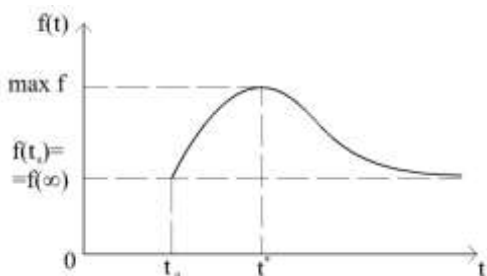


Рис. 7. Кривая амплитудных перемещений в случае  $P_{кр} = P_{ол}$ .

$$t^* = t_0 + \frac{1}{b_1 - \beta} \ln \left\{ \frac{b_1}{\beta} \left[ 1 + \frac{mP(\bar{P} - P)}{\bar{P}(P_3 - P)} \cdot \left( \frac{\gamma_1 - b_1}{\beta} - \frac{\gamma_1 - 2\beta}{b_1 - 2\beta} - 1 \right) \right] \right\} \quad (82)$$

Максимальное перемещение  $\max f$  определяется по формуле (81) после подстановки значения  $t^*$ .

## 6. Выводы

1. Для железобетонных стержней критическая сила  $P_{ол}$  при длительном действии нагрузки при всех трех режимах загрузки определяется по формуле (46).

2. Для стержня с начальной погибью критическая сила  $P_{ол}$  определяется так же, как и для стержня с внецентренно приложенной нагрузкой.

3. Значение критической силы при длительном действии нагрузки, подсчитанное согласно формулы (46) служит только верхней оценкой

несущей способности стержня, т.к. при решении задачи использовалась линейная теория и не учитывался процесс трещинообразования.

4. Критический параметр нагрузки  $P_{кр}$  при кратковременном нагружении для трех режимов определяется по формулам (35, 50, 71) соответственно.

5. Характер развития перемещений стержней существенно зависит от уровня сжимающих сил. Перемещения могут быть незатухающими и затухающими. На величины перемещений оказывают влияние размеры сечения, коэффициент армирования, величина эксцентриситета, упругие характеристики, характеристики ползучести, характер и величина нагрузки.

6. Напряженное состояние по любому поперечному сечению стержня разыскивается по формулам (15) - (19) после определения кривизн и перемещений по формулам (22, 27, 28).

7. Приведенные решения в полной мере применимы к однородному бетонному стержню. Во всех зависимостях и формулах следует принять  $\alpha = 0$ , т.к.  $\mu = 0$ ,  $A_s = 0$ .

8. Полученные решения можно использовать для расчета стержней с другими опорными закреплениями. Для этого в выражениях (27) и (28) следует вместо функции  $\sin \frac{\pi z}{l}$  использовать другие функции,

отвечающие конкретным граничным условиям.

На величины перемещений оказывают влияние размеры сечения, коэффициент армирования, величина эксцентриситета, упругие характеристики, характеристики ползучести, а также скорость ползучести и изменения величины нагрузки.

### Summary

**The values of the displacement are being influenced by sectional dimensions, reinforcement ratio, the amount of eccentricity, elastic properties, creep, and creep rate and the change of the load.**

### *Литература*

1. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968, с. 416.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.