

ВИМУШЕНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Юрій Крутій

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Об'єктом дослідження є прямий однорідний стержень постійного поперечного перерізу, довжиною l , із рівномірно розподіленою масою m , на який діє рівномірно розподілене динамічне навантаження $q(x, t) = q \sin \theta t$, де q, θ – відповідно амплітуда і частота збуджуючої сили.

Розглядаються вимушені коливання стержня з урахуванням тертя. Для зовнішнього тертя прийнято гіпотезу, згідно якої сила опору пропорційна масі стержня і швидкості [1]. Внутрішнє тертя враховується за гіпотезою Кельвіна – Фойхта [2]. За вказаних умов рівняння вимушених коливань стержня має вигляд [2]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha m \frac{\partial y}{\partial t} + \beta EI \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = q \sin \theta t, \quad (1)$$

де $y = y(x, t)$ – прогин точки осі стержня з координатою x в момент часу t , EI – згинна жорсткість стержня, α, β – коефіцієнти зовнішнього та внутрішнього тертя відповідно.

Диференціальне рівняння з частковими похідними (1) не допускає розв'язку методом розподілу змінних Фур'є. Можливо саме цією обставиною пояснюється відсутність в науковій літературі точного розв'язку даного рівняння.

Автором знайдено точний розв'язок рівняння (1). Як наслідок, для довільного поперечного перерізу стержня з координатою x отримано вирази для динамічних переміщень (прогину $y(x, t)$ і кута повороту $\phi(x, t)$) та динамічних внутрішніх зусиль (згинального моменту $M(x, t)$ і поперечної сили $Q(x, t)$). Кінцеві формули виглядають так:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x) \sin \theta t + y_2(x) \cos \theta t; & \phi(x, t) &= \phi_1(x) \sin \theta t + \phi_2(x) \cos \theta t; \\ M(x, t) &= M_1(x) \sin \theta t + M_2(x) \cos \theta t; & Q(x, t) &= Q_1(x) \sin \theta t + Q_2(x) \cos \theta t; \\ \phi_j(x) &= y'_j(x); & M_j(x) &= -EI \phi'_j(x); & Q_j(x) &= M'_j(x) \quad (j = 1, 2); \end{aligned}$$

$$y_1(x) = y_1(0) \operatorname{Re} X_1(x) + \phi_1(0)l \operatorname{Re} X_2(x) - \frac{M_1(0)l^2}{EI} \operatorname{Re} X_3(x) - \\ - \frac{Q_1(0)l^3}{EI} \operatorname{Re} X_4(x) - y_2(0) \operatorname{Im} X_1(x) - \phi_2(0)l \operatorname{Im} X_2(x) + \frac{M_2(0)l^2}{EI} \operatorname{Im} X_3(x) + \\ + \frac{Q_2(0)l^3}{EI} \operatorname{Im} X_4(x) + \frac{q}{1 + \beta^2\theta^2} \frac{l^4}{EI} (\operatorname{Re} X_5(x) + \beta\theta \operatorname{Im} X_5(x));$$

$$y_2(x) = y_2(0) \operatorname{Re} X_1(x) + \phi_2(0)l \operatorname{Re} X_2(x) - \frac{M_2(0)l^2}{EI} \operatorname{Re} X_3(x) - \\ - \frac{Q_2(0)l^3}{EI} \operatorname{Re} X_4(x) + y_1(0) \operatorname{Im} X_1(x) + \phi_1(0)l \operatorname{Im} X_2(x) - \frac{M_1(0)l^2}{EI} \operatorname{Im} X_3(x) - \\ - \frac{Q_1(0)l^3}{EI} \operatorname{Im} X_4(x) + \frac{q}{1 + \beta^2\theta^2} \frac{l^4}{EI} (\operatorname{Im} X_5(x) - \beta\theta \operatorname{Re} X_5(x));$$

$$X_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \cos k\gamma}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-1} - \\ - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \sin k\gamma}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$L = l^2 \sqrt[4]{\frac{\theta^2(\theta^2 + \alpha^2)}{1 + \beta^2\theta^2}} \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\theta} + \operatorname{arctg} \beta\theta.$$

Наведені вирази дозволяють визначати вимушені динамічні коливання та динамічні внутрішні зусилля від гармонічного навантаження, зводячи задачу при будь яких можливих закріпленнях кінців стержня до пошуку невідомих сталих інтегрування, що представлені тут у формі початкових параметрів.

1. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.: іл.

FORCED CROSS FLUCTUATIONS OF THE DIRECT CORE OF CONSTANT SECTION WITH TAKING INTO ACCOUNT OF RESISTANCE FORCES IN CASE OF HARMONIC LOADING

The compelled cross fluctuations of a direct core of constant section taking into account resistance are considered at influence of external harmonious loading. The exact solution of the corresponding differential equation of fluctuations in quotient derivativeis found. Formulas for dynamic movements and internal efforts in any section of a core are written out.