

## УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

Нелинейной теории изгиба стержней посвящено большое количество работ, однако только в немногих из них учитываются одновременно физическая и геометрическая нелинейности (см., например, [1]). При этом в [1] теория излагается для некоторых условных материалов («стандартный материал  $n$ -го порядка», материал Джона и т.д.) и поэтому предложенные там методы трудно применить в инженерной практике. В настоящей статье физически и геометрически нелинейная теория изгиба строится для стержней, выполненных из реальных материалов – бетона, стали и т.д., и даже из армированных материалов (например, железобетона). Предполагается, что нелинейность сравнительно мала, что позволяет применить метод малого параметра. Кроме того, учитывается, что элементы конструкций, для которых строится теория, обладают достаточной жесткостью, что делает возможным сделать ряд упрощающих допущений.

1. Рассмотрим деформацию стержня постоянного прямоугольного поперечного сечения, подверженного действию сил, лежащих в одной из

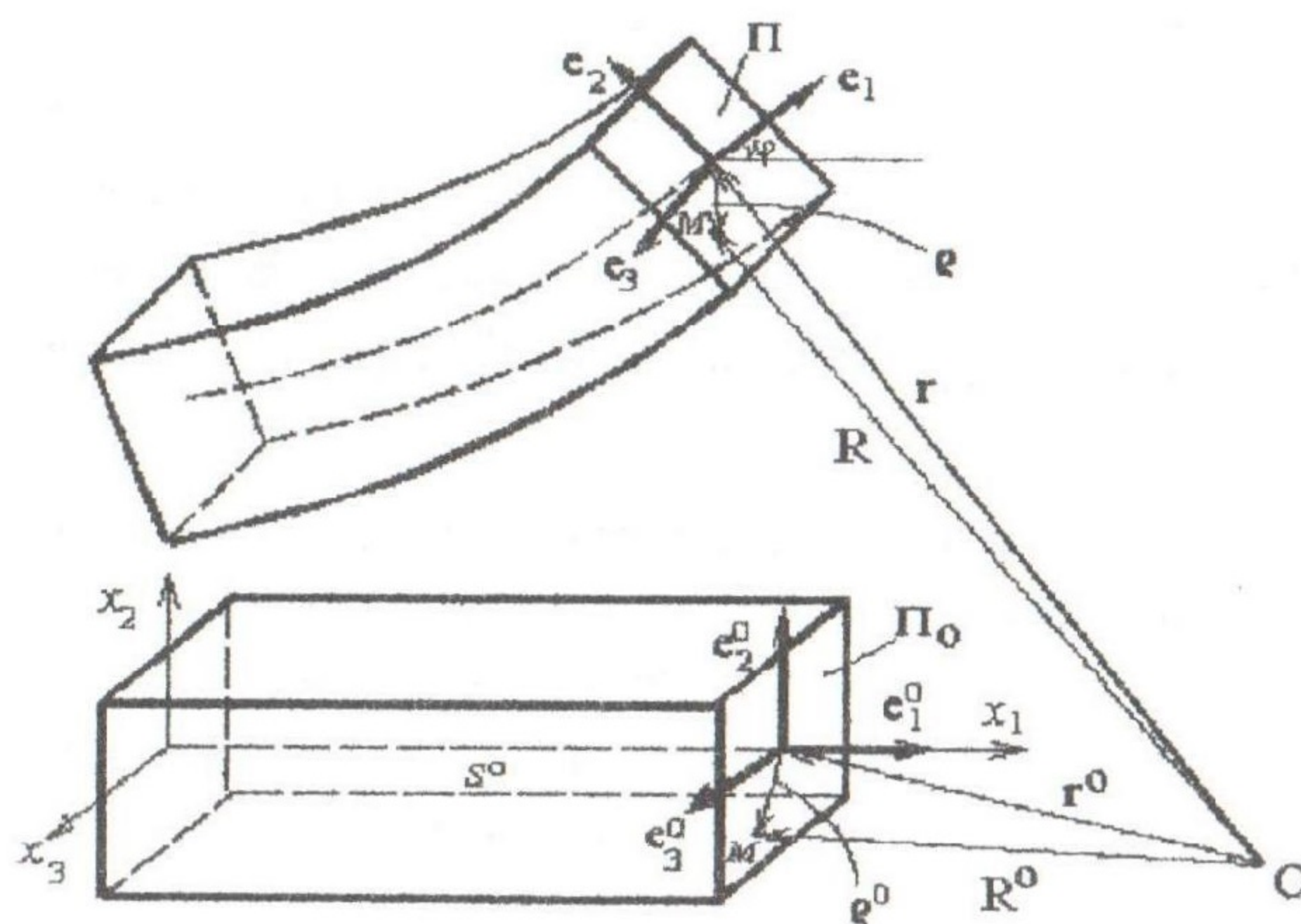


Рис.1

плоскостей симметрии его поперечного сечения. В этом случае стержень будет испытывать не только поперечный изгиб, но и продольную деформацию растяжения или сжатия. Элементы строительных конструкций, такие



как балки или колонны, являются стержнями. Придерживаясь строительной терминологии, будем в дальнейшем изложении называть стержень балкой, хотя, конечно, все изложенное в равной мере относится и к колоннам.

Предположим сначала, что балка выполнена из некоторого условно однородного материала, например, из бетона или стали. Выберем в недеформированном состоянии балки систему координат  $x_1, x_2, x_3$  так, как показано на рис. 1, причем ось  $x_1$  направим вдоль оси балки (т.е. через центры тяжести поперечных сечений). Выберем материальную точку  $M$  балки, положение которой в недеформированном состоянии определяется тремя материальными координатами  $x_1, x_2, x_3$ . Радиус-вектор  $\mathbf{R}^0$  точки  $M$  может быть представлен так:

$$\mathbf{R}^0(s^0, x_2, x_3) = \mathbf{r}^0(s^0) + \varrho^0(x_2, x_3), \quad \varrho^0(x_2, x_3) = x_2 \mathbf{e}_2^0 + x_3 \mathbf{e}_3^0 \quad (1.1)$$

где  $s^0$  - длина недеформированного отрезка оси балки между поперечным сечением  $\Pi^0$ , содержащим точку  $M$ , и левым концом балки (т.е.  $s^0$  равно координате  $x_1$  точки  $M$ );  $\mathbf{r}(s^0)$  - радиус-вектор центра тяжести сечения  $K$ ;  $\mathbf{e}_2^0$  и  $\mathbf{e}_3^0$  - два взаимно перпендикулярных орта в плоскости  $\Pi^0$ , причем  $\mathbf{e}_2^0$  лежит в плоскости изгиба, а  $\mathbf{e}_3^0$  перпендикулярен этой плоскости.

Положение точки  $M$  после деформации определим при помощи ее радиус-вектора  $\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3)$  следующим образом:

$$\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3) = \mathbf{r}(s^0) + \varrho(x_2, x_3), \quad \varrho(x_2, x_3) = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{r}(s^0)$  - радиус-вектор точки  $K$  после деформации;  $A, B$  и  $C$  - скалярные функции координат  $x_2$  и  $x_3$ ;  $\mathbf{e}_1$  - единичный вектор касательной к деформированной оси балки в точке  $K$ ;  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  - два взаимно перпендикулярных орта в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{e}_1$ , проведенные аналогично векторам  $\mathbf{e}_2^0$  и  $\mathbf{e}_3^0$ . При этом, очевидно, что  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^0$ .

Из (2) следует, что выполнение гипотезы плоских сечений не предполагается, т.к. первое слагаемое в правой части формулы для  $\varrho(x_2, x_3)$  дает смещение точки  $M$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $\Pi$ , т.е. представляет депланацию сечения. Пренебрежем деформацией балки в направлении вектора  $\mathbf{e}_3^0$ . Тогда функции  $A$  и  $B$  будут функциями только координаты  $x_2$ , т.е.



$$A \equiv A(x_2), \quad B \equiv B(x_2), \quad C \equiv x_3^0 \quad (1.3)$$

Построим тензор  $\mathbf{F}$ , именуемый в [1] *градиентом движения*, пользуясь диадным представлением его как двойного тензора

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^0 \quad (1.4)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i^0}, \quad \mathbf{R}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial x_i^0} \quad (1.5)$$

Разложим векторы  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}_i^0$  по векторам базисов  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $\mathbf{e}_k^0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) соответственно:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{R}_i^0 = \sum_{k=1}^3 R_{ik}^0 \mathbf{e}_k^0 \quad (1.6)$$

Кроме того, разложим векторы  $\mathbf{e}_k^0$  по векторам базиса  $\mathbf{e}_j$  ( $m = 1, 2, 3$ )

$$\mathbf{e}_k^0 = \sum_{m=1}^3 \alpha_{km} \mathbf{e}_m \quad (1.7)$$

Подставив (1.6) и (1.7) в (1.4), будем иметь

$$\mathbf{F} = \sum_{m,l=1}^3 F_{ml} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l, \quad F_{ml} = \sum_{i,k=1}^3 \alpha_{km} R_{ik} R_{il}^0 \quad (1.8)$$

Учитывая, что  $\frac{d\mathbf{r}^0}{ds^0} = \mathbf{e}_1^0$ , из (1.1) получаем

$$R_{ik}^0 = 0 \quad (i \neq k), \quad R_{ii}^0 = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.9)$$

Принимая во внимание, что [1]

$$\frac{d}{ds^0} = \lambda_s \frac{d}{ds} \quad (\lambda_s = \frac{ds}{ds^0}), \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \varphi' \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\varphi' \mathbf{e}_1 \quad (\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}) \quad (1.10)$$

находим из (1.2), что

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_s [(1 - B\varphi') \mathbf{e}_1 + A\varphi' \mathbf{e}_2], \quad \mathbf{R}_2 = A_2 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (1.11)$$

где  $A_2 = dA/dx_2^0$ ,  $B_2 = dB/dx_2^0$ ,  $\varphi$  - угол между  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_1^0$ . Заметим, что  $\lambda_s$  называется *кратностью удлинения оси стержня* [1] и характеризует степень удлинения или сжатия оси стержня в данном сечении. Из (1.11) получаем



$$R_{11} = \lambda_s(1 - B\varphi'), R_{12} = \lambda_s A\varphi', R_{21} = A_2, R_{22} = B_2, R_{33} = 1 \quad (1.12)$$

а остальные коэффициенты  $R_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\alpha_{11} = \cos \varphi, \alpha_{12} = -\sin \varphi, \alpha_{21} = \sin \varphi, \alpha_{22} = \cos \varphi, \alpha_{33} = 1 \quad (1.13)$$

а остальные  $\alpha_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Подставляя (1.10), (1.12) и (1.13) в (1.8), находим

$$\begin{aligned} F_{11} &= \lambda_s[(1 - B\varphi') \cos \varphi + A\varphi' \sin \varphi], F_{12} = A_2 \cos \varphi + B_2 \sin \varphi, \\ F_{21} &= \lambda_s[-(1 - B\varphi') \sin \varphi + A\varphi' \cos \varphi], F_{22} = -A_2 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi \\ F_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Остальные величины  $F_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Используя формулы [1]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) - \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^*) \quad (1.15)$$

( $\mathbf{F}^*$  - тензор, сопряженный тензору  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{I}$  - единичный тензор) получаем тензоры линейных деформаций и вращения. С их помощью определяются элементы тензора конечных деформаций  $\mathbf{D}$  [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= e_{ii} + \frac{1}{2}[e_{ii}^2 + (e_{ik} - \omega_{ik})^2 + (e_{im} - \omega_{im})^2] \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{1}{2}[e_{ii}(e_{ij} + \omega_{ij}) + e_{jj}(e_{ij} - \omega_{ij}) + (e_{ik} - \omega_{ik})(e_{jk} - \omega_{jk})] \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$(i < j, k \neq i, m \neq i, m \neq k, k \neq j)$$

( $e_{ij}$  - элементы тензора линейных деформаций,  $\omega_{ij}$  - элементы тензора вращения). Из (1.14) - (1.16) получаем

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_s^2 - 1 - 2\lambda_s^2 B\varphi'), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(A_2^2 + B_2^2 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\lambda_s A_2 \quad (1.17)$$

(остальные элементы тензора конечных деформаций  $\mathbf{D}$  равны нулю). При выводе (1.17) и в дальнейшем будем полагать, что слагаемыми, содержащими выражения типа  $(x_2\varphi')^2$  можно пренебречь, так как радиус кривизны оси балки значительно больше размеров ее поперечного сечения.

2. Будем полагать, что нагружение материала балки является простым [3]. Тогда закон зависимости между напряжениями и деформациями может быть записан в следующем виде:

$$\sigma_0 = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \quad T_1 = 2G\varrho(\gamma_0)D_1 \quad (2.1)$$



Здесь  $K$  - начальный модуль объемного сжатия материала балки (т.е. значение этого модуля при линейно упругой деформации материала),  $G$  - начальный модуль сдвига,  $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  - величина среднего напряжения ( $\sigma_{ii}$  - элементы тензора напряжений,  $i = 1, 2, 3$ ).

Далее,  $\epsilon_0 = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})/3$  - величина среднего удлинения,  $\gamma_0 = \frac{2}{3} [\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 - \epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{22}\epsilon_{33} - \epsilon_{33}\epsilon_{11} + 3(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)]^{1/2}$  - ок-

таэдрическая деформация сдвига,  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T} - \sigma_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{I}$  - девиаторы тензоров напряжений  $\mathbf{T}$  и деформаций  $\mathbf{D}$  соответственно. Функции  $\kappa(\epsilon_0)$  и  $\varrho(\gamma_0)$  характеризуют нелинейно-упругое поведение материала, причем  $\kappa(0) = \varrho(0) = 1$ . Заметим, что при  $\kappa(\epsilon_0) \equiv \varrho(\gamma_0) \equiv 1$  (2.1) переходит в обычный закон Гука для изотропных материалов. Будем полагать, что возникающие деформации материала таковы, что отклонение соотношения (2.1) от закона Гука не очень велико. Тогда функции  $\kappa(\epsilon_0)$  и  $\varrho(\gamma_0)$  можно представить в следующем виде:

$$\kappa(\epsilon_0) = 1 + \mu \kappa_\mu(\epsilon_0), \quad \varrho(\gamma_0) = 1 + \mu \varrho_\mu(\gamma_0) \quad (2.2)$$

где  $\mu$  - малый параметр,  $\kappa_\mu(x)$  и  $\varrho_\mu(x)$  - непрерывные функции, причем  $\kappa_\mu(0) = \varrho_\mu(0) = 0$ . Тогда равенства (2.1) можно представить так

$$\sigma_0 = 3K[1 + \mu \kappa_\mu(\epsilon_0)]\epsilon_0, \quad \mathbf{T}_1 = 2G[1 + \mu \varrho_\mu(\gamma_0)]\mathbf{D}_1 \quad (2.3)$$

Будем разыскивать элементы тензоров напряжений и деформаций в виде следующих асимптотических разложений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n \mu^k \sigma_{ij}^{[k]}, \quad \epsilon_{ij} = \sum_{k=0}^n \mu^k \epsilon_{ij}^{[k]} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

(разложения, стоящие в правых частях этих формул, называются  $n$ -ым приближением  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}$ ).

Тогда и  $\sigma_0, \epsilon_0, \gamma_0, \mathbf{T}_1$  и  $\mathbf{D}_1$  могут быть представлены так же

$$\sigma_0 = \sum_{k=0}^n \mu^k \sigma_0^{[k]}, \quad \epsilon_0 = \sum_{k=0}^n \mu^k \epsilon_0^{[k]}, \quad \gamma_0 = \sum_{k=0}^n \mu^k \gamma_0^{[k]}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{T}_1^{[k]}, \quad \mathbf{D}_1 = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{D}_1^{[k]}$$

Полагая, что функции  $\kappa_\mu(x)$  и  $\varrho_\mu(x)$  бесконечно дифференцируемы (если это не так, то их можно аппроксимировать с любой степенью



точности бесконечно дифференцируемыми функциями), можно записать

$$\kappa_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_{\mu}^{(m)}(\varepsilon_0^{[0]})}{m!} x^m, \quad \varrho_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho_{\mu}^{(m)}(\varepsilon_0^{[0]})}{m!} x^m \quad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) вместо  $x$  выражение  $x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_0^{[k]} \mu^k$ , получим разложение  $\kappa_{\mu}(\varepsilon_0)$  по степеням  $\mu$ :

$$\kappa_{\mu}(\varepsilon_0) = \sum_{k=0}^n \mu^k \kappa_{\mu}^{[k]}(\varepsilon_0) \quad (2.7)$$

Например,  $\kappa_{\mu}^{[0]}(\varepsilon_0) = \kappa_{\mu}(\varepsilon_0^{[0]})$ ,  $\kappa_{\mu}^{[1]}(\varepsilon_0) = \kappa_{\mu}'(\varepsilon_0^{[0]})\varepsilon_0^{[1]}$ .

Аналогично можно получить выражения и для  $\varrho_{\mu}(\gamma_0)$ :

$$\varrho_{\mu}(\gamma_0) = \sum_{k=0}^n \mu^k \varrho_{\mu}^{[k]}(\gamma_0) \quad (2.8)$$

Причем  $\varrho_{\mu}^{[0]}(\gamma_0) = \varrho_{\mu}(\gamma_0^{[0]})$ ,  $\varrho_{\mu}^{[1]}(\gamma_0) = \varrho_{\mu}'(\gamma_0^{[0]})\gamma_0^{[1]}$ .

Тогда (2.3) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_0 = 3K[1 + \sum_{k=0}^n \mu^{k+1} \kappa_{\mu}^{[k]}(\varepsilon_0)]\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{T}_1 = 2G[1 + \sum_{k=0}^n \mu^{k+1} \varrho_{\mu}^{[k]}(\gamma_0)]\mathbf{D}_1 \quad (2.9)$$

Подставляя (2.5) в (2.9), будем иметь для первых двух членов разложения

$$\begin{aligned} \sigma_0^{[0]} &= 3K\varepsilon_0^{[0]}, \quad \mathbf{T}_1^{[0]} = 2GD_1^{[0]}, \\ \sigma_0^{[1]} &= 3(K\varepsilon_0^{[1]} + K^{[1]}\varepsilon_0^{[0]}), \quad \mathbf{T}_1^{[1]} = 2(GD_1^{[1]} + G^{[1]}D_1^{[0]}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $K^{[1]} = K\kappa_{\mu}^{[0]}(\varepsilon_0)$ ,  $G^{[1]} = G\varrho_{\mu}^{[0]}(\gamma_0)$ . Из первой строки (2.10) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{[0]} + \sigma_{22}^{[0]} + \sigma_{33}^{[0]} &= 3K(\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]}) \\ 2\sigma_{11}^{[0]} - \sigma_{22}^{[0]} - \sigma_{33}^{[0]} &= 2G(2\varepsilon_{11}^{[0]} - \varepsilon_{22}^{[0]}) \\ -\sigma_{11}^{[0]} + 2\sigma_{22}^{[0]} - \sigma_{33}^{[0]} &= 2G(-\varepsilon_{11}^{[0]} + 2\varepsilon_{22}^{[0]}) \\ -\sigma_{11}^{[0]} - \sigma_{22}^{[0]} + 2\sigma_{33}^{[0]} &= -2G(\varepsilon_{11}^{[0]} + \varepsilon_{22}^{[0]}) \\ \sigma_{13}^{[0]} = \sigma_{31}^{[0]} = \sigma_{23}^{[0]} = \sigma_{32}^{[0]} &= 0, \quad \sigma_{12}^{[0]} = \sigma_{21}^{[0]} = 2G\varepsilon_{12}^{[0]} \end{aligned} \quad (2.11a)$$

а из второй



$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{[1]} + \sigma_{22}^{[1]} + \sigma_{33}^{[1]} &= 3[K(\epsilon_{11}^{[1]} + \epsilon_{22}^{[1]}) + K^{[1]}(\epsilon_0)(\epsilon_{11}^{[0]} + \epsilon_{22}^{[0]})] \\
2\sigma_{11}^{[1]} - \sigma_{22}^{[1]} - \sigma_{33}^{[1]} &= 2[G(2\epsilon_{11}^{[1]} - \epsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\psi_0)(2\epsilon_{11}^{[0]} - \epsilon_{22}^{[0]})] \\
-\sigma_{11}^{[1]} + 2\sigma_{22}^{[1]} - \sigma_{33}^{[1]} &= 2[G(-\epsilon_{11}^{[1]} + 2\epsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\psi_0)(-\epsilon_{11}^{[0]} + 2\epsilon_{22}^{[0]})] \quad (2.116) \\
-\sigma_{11}^{[1]} - \sigma_{22}^{[1]} + 2\sigma_{33}^{[1]} &= -2[G(\epsilon_{11}^{[1]} + \epsilon_{22}^{[1]}) + G^{[1]}(\psi_0)(\epsilon_{11}^{[0]} + \epsilon_{22}^{[0]})] \\
\sigma_{13}^{[1]} = \sigma_{31}^{[1]} = \sigma_{23}^{[1]} = \sigma_{32}^{[1]} &= 0, \quad \sigma_{12}^{[1]} = \sigma_{21}^{[1]} = 2[G\epsilon_{12}^{[1]} + G^{[1]}(\epsilon_0)\epsilon_{12}^{[0]}]
\end{aligned}$$

Из (2.11а) и (2.11б) находим

$$\sigma_{11}^{[0]} = K_1^{[0]}\epsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[0]}\epsilon_{22}^{[0]}, \quad \sigma_{22}^{[0]} = K_2^{[0]}\epsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\epsilon_{22}^{[0]}, \quad \sigma_{12}^{[0]} = 2G^{[0]}\epsilon_{12}^{[0]} \quad (2.12a)$$

где  $K_1^{[0]} = (3K + 4G)/3$ ,  $K_2^{[0]} = (3K - 2G)/3$ ,  $G^{[0]} = G$ .

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{[1]} &= K_1^{[0]}\epsilon_{11}^{[1]} + K_2^{[0]}\epsilon_{22}^{[1]} + K_1^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0)\epsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0)\epsilon_{22}^{[0]} \\
\sigma_{22}^{[1]} &= K_1^{[0]}\epsilon_{22}^{[1]} + K_2^{[0]}\epsilon_{11}^{[1]} + K_1^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0)\epsilon_{22}^{[0]} + K_2^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0)\epsilon_{11}^{[0]} \quad (2.126) \\
\sigma_{12}^{[1]} &= 2G^{[0]}\epsilon_{12}^{[1]} + 2G^{[1]}(\psi_0)\epsilon_{12}^{[0]}
\end{aligned}$$

где  $K_1^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0) = [3K^{[1]}(\epsilon_0) + 4G^{[1]}(\gamma_0)]/3$ ,  $K_2^{[1]}(\epsilon_0, \gamma_0) = [3K^{[1]}(\epsilon_0) - 2G^{[1]}(\gamma_0)]/3$ . Представим функции  $A(x_2)$  и  $B(x_2)$  из (1.3), а также угол поворота сечения  $\varphi$  и кратность удлинения оси стержня  $\lambda_s$  в виде асимптотических разложений по степеням  $\mu$ :

$$A = \sum_{k=0}^n \mu^k A^{[k]}, \quad B = \sum_{k=0}^n \mu^k B^{[k]}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^n \mu^k \varphi^{[k]}, \quad \lambda_s = \sum_{k=0}^n \mu^k \lambda_s^{[k]} \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) в (1.19), будем иметь для первых двух членов разложения (2.4)

$$\epsilon_{11}^{[0]} = \frac{1}{2}[(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2 B^{[0]} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}] \quad (2.15a)$$

$$\epsilon_{22}^{[0]} = \frac{1}{2}[(A_2^{[0]})^2 + (B_2^{[0]})^2 - 1], \quad \epsilon_{12}^{[0]} = \frac{1}{2}\lambda_s^{[0]}A_2^{[0]}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11}^{[1]} &= \lambda_s^{[0]}\lambda_s^{[1]} - [(\lambda_s^{[0]})^2 B^{[0]} \frac{d\varphi^{[1]}}{ds} + (\lambda_s^{[0]})^2 B^{[1]} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} + \\
&+ 2\lambda_s^{[0]}\lambda_s^{[1]}B^{[0]} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}] \quad (2.156)
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{22}^{[1]} = \frac{1}{2}(A_2^{[0]}A_2^{[1]} + B_2^{[0]}B_2^{[1]}), \quad \epsilon_{12}^{[1]} = \frac{1}{2}(\lambda_s^{[0]}\lambda_s^{[1]}A_2^{[1]} + \lambda_s^{[1]}\lambda_s^{[0]}A_2^{[0]})$$



Здесь  $A_2^{[k]}(x_2) = \frac{dA^{[k]}(x_2)}{dx_2}$ ,  $B_2^{[k]}(x_2) = \frac{dB^{[k]}(x_2)}{dx_2}$  ( $k = 0, 1$ ).

3. Будем разыскивать функции  $A^{[k]}$  и  $B^{[k]}$  ( $k = 0, 1$ ) в следующем виде:

$$A^{[k]} = a_1^{[k]}x_2 + a_2^{[k]}x_2^2 + a_3^{[k]}x_2^3, \quad B^{[k]} = b_1^{[k]}x_2 + b_2^{[k]}x_2^2 \quad (3.1)$$

Тогда

$$A_2^{[k]} = \frac{dA^{[k]}}{dx_2} = a_1^{[k]} + 2a_2^{[k]}x_2 + 3a_3^{[k]}x_2^2, \quad B_2^{[k]} = \frac{dB^{[k]}}{dx_2} = b_1^{[k]} + 2b_2^{[k]}x_2$$

Касательные напряжения на верхней и нижней гранях равны нулю:

$$\sigma_{12} = 0 \quad \left(x_2 = \pm \frac{h}{2}, \quad h \text{ -высота поперечного сечения}\right) \quad (3.2)$$

Это означает, что  $\varepsilon_{12}^{[0]} = 0$  при  $x_2 = \pm \frac{h}{2}$ . Из (2.15) и (3.1) находим:

$$a_1^{[0]} + 2a_2^{[0]}x_2 + 3a_3^{[0]}x_2^2 = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (3.3)$$

откуда следует, что

$$a_2^{[0]} = 0, \quad a_1^{[0]} = -\frac{3}{4}h^2 a_3^{[0]}, \quad A^{[0]} = -a_3^{[0]}d(x_2), \quad d(x_2) = \frac{3}{4}h^2 x_2 - x_2^3, \quad (3.4)$$

$$A_2^{[0]} = -a_3^{[0]}d_2(x_2), \quad d_2(x_2) = \frac{3}{4}h^2 - 3x_2^2, \quad \varepsilon_{12}^{[0]} = -\frac{1}{2}\lambda_s^{[0]}a_3^{[0]}d_2(x_2)$$

Нормальные напряжения на верхней и нижней гранях равны нулю:

$$\sigma_{22} = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (3.5)$$

Из (2.12) получаем

$$K_2^{[0]}\varepsilon_{11}^{[0]} + K_1^{[0]}\varepsilon_{22}^{[0]} = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (3.6)$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{K_2^{[0]}}{2} [(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2 (b_1^{[0]}x_2 + b_2^{[0]}x_2^2) \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}] + \\ & + \frac{K_1^{[0]}}{2} [(b_1^{[k]} + 2b_2^{[k]}x_2)^2 - 1] = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пренебрегая слагаемыми, содержащими  $(\frac{d\varphi^{[0]}}{ds})^2$ , находим из (3.7)



$$b_2^{[0]} = \frac{K_2^{[0]} (\lambda_s^{[0]})^2}{2K_1^{[0]}} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}, \quad b_1^{[0]} = \left[1 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} [1 - (\lambda_s^{[0]})^2]\right]^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{11}^{[0]} = \frac{1}{2} [(\lambda_s^{[0]})^2 - 1 - 2(\lambda_s^{[0]})^2 b_1^{[0]} x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}]$$

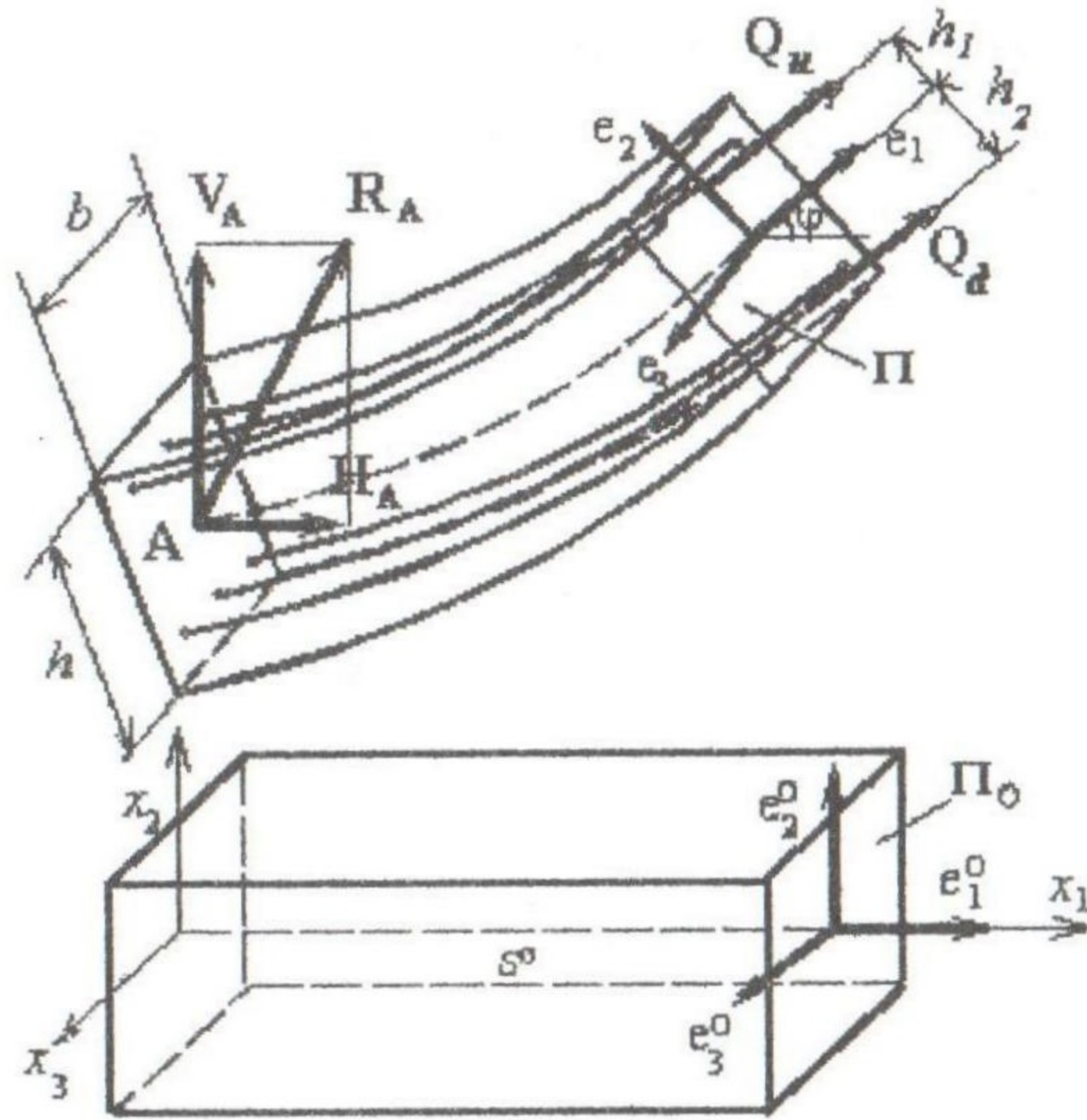


Рис. 2

Введем обозначение

$$\epsilon_s = \lambda_s - 1 \quad (3.9)$$

Легко видеть, что  $\epsilon_s$  - продольная относительная деформация балки. Из (3.9) вытекают следующие формулы для коэффициентов разложения  $\epsilon_s$ :

$$\epsilon_s^{[0]} = \lambda_s^{[0]} - 1, \quad \epsilon_s^{[k]} = \lambda_s^{[k]} \quad (k > 0) \quad (3.10)$$

Учитывая высокую продольную жесткость элементов строительных конструкций, т.е. полагая  $\epsilon_s \ll 1$ , можем записать

$$\lambda_s^{[0]} = 1 + \epsilon_s^{[0]}, \quad (\lambda_s^{[0]})^2 = 1 + 2\epsilon_s^{[0]}, \quad b_1^{[0]} = 1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \epsilon_s^{[0]}, \quad b_2^{[0]} = \frac{K_2^{[0]}}{2K_1^{[0]}} \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}$$

$$\epsilon_{11}^{[0]} = \epsilon_s^{[0]} - b_1^{[0]} x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}, \quad \epsilon_{22}^{[0]} = \frac{1}{2} [(a_3^{[0]})^2 d_2^2 + 2 \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} (\frac{d\varphi^{[0]}}{ds} x_2 - \epsilon_s^{[0]})]$$

$$\sigma_{11}^{[0]} = E_1^{[0]} (\epsilon_s^{[0]} - x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2, \quad \sigma_{22}^{[0]} = \frac{K_1^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2$$

$$\sigma_{33}^{[0]} = E_2^{[0]} (\epsilon_s^{[0]} - x_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}) + \frac{K_2^{[0]}}{2} (a_3^{[0]})^2 d_2^2, \quad \sigma_{12}^{[0]} = -Ga_3^{[0]} d_2(x_2)$$

$$E_1^{[0]} = K_1^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}, \quad E_2^{[0]} = K_2^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}} \quad (3.11)$$

Предположим, что балка армирована. Тогда главный вектор  $\mathbf{Q}$  внутренних усилий в сечении  $\Pi$  равен



$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{Q}_b$  - главный вектор внутренних усилий в бетоне,  $\mathbf{Q}_u$  и  $\mathbf{Q}_d$  - усилия в верхней и нижней арматуре соответственно (рис.2). Из условия равновесия участка  $AK$  балки имеем

$$\mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{R}_A \quad (3.13)$$

( $\mathbf{R}_A$  - сила, приложенная к левому концу балки).

Если балка статически неопределима, то ее опорные реакции зависят от упругих свойств материала. Тогда  $\mathbf{R}_A$ , а также ее горизонтальная  $\mathbf{H}_A$  и вертикальная  $\mathbf{V}_A$  составляющие тоже могут быть представлены в виде асимптотических разложений по степеням  $\mu$ :

$$\mathbf{R}_A = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{R}_A^{[k]}, \quad \mathbf{H}_A = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{H}_A^{[k]}, \quad \mathbf{V}_A = \sum_{k=0}^n \mu^k \mathbf{V}_A^{[k]} \quad (3.14)$$

Если же балка статически определима, то  $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A^{[0]}$ ,  $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_A^{[0]}$ ,  $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A^{[0]}$ . Заметим, что во втором приближении вектор  $\mathbf{R}_A = \mathbf{H}_A + \mathbf{V}_A$  и угол  $\varphi$  представляются так:

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A^{[0]} + \mu \mathbf{R}_A^{[1]} = \mathbf{H}_A^{[0]} + \mathbf{V}_A^{[0]} + \mu(\mathbf{H}_A^{[1]} + \mathbf{V}_A^{[1]}), \quad \varphi = \varphi^{[0]} + \mu \varphi^{[1]} \quad (3.15)$$

Тогда проекция вектора  $\mathbf{R}_A$  на направление вектора  $\mathbf{e}_2$  равна

$$R_{A,2} = R_{A,2}^{[0]} + \mu R_{A,2}^{[1]} = -(H_A^{[0]} + \mu H_A^{[1]}) \sin(\varphi^{[0]} + \mu \varphi^{[1]}) + (V_A^{[0]} + \mu V_A^{[1]}) \cos(\varphi^{[0]} + \mu \varphi^{[1]}) \quad (3.16)$$

(дополнительный индекс 2 внизу означает проекцию вектора на направление вектора  $\mathbf{e}_2$ ).

Поскольку  $\mu$  мало, то  $\sin \mu \varphi^{[1]} \approx \mu \varphi^{[1]}$ ,  $\cos \mu \varphi^{[1]} \approx 1$ . Приравнявая коэффициенты при  $\mu^0$  и при  $\mu^1$ , получаем из (4.13)

$$R_{A,2}^{[0]} = -H_A^{[0]} \sin \varphi^{[0]} + V_A^{[0]} \cos \varphi^{[0]} \quad (3.17)$$

$$R_{A,2}^{[1]} = -\varphi^{[1]} (H_A^{[0]} \cos \varphi^{[0]} + V_A^{[0]} \sin \varphi^{[0]}) - H_A^{[1]} \sin \varphi^{[0]} + V_A^{[1]} \cos \varphi^{[0]}$$

Аналогично можно получить равенства

$$R_{A,1}^{[0]} = H_A^{[0]} \cos \varphi^{[0]} + V_A^{[0]} \sin \varphi^{[0]} \quad (3.18)$$

$$R_{A,1}^{[1]} = -\varphi^{[1]} (H_A^{[0]} \sin \varphi^{[0]} - V_A^{[0]} \cos \varphi^{[0]}) + H_A^{[1]} \cos \varphi^{[0]} + V_A^{[1]} \sin \varphi^{[0]}$$

Проектируя векторное равенство (3.13) на направление вектора  $\mathbf{e}_2$ , получим для первого приближения



$$Q_{b,2}^{[0]} + Q_{u,2}^{[0]} + Q_{d,2}^{[0]} = -R_{A,2}^{[0]} \quad (3.19)$$

Предположим, что материал, из которого изготовлена арматура, в рассматриваемом диапазоне деформаций является линейно упругим. Кроме того, предположим, что арматура и основной материал балки деформируются совместно. Тогда по закону Гука для первого приближения будем иметь

$$Q_{u,2}^{[0]} = G_a \varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) S_1, \quad Q_{d,2}^{[0]} = G_a \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) S_2 \quad (3.20)$$

где  $G_a$  - модуль сдвига материала арматуры,  $S_1$  и  $S_2$  - площади поперечных сечений верхней и нижней арматуры соответственно,

$$\varepsilon_{12}^{[0]}(h_1) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_1), \quad \varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) = -\frac{1}{2} a_3^{[0]} d_2^{[0]}(h_2) \quad (3.21)$$

( $h_1$  и  $h_2$  - расстояния от центра тяжести сечения до верхней и нижней арматуры).

Проекцию главного вектора внутренних усилий в бетоне на направление вектора  $e_2$  определяем из формулы

$$Q_{b,2}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^{[0]} dx_2 \quad (b - \text{ширина сечения балки}) \quad (3.22)$$

Из (3.5) получаем

$$Q_{b,2}^{[0]} = -b G \lambda_s^{[0]} a_3^{[0]} \frac{h^3}{2} \quad (3.23)$$

Из (3.20)-(3.23) следует

$$a_3^{[0]} = \frac{R_{A,2}^{[0]}}{G b \frac{h^3}{2} + G_a d_2(h_1) S_1 + G_a d_2(h_2) S_2} \quad (3.24)$$

Аналогично (3.19) получаем равенство

$$Q_{b,1} + Q_{u,1} + Q_{d,1} = -R_{A,1} \quad (3.25)$$

По закону Гука имеем

$$F_{u,1}^{[0]} = E_a \varepsilon_{11}^{[0]}(h_1) S_1, \quad F_{d,1}^{[0]} = E_a \varepsilon_{11}^{[0]}(-h_2) S_2 \quad (3.26)$$

где  $E_a$  - модуль упругости материала арматуры. Из (3.11) следует

$$Q_{u,1}^{[0]} = E_a S_1 \left( \varepsilon_s^{[0]} - h_1 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} \right), \quad Q_{d,1}^{[0]} = E_a S_2 \left( \varepsilon_s^{[0]} + h_2 \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} \right) \quad (3.27)$$

Проекция главного вектора внутренних усилий в бетоне на направление вектора  $e_1$  определяется из формулы



$$Q_{b,1}^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^{[0]} dx_2 \quad (3.28)$$

Пренебрегая слагаемыми, содержащими  $(\frac{d\varphi^{[0]}}{ds})^2$ , получаем

$$Q_{b,1}^{[0]} = S[E_1^{[0]} \epsilon_s^{[0]} + \frac{K_2^{[0]}}{20} (a_3^{[0]})^2 h^4], \quad S = bh \quad (3.29)$$

Из (3.25)-(3.29) находим

$$\epsilon_s^{[0]} = [-\frac{3}{20} SK_2^{[0]} (a_3^{[0]})^2 h^4 + E_a \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} (S_1 h_1 - S_2 h_2) - R_{A,1}^{[0]}] / H_I \quad (3.30)$$

$$H_I = SE_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2)$$

Главный момент внутренних усилий в первом приближении в сечении II относительно оси, совпадающей с направлением вектора  $\mathbf{e}_3$ , определяется по формуле

$$M_3^{[0]} = -M_b^{[0]} - h_1 F_{u,1}^{[0]} + h_2 F_{d,1}^{[0]}, \quad M_b^{[0]} = b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11}^{[0]} dx_2 \quad (3.31)$$

Из (3.11) получаем

$$M_b^{[0]} = E_1^{[0]} J \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} \quad (3.32)$$

Учитывая (3.30), находим

$$M_3^{[0]} = H \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} + E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2) \frac{\frac{3}{20} SK_2^{[0]} (a_3^{[0]})^2 h^4 + R_{A,1}^{[0]}}{H_I} \quad (3.33)$$

$$H = E_1^{[0]} J + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) - \frac{E_a^2}{H_I} (S_1 h_1 - S_2 h_2)^2, \quad J = \frac{bh^3}{12}$$

Воспользуемся соотношением [1]

$$d\mathbf{M} / ds = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} \quad (3.34)$$

где  $\mathbf{M}$  - главный момент внутренних усилий в сечении балки относительно его центра тяжести,  $\mathbf{Q}$  - их главный вектор. Проектируя равенство (3.34) на направление вектора  $\mathbf{e}_3$ , получаем для первого приближения

$$dM_3^{[0]} / ds = -Q_2^{[0]} \quad (3.35)$$



Из условия равновесия имеем  $Q_2^{[0]} = -R_{A,2}^{[0]}$ . Учитывая равенство (3.29) и пренебрегая квадратом величины  $a_3^{[0]}h^2$ , находим из (3.35)

$$H \frac{d^2 \varphi^{[0]}}{ds^2} + \frac{E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2)}{H_1} \frac{dR_{A,1}}{ds} = R_{A,2}^{[0]} \quad (3.36)$$

Из (3.17), (3.18) и (3.36) получаем дифференциальное уравнение изгиба балки в первом приближении

$$H \frac{d^2 \varphi^{[0]}}{ds^2} + (H_A \sin \varphi^{[0]} - V_A \cos \varphi^{[0]}) [1 - D \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}] = 0 \quad (3.37)$$

$$D = [E_a (S_1 h_1 - S_2 h_2)] / H_1$$

Учитывая, что кривизна изогнутой оси мала (т.е.  $|D \frac{d\varphi^{[0]}}{ds}| \ll 1$ ), (3.37)

можно записать так:

$$H \frac{d^2 \phi^{[0]}}{ds^2} + H_A \sin \phi^{[0]} - V_A \cos \phi^{[0]} = 0 \quad (3.38)$$

4. Совершенно аналогично производим выкладки для второго приближения. Из равенства (3.2) находим для вторых коэффициентов разложений (2.5)

$$\sigma_{12}^{[1]} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (4.1)$$

откуда получаем:

$$a_2^{[1]} = 0, \quad a_1^{[1]} = -\frac{3}{4} h^2 a_3^{[1]}, \quad A^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]} d(x_2), \quad (4.2)$$

$$A_2^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]} d_2(x_2), \quad \varepsilon_{12}^{[1]} = -\frac{1}{2} a_3^{[1]} d_2(x_2),$$

Из (3.6) следует

$$\sigma_{22}^{[1]} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (4.3)$$

Отсюда находим, что

$$b_1^{[1]} = -\frac{2K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \varepsilon_s^{[1]} - \frac{1}{K_1^{[0]}} \Delta^+, \quad b_2^{[1]} = \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \frac{d\varphi^{[1]}}{ds} - \frac{1}{K_1^{[0]} h} \Delta^- \quad (4.4)$$

$$\Delta^+ = K_1^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} + K_1^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right) + K_2^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} + K_2^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta^- = K_1^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} - K_1^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{22}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right) + K_2^{[1]} \left(\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} - K_2^{[1]} \left(-\frac{h}{2}\right) \varepsilon_{11}^{[0]} \left(-\frac{h}{2}\right).$$



(под выражением  $K_j^{[1]}(x_2)$  понимается  $K_j^{[1]}(\varepsilon_0(x_2), \gamma_0(x_2))$  ( $j=1,2$ )).

Из условия равновесия

$$Q_{\delta,2}^{[1]} + Q_{u,2}^{[1]} + Q_{d,2}^{[1]} + R_{A,2}^{[1]} = 0 \quad (4.5)$$

получаем

$$a_3^{[1]} = -2[\varphi^{[1]}(V_A^{[0]} \sin \varphi^{[0]} + H_A^{[0]} \cos \varphi^{[0]}) - V_A^{[1]} \cos \varphi^{[0]} + H_A^{[1]} \sin \varphi^{[0]} - \\ \text{T} - 2b \int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_2) \varepsilon_{12}^{[0]} dx_2] / \{bG^{[0]}h^3 + G_a[S_u d_2(h_1) + S_d d_2(h_2)]\} \quad (4.6)$$

Из равенства

$$Q_{\delta,1}^{[1]} + Q_{u,1}^{[1]} + Q_{d,1}^{[1]} + R_{A,1}^{[1]} = 0 \quad (4.7)$$

находим

$$\varepsilon_s^{[1]} = -\frac{E_a}{H_1}(S_1 h_1 - S_2 h_2) \frac{d\varphi^{[1]}}{ds} - \frac{R_{A,1}^{[1]}}{H_1} + \varepsilon_{s,0}^{[1]}, \quad \varepsilon_{s,0}^{[1]} = -\frac{\varepsilon_s^{[0]} b \tilde{E}_1^{[1]} + \varepsilon_s^{[0]} b \tilde{E}_1^{[1]}}{H_1} \\ + \frac{d\varphi^{[0]}}{ds} \left\{ \frac{E_1^{[0]} S h \Delta^-}{12K_1^{[0]}} + \frac{E_a}{K_1^{[0]}} [(S_1 h_1 - S_2 h_2) \Delta^+ + \frac{(S_1 h_1 + S_2 h_2) h_1 \Delta^-}{h}] \right\} \\ \underline{\hspace{15em}} \\ H_1 \quad (4.8)$$

где

$$E_1^{[0]} = K_1^{[0]} - \frac{(K_2^{[0]})^2}{K_1^{[0]}}, \quad E_1^{[1]}(x_2) = K_1^{[1]}(x_2) - K_2^{[1]}(x_2) \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}$$

$$\tilde{E}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) dx_2$$

Заметим, что  $\varepsilon_{s,0}^{[1]}$  зависит только от величин, найденных на предыдущем шаге, т.е. в первом приближении.

Аналогично (3.26) второго члена разложения главного момента внутренних усилий в сечении II относительно оси, совпадающей с направлением вектора  $\mathbf{e}_3$ , определяется по формуле

$$M_3^{[1]} = -M_b^{[1]} - h_1 F_{u,1}^{[1]} + h_2 F_{d,1}^{[1]}, \quad M_b^{[1]} = b \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11}^{[1]} dx_2 \quad (4.9)$$

Из (4.9) получаем



$$M_3^{[1]} = H \frac{d\phi^{[1]}}{ds} + \frac{E_a(S_1 h_1 - S_2 h_2)}{H_1} R_{A,1}^{[1]} + M_{3,0}^{[1]} \quad (4.10)$$

$$M_{3,0}^{[1]} = -E_a(S_1 h_1 - S_2 h_2) \sigma_s^{[0]} - \left[ \frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2} J \Delta^+ + \frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_1 h_1^2 (\Delta^+ + \right. \\ \left. + \frac{h_1}{h} \Delta^-) + \frac{E_a}{K_1^{[0]}} S_2 h_2^2 (\Delta^+ - \frac{h_1}{h} \Delta^-) - b \tilde{E}_1^{[1]*} \right] + J \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \frac{\Delta^-}{h} - b \tilde{E}_1^{[1]*} \epsilon_s^{[0]},$$

$$\text{где } \tilde{E}_1^{[1]*} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) x_2 dx_2, \quad \tilde{E}_1^{[1]**} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2) x_2^2 dx_2.$$

Так же, как и  $\epsilon_{s,0}^{[1]}$ ,  $M_{3,0}^{[1]}$  выражается только через величины, найденные в первом приближении. Аналогично (3.31) имеем

$$dM_3^{[1]} / ds = R_{A,2}^{[1]} \quad (4.11)$$

Отсюда выводим уравнение для определения второго коэффициента разложения угла поворота поперечного сечения  $\phi^{[1]}$ :

$$H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} + (H_A \sin \phi^{[1]} - V_A \cos \phi^{[1]}) \left[ 1 - D \frac{d\phi^{[1]}}{ds} \right] = - \frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds} \quad (4.12)$$

Аналогично (3.37) уравнение (4.12) может быть упрощено:

$$H \frac{d^2 \phi^{[1]}}{ds^2} + H_A \sin \phi^{[1]} - V_A \cos \phi^{[1]} = - \frac{dM_{3,0}^{[1]}}{ds} \quad (4.13)$$

**Вывод.** Дифференциальные уравнения (3.37) и (4.12) дают возможность определить углы поворота поперечных сечений балки во втором приближении, т.е. они являются уравнениями плоского продольно-поперечного изгиба армированных балок с учетом геометрической и малой физической нелинейностей. Заметим, что эти уравнения справедливы и для неармированных балок при  $S_1 = S_2 = 0$ .

#### Литература

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. -Л.: Машиностроение, 1986.-336 с.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971.
4. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.- 296 с.