

## ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

**Фомин В.М., Фомина И.П.** (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Исследуется плоский изгиб продольно сжатой консольной железобетонной балки с учетом геометрической и физической нелинейностей и пластического поведения бетона. При этом в отличие от [2] нагружение балки не предполагается простым и поэтому для описания напряженно-деформированного состояния в бетоне вместо деформационной теории пластичности используется теория пластического течения.

Рассмотрим следующую задачу: необходимо построить график зависимости прогиба конца железобетонной консольной балки от времени (рис.1, на нем показаны положительные направления силовых факторов), если задана зависимость величин сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  от времени. Силы  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $P$  представляют собой заданную нагрузку, а  $V_i, H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – составляющие главного вектора сил, приложенных к балке левее начала  $i$ -го участка. При этом предполагается, что нагружение балки продольной силой  $P$  было произведено предварительно (до нагружения силами  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )), а изменение этих сил во времени достаточно медленное для того, чтобы можно было пренебречь инерционными эффектами, т.е. считать задачу не динамической, а квазистатической.

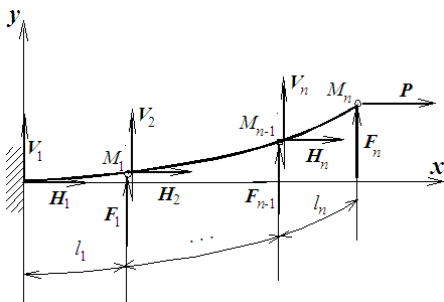


Рис.1

На начальном этапе (назовем его первым) предполагается, что силы  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) отсутствуют, а алгебраическая величина силы  $P$  убывает от нуля до некоторого максимального по модулю значения  $-P_{max}$ , которое в дальнейшем остается неизменным. Этот процесс не предполагается мо-

нотонным, поэтому для исследования напряженно-деформированного состояния будем использовать теорию пластического течения.

На каждом шаге первого этапа задаемся приращением продольной силы  $dP$ . Приращения напряжения  $\sigma_{11}$  (по поводу обозначений см. [1]) во всех точках балки равны

$$d\sigma_{11} = -\frac{dP}{S_{np}}. \quad (1)$$

Здесь  $S_{np}$  – приведенная площадь поперечного сечения балки:

$$S_{np} = S + E_a(S_1 + S_2)/E_0$$

( $S$  – площадь бетона,  $S_1$  и  $S_2$  – площади верхней и нижней арматур,  $E_0$  – начальный модуль упругости бетона,  $E_a$  – модуль упругости арматуры). Кроме того, очевидно, что

$$d\sigma_{22} = d\sigma_{12} = 0. \quad (2)$$

Будем полагать, что на первом шаге материал бетона остается линейно упругим. Тогда можно записать, что

$$d[\sigma] = [D]_e d[\varepsilon]. \quad (3)$$

Здесь  $d[\sigma] = [d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{12}]$ ,  $d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$ ,  $[D]_e$  – начальная матрица упругости. Из (3) получаем

$$d[\varepsilon] = [C]_e d[\sigma], [C]_e = [D]_e^{-1}. \quad (4)$$

Определив из (1), (2) и (4)  $d[\varepsilon]$ , полагаем на первом шаге

$$[\varepsilon] = d[\varepsilon], [\sigma] = d[\sigma].$$

На последующих шагах через найденные значения  $[\sigma]$  на предыдущем шаге определяем матрицу  $[D]_{ep}$  по формуле (8)[1], а затем вычислив  $d[\sigma]$  по формулам (1)-(2), находим  $d[\varepsilon]$ :

$$d[\varepsilon] = [C]_{ep} d[\sigma], [C]_{ep} = [D]_{ep}^{-1}. \quad (5)$$

Новые значения  $[\sigma]$  и  $[\varepsilon]$  определяются так:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]_{\text{пред}} + d[\varepsilon], [\sigma] = [\sigma]_{\text{пред}} + d[\sigma] \quad (6)$$

( $[\varepsilon]_{\text{пред}}$  и  $[\sigma]_{\text{пред}}$  – значения  $[\sigma]$  и  $[\varepsilon]$ , найденные на предыдущем шаге).

Переходим теперь к следующему (второму) этапу, на котором появляются и начинают изменяться силы  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Введем как и в [1] обозначения

$$\xi_i = \frac{H_i l_i^2}{H}, \eta_i = \frac{V_i l_i^2}{H} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Здесь  $H$  – приведенный момент инерции поперечного сечения (см. (43)[1]).

Тогда окажется, что

$$\xi_i = -\frac{P l_i^2}{H}, \eta_i = -\frac{l_1^2}{H} \sum_{k=1}^{n-i+1} F_k, d\xi_i = 0, d\eta_i = -\frac{l_1^2}{H} \sum_{k=1}^{n-i+1} dF_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

( $dF_k$  – приращение силы  $F_k$  на рассматриваемом шаге).

На каждом шаге второго этапа предполагается, что функции  $\phi(s)$  и  $\phi'(s)$ , а также  $a_k(s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $b_k(s)$  ( $k = 1, 2$ ), являющиеся коэффициентами функций  $A(s, x_2)$  и  $B(s, x_2)$  (см. (33)[1]), и векторные функции  $[\sigma](s, x_2)$  и  $[\varepsilon](s, x_2)$  уже определены на предыдущем шаге. Тогда в соответствии с формулами (30) и (31) из [1] могут быть найдены величины  $\frac{\partial F}{\partial[\sigma]}$  и  $\frac{\partial F}{\partial\chi}$ , а следовательно, и элементы матрицы  $[D]_{ep}$  для всех  $x_2$  и  $s$ .

Далее по формулам (37а), (42а) и (48а) из [1] находим значения коэффициентов матрицы-функции  $U_{i,k}(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7; k = 1, 2, \dots, 10$ ) для ряда значений  $s = s_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), а через них – значения функций  $d_i^{(j)}(s_m)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, \dots, N$ ) путем решения линейных систем уравнений (45)[1]. Теперь используя формулу (49)[1], можно вычислить значения величин  $y_j(s_m)$  ( $j = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, \dots, N$ ). Из них путем интерполяции (например, многочленом) строим функции  $Y_j(s)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), что позволяет построить коэффициенты

$$Z_1(s) = \frac{Y_1'(s) + Y_2(s)}{Y_1(s)}, Z_k(s) = \frac{Y_k'(s) - R_{k-1}(s)}{Y_1(s)} \quad (k = 2, 3, 4) \quad (9)$$

дифференциального уравнения

$$d\phi'' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi + Z_3(s)d\xi + Z_4(s)d\eta = 0 \quad (10)$$

для каждого из участков балки. В (9) через  $R_k(s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) обозначены функции

$$R_1 = -H_0(\xi \cos \phi + \eta \sin \phi), R_2 = -H_0 \sin \phi, R_3 = H_0 \cos \phi. \quad (11)$$

Граничные условия дифференциального уравнения (10) таковы:

$$d\phi(0) = 0, d\phi'(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что функция  $d\eta(s)$  терпит разрыв в точках  $s_i = \sum_{k=1}^i l_k$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), то для облегчения решения уравнения (10) его можно представить как систему дифференциальных уравнений, заданных на участках  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; s_0 = 0$ ) с добавлением граничных условий, выражающих непрерывность  $d\phi$  и  $d\phi'$  в точках  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). С помощью достаточно простой подстановки эти уравнения могут быть приведены к отрезку  $[0, 1]$ . В результате решения получаем функции  $d\phi(s)$  и  $d\phi'(s)$ . С помощью формулы

$$dv(s) = \int_0^s \sin d\phi(x) dx \quad (13)$$

можно определить приращение прогиба балки при любом  $s$ .

Далее из (46)[1] находим

$$\begin{aligned} da_1 &= d_1^{(1)} d\phi' + d_1^{(2)} d\phi + d_1^{(3)} d\xi + d_1^{(4)} d\eta, \\ da_2 &= d_2^{(1)} d\phi' + d_2^{(2)} d\phi + d_2^{(3)} d\xi + d_2^{(4)} d\eta, \\ da_3 &= d_3^{(1)} d\phi' + d_3^{(2)} d\phi + d_3^{(3)} d\xi + d_4^{(4)} d\eta, \\ db_1 &= d_4^{(1)} d\phi' + d_4^{(2)} d\phi + d_4^{(3)} d\xi + d_4^{(4)} d\eta, \\ db_2 &= d_5^{(1)} d\phi' + d_5^{(2)} d\phi + d_5^{(3)} d\xi + d_5^{(4)} d\eta, \\ d\varepsilon_s &= d_6^{(1)} d\phi' + d_6^{(2)} d\phi + d_6^{(3)} d\xi + d_6^{(4)} d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Затем из (34)[1] определяем  $dA$ ,  $dA_2$ ,  $dB$ ,  $dB_2$ ,  $d\varepsilon_{11}$ ,  $d\varepsilon_{22}$ ,  $d\varepsilon_{12}$ , а из (36)[1]  $d\sigma_{11}$ ,  $d\sigma_{22}$ ,  $d\sigma_{12}$ . Осталось определить новые значения  $\phi(s)$ ,  $\phi'(s)$ ,  $v(s)$ ,  $a_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $b_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\varepsilon_{11}(s, x_2)$ ,  $\varepsilon_{22}(s, x_2)$ ,  $\varepsilon_{12}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{11}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{22}(s, x_2)$ ,  $\sigma_{12}(s, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{пред}} + d\phi, \quad \phi' = \phi'_{\text{пред}} + d\phi', \quad v = v_{\text{пред}} + dv, \\ a_i &= a_{i,\text{пред}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad b_i = b_{i,\text{пред}} \quad (i = 1, 2), \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11,\text{пред}} + d\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22,\text{пред}} + d\varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{\text{пред}} + d\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11,\text{пред}} + d\sigma_{11}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22,\text{пред}} + d\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12,\text{пред}} + d\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (15)$$

Индекс «пред» означает, что это значение соответствующей величины, определенное в конце предыдущего шага.

Таким образом, рассматриваемый шаг завершен и можно переходить к следующему.

**Пример 1.** Пусть  $n = 1$ ,  $l_1 = 8$  м,  $F_1(t) = 14,67 \sin(2\pi t/T)$  кН,  $T = 10$  с.

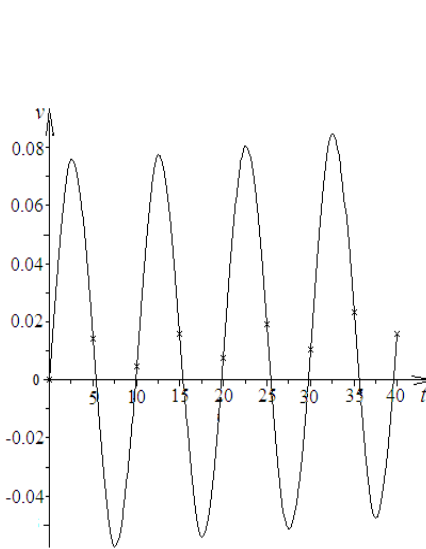


Рис.2

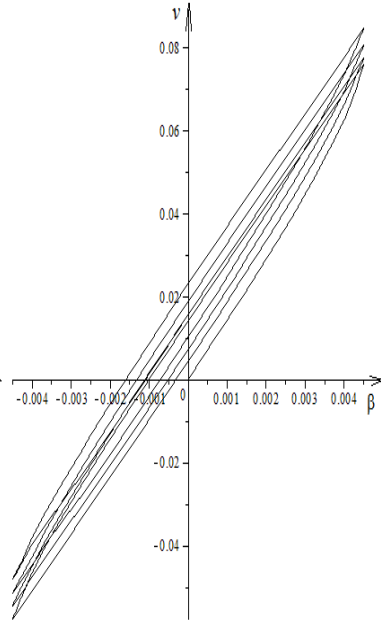


Рис.3

Размеры поперечного сечения и характеристики бетона и арматуры приняты такими же, как и в [2]:  $b = 0.8$  м,  $h = 0.28$  м, армирование симметричное:  $S_1 = S_2 = 18,5 \text{ см}^2$ ; арматура: сталь марки А-III; бетон:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4$  МПа,  $R_c = 19$  МПа,  $R_p = 1,9$  МПа,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ . Продольная сила  $P = -490,5$  кН. Примем шаг вычислений по времени  $dt = 0,25$  с. Тогда  $dF_1 = F_1(t + dt) - F_1(t) \approx 2,934\pi \cos(0,2\pi t) dt$ . Далее следуем алгоритму, изложенному выше. На рис.2 представлен график изменения  $v(l_1)$  в зависимости от времени в течение первых 40 секунд. Заметно накопление остаточных деформаций: нейтральная форма оси балки (т.е. соответствующая  $F_1(t_k) = 0$ ,  $t_k = kT/2$ ,  $k = 0,1,2,\dots$ ) с течением времени перестает быть прямолинейной, так как  $v(l_1) > 0$  при  $t = t_k$  (на рис.2 эти значения  $v(l_1)$  помечены звездочкой). На рис.3 показан график зависимости прогиба на конце консоли  $v(l_1)$  от изменения параметра  $\beta$  (т.е. от изменения силы  $F_1$ ). На нем также заметно накопление остаточных деформаций с течением времени.

**Пример 2.** Пусть теперь  $n = 2$ ,  $l_1 = 0,4\text{м}$ ,  $l_2 = 0,4\text{м}$ ,  $F_1(t) = 9,777 \times \sin(2\pi t / T_1)\text{кН}$ ,  $T_1 = 20\text{с}$ ,  $F_2(t) = 9,777 \sin(2\pi t / T_2)\text{кН}$ ,  $T_2 = 10\text{с}$ .

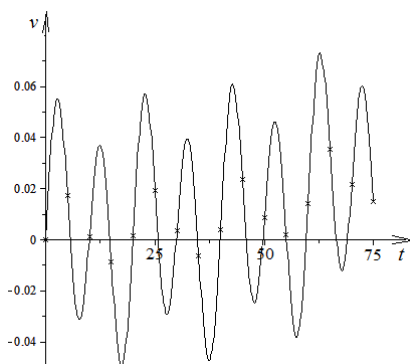


Рис.4

Размеры поперечного сечения и характеристики бетона и арматуры те же, что и в предыдущем примере. На рис. 4 приведен график зависимости  $v(l)$  ( $l = l_1 + l_2$ ) от времени. По положению звездочек (а они означают то же, что и в предыдущем примере) можно судить о постепенном накоплении остаточных изгибных деформаций.

### **Вывод**

На основе дифференциального уравнения плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки, выведенного в [1], построен алгоритм исследования квазистатического изгиба консольной балки под действием нагрузки, периодически зависящей от времени. Замечен эффект постепенного накопления остаточных изгибных деформаций.

### **Summary**

**On the basis of differential equation, derived in [1], an algorithm of investigation of quasi-static bending of a cantilever RC beam, caused by periodically depending on time loading, is being constructed. The effect of step-by-step accumulation of plastic bending strain is detected.**

### **Литература**

1. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.42, – Одесса, 2011. – с..

2. Фомин В.М. Определение прогибов железобетонной консольной балки при учете пластичности бетона // Вісник ОДАБА. Вып.41, – Одесса, 2011. – с. 312 – 317.