УДК 624.193.4

ВЛИЯНИЕ НАВЕДЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Кобринец В.М., Заволока Ю.В. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

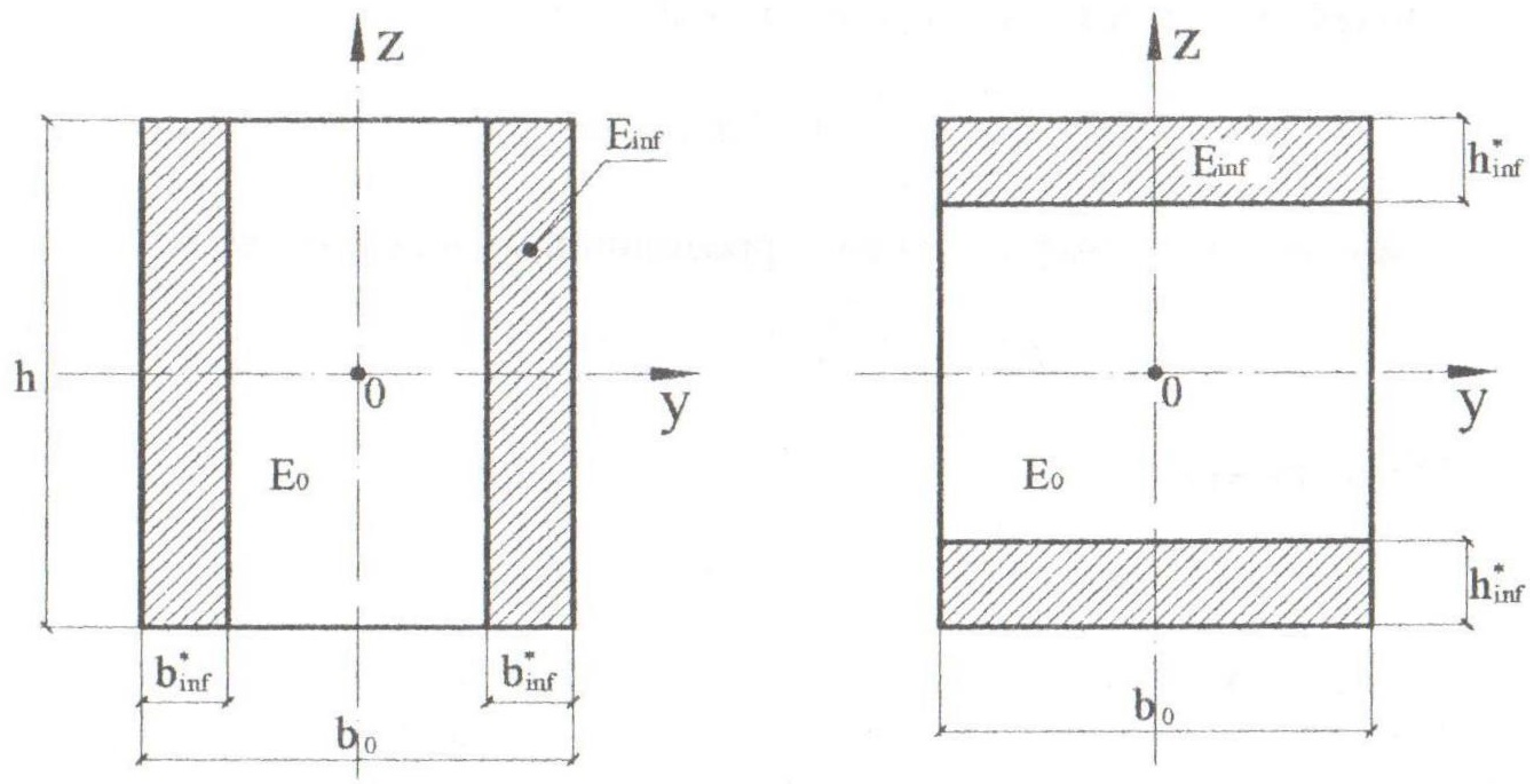
Получены формулы критических сил шарнирно-опертого стержня с учетом наведенной неоднородности и коррозионного износа. Определены условия, когда влияние агрессивной среды можно не учитывать.

При анализе устойчивости однородных изотропных стержней учитывается только изгибная жесткость. Учет жесткости при сжатии дают весьма малую поправку к величине критической силы. Формула Эйлера для сплошных, однородных, изотропных стержней дает вполне удовлетворительные значения.

Энгессер получил выражение для критической силы, в котором учитывается сдвиговая жесткость. Но применять эту формулу рекомендуется для составных и слоистых стержней.

При эксплуатации конструкций в агрессивных средах появляется наведенная неоднородность [1]. В слое, куда проникает фронт воздействия окружающей среды, происходит изменение прочностных и деформативных свойств материала. Конструкция со временем становиться слоистой, с наведенной неоднородностью.

Шарнирно-опертый стержень испытывает жесткое симметричное воздействие с двух противоположных граней рис. 1. Воздействие по высоте стержня стационарное.



а) б)

Рис. 1 Схема воздействия
а) со стороны левой и правой грани;
б) со стороны верхней и нижней грани.

В зоне воздействия, по мере проникновения фронта воздействия на глубину $b_{\inf}$ или $h_{\inf}$ модуль упругости E_0 принимает значение $E_{\inf}$. Предположим, что стержень имеет ограничение на потерю устойчивости только в плоскости $z0x$. Ось x совпадает с осью стержня в недеформированном состоянии.

Агрессивная среда сжимает жесткостные характеристики сечения и, следовательно величину критической силы. По схеме воздействия а) (рис. 1):

Продольная жесткость

$$C_a^* = E_0 A_0 \left[1 - 2\mu_{\inf}^* \left(1 - \alpha_{\inf}\right)\right], \quad (1)$$

изгибная жесткость

$$B_{y.a}^* = E_0 \frac{b_0 h_0^3}{12} \left[1 - 2\mu_{\inf}^* \left(1 - \alpha_{\inf}\right)\right] \quad (2)$$

гибкость

$$\lambda_{y.a}^* = l \sqrt{\frac{C_a^*}{B_{y.a}^*}} = \frac{2\sqrt{3}l}{h_0} = \lambda_{0y} = const\ . \quad (3)$$

Эйлеровую критическую силу запишем через λ_{0y}

$$P_{кр}^{*}=\frac{\pi^{2}E_{0}A_{0}}{\lambda_{0y}^{2}}\left[1-2\mu_{\inf}^{*}\left(1-\alpha_{\inf}\right)\right], \tag{4}$$

и критическую силу в случае коррозионного износа, когда $\alpha_{\inf}=0$

$$P_{кр.cor}^{*}=\frac{\pi^{2}E_{0}A_{0}}{\lambda_{0y}^{2}}\left(1-2\mu_{cor}^{*}\right). \tag{5}$$

Обозначения

$$\alpha_{\inf}=\frac{E_{\inf}}{E_{0}};\ \mu_{\inf}^{*}=\frac{b_{\inf}^{*}}{b_{0}};\ 0\le\mu_{\inf}^{*}\le 0,5.$$

Звездочкой обозначены величины, которые изменяются во времени.

При таком воздействии гибкость не влияет на величины критических сил, поскольку она остается постоянной

По схеме воздействия б):

продольная жесткость

$$C_{б}^{*}=E_{0}A_{0}\left[1-2\mu_{\inf}^{*}\left(1-\alpha_{\inf}\right)\right], \tag{6}$$

изгибная жесткость

$$B_{y.б}^{*}=E_{0}\frac{b_{0}h_{0}^{3}}{12}\left[\alpha_{\inf}+\left(1-2\mu_{\inf}^{*}\right)^{3}\left(1-\alpha_{\inf}\right)\right], \tag{7}$$

гибкость

$$\lambda_{y.б}^{*}=\lambda_{0.y}\sqrt{\frac{1-2\mu_{\inf}^{*}\left(1-\alpha_{\inf}\right)}{\alpha_{\inf}+\left(1-2\mu_{\inf}^{*}\right)^{3}\left(1-\alpha_{\inf}\right)}}, \tag{8}$$

а в случае коррозионного износа

$$\lambda_{y.cor.б}^{*}=\frac{\lambda_{0.y}}{1-2\mu_{cor}^{*}}. \tag{9}$$

Критические силы

$$P_{кр}^{*}=\frac{\pi^{2}E_{0}A_{0}}{\lambda_{0.y}^{2}}\left[\alpha_{\inf}+\left(1-2\mu_{\inf}^{*}\right)^{3}\cdot\left(1-\alpha_{\inf}\right)\right] \tag{10}$$

$$P_{кр.cor}^{*}=\frac{\pi^{2}E_{0}A_{0}}{\lambda_{0.y}^{2}}\left(1-2\mu_{cor}^{*}\right)^{3}. \tag{11}$$

Запишем значения критических сил с учетом (8) и (9)

$$P_{кр}^{*}=\frac{\pi^{2}E_{0}A_{0}}{\lambda_{y.б}^{*2}}\left[1-2\mu_{\inf}^{*}\left(1-\alpha_{\inf}\right)\right], \tag{12}$$

$$P^*_{кр.cor} = \frac{\pi^2 E_0 A_0}{\lambda^{*2}_{y.cor.б}}\left(1 - 2\mu^*_{cor}\right) \qquad (13)$$

Здесь

$$\mu^*_{\inf} = \frac{h^*_{\inf}}{h_0};\ 0 \le \mu^*_{\inf} \le 0,5$$

Формулы (4) и (5) по виду совпадают с (12) и (13), но в последних гибкость не постоянная, а зависит от степени агрессивности окружающей среды $\alpha_{\inf}$ и глубины проникновения фронта воздействия $\mu^*_{\inf}$. Критические силы заметнее реагируют на воздействие по схеме б), нежели по схеме а). Это особенно заметно при коррозионном износе. Но при $\mu^*_{\inf} = 0$ и $\mu^*_{\inf} = 0,5$, а также $\mu^*_{cor} = 0$, $\mu^*_{cor} = 0,5$ значения критических сил по двум схемам воздействия совпадают.

При благоприятном воздействии $\alpha_{\inf} > 1$ и величины критических сил возрастают. При наращивании μ_{cor} надо принимать с противоположным знаком.

Определим глубину фронта проникновения и изменение модуля упругости в зоне воздействия, когда уменьшение критической силы не превышает 5%, т.е., когда влиянием агрессивных условий эксплуатации конструкций можно пренебречь.

Для схемы воздействия а)

$$\mu^*_{\inf} = \frac{0,025}{1 - \alpha_{\inf}};\ \alpha_{\inf} = 1 - \frac{0,025}{\mu^*_{\inf}} \qquad (14)$$

Когда $\mu_{\inf} = 0,5$ все сечение перекрывается фронтом воздействия среды, при этом $\alpha_{\inf} = 0,95$. Если $0,025 \le \mu^*_{\inf} \le 0,5$, $\alpha_{\inf}$ изменяется в таких пределах $0 \le \alpha_{\inf} \le 0,95$. При коррозионном износе $\mu_{cor} = 0,025$. Площадь, при этом, уменьшается на 5%.

Для схемы воздействия б)

$$\mu^*_{\inf} = \frac{1 - \sqrt[3]{0,95 - \alpha_{\inf}}}{2}. \qquad (15)$$

$$\alpha_{\inf} = \frac{0,95 - \left(1 - 2\mu_{\inf}\right)^3}{1 - \left(1 - 2\mu_{\inf}\right)^3}. \qquad (16)$$

При $\mu_{\inf.0} = 0,5$ уменьшение модуля составляет 5%. При коррозионном износе $\mu_{cor.0} = 0,008476$. Площадь при этом уменьшится на 1,7%, т.е. значительно меньше чем по схеме а).

Агрессивное воздействие увеличивает податливость стержня при сжатии. В дифференциальном уравнении, описывающем равновесную форму изогнутой оси стержня, необходимо учесть продольную деформацию сжатия ε^*

$$B_y^* \cdot y^{*''} \cdot \left(1-\varepsilon^*\right) = -P^* \cdot y^* \tag{17}$$

относительное ускорение оси стержня ε^*

$$\varepsilon^* = \frac{P^*}{E_0 A_0 \left[1-2\mu_{\inf}^* \left(1-\alpha_{\inf}\right)\right]} = \frac{P^*}{E_0 A^*} \tag{18}$$

Уравнение (17) сводится к однородному дифференциальному уравнению с переменными во времени коэффициентами

$$\frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} + a^{*2} y(x,t) = 0 \tag{19}$$

в котором

$$\gamma^{*2} = \frac{P^*(t)}{B_y^*(t)\left[1-\varepsilon^*(t)\right]}. \tag{20}$$

поскольку дифференцирование выполняется по координате, то можно воспользоваться решением уравнения (19), как с постоянными коэффициентами [2]

$$y^* = C_1^* \sin\gamma^* x + C_2^* \cos\gamma^* x \tag{21}$$

начало координат принимаем на нижней неподвижной опоре. Используем первое граничное условие

$y^*(x) = 0$, откуда $C_2 = 0$.

При записи второго граничного условия на верхнем конце шарнирно опертого стержня следует учесть, что первоначальная длина стала меньше $l_0\left(1-\varepsilon^*\right)$

$y^*\left[l_0\left(1-\varepsilon^*\right)\right] = 0$, откуда $C_1 \sin\gamma^*\left[l_0\left(1-\varepsilon^*\right)\right] = 0$.

Если $C_1 \neq 0$ то

$$\gamma^* l_0\left(1-\varepsilon^*\right) = \pi. \tag{22}$$

Подставляя (20) в (22) получим выражение для определения $P_{кр}^*$

$$\left(1-\frac{P_{кр}^*}{E_0 A^*}\right) \cdot P_{кр}^* = \frac{\pi^2 B_y^*}{l_0^2} \tag{23}$$

Решая (23) находим $P_{кр}^*$

$$P^*_{кр} = \frac{E_0 A^*}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot B^*_y}{l_0^2 E_0 A^*}}\right) \tag{24}$$

Критическую силу (23) запишем через λ^*_y

$$P^*_{кр} = P^*_э \cdot \frac{\lambda_y^{*2}}{2\pi^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{\lambda_y^{*2}}}\right) \tag{25}$$

Здесь

$$P^*_э = \frac{\pi^2 B^*_y}{l_0^2}, \tag{26}$$

которая определяется по формулам (4), (5), (10), (11), (12), (13) для разных схем воздействия.

Гибкость определяется по (3), (8), (9).

Для схемы воздействия а) λ_{0y} - величина не зависит от внешней среды

$$P^*_{кр} = P^*_э \left[1 - 2\mu^*_{\inf} \cdot \left(1 - \alpha_{\inf}\right)\right] \cdot \beta. \tag{27}$$

Здесь β тоже от внешней среды не зависит и совпадает с тем что получено в работе [2]

$$\beta = \frac{\lambda_{0y}^2}{2\pi^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{\lambda_y^2}}\right), \ \lambda_{0.y} = 2\sqrt{3}\,\frac{l}{h} \tag{28}$$

Из этого решения следует, что $\lambda_{0.y}$ не может быть меньше 2π. При этом $\beta = 2$ и критическая сила в два раза больше $P_э$. Но с учетом неблагоприятного влияния среды, критическая сила будет меньше. Длина стержня, при которой не происходит потеря устойчивости

$$l_{\min} = \frac{\pi h}{\sqrt{3}} \approx 1,819h. \tag{29}$$

При такой длине в сжатом элементе возникают только продольные деформации ε^*. С увеличением $l > l_{\min}$ возможна потеря устойчивости. Появляются изгибные деформации, а роль ε^* резко падает. При

$\lambda_{0.y} = 10\pi$ критическая сила с учетом продольных деформаций больше Эйлеровой всего на 1,02%. При дальнейшем увеличении $\lambda_{0.y}$ $\beta \to 1$, а $P^*_{кр} > P_э$.

По схеме б) эффект учета продольных деформаций на величину критической силы еще меньше. Поэтому вывод можно сделать такой:

1. для сплошных стержней, которые подвергаются агрессивному воздействию окружающей среды учитывать продольные деформации при определении критических сил для стержней и колонн, применяемых в строительной практике, не обязательно.

2. если воздействие благоприятное или осуществляется усиление конструкций материалом прочнее чем основной, в этом случае возможно некоторое увеличение критической силы для коротких стержней.

Влияние сдвиговых деформаций в формуле критической силы учитывается жесткостью на сдвиг $G_{\inf} A^*$ и коэффициентом формы сечения n.

$$P^*_{кр.G} = \frac{P^*_{кр}}{1 + \dfrac{nP^*_{кр}}{G_{\inf} A^*}} \tag{30}$$

Если модуль сдвига изменяется также как модуль Юнга, тогда остается справедливым соотношение

$$G_{\inf} = \frac{E_{\inf}}{2(1+\nu_{\inf})}. \tag{31}$$

Сделаем оценку второго слагаемого в знаменателе (30) по сравнению с единицей для прямоугольного сечения

По схеме воздействия а)

$$1 + \frac{1,2 \cdot E_0 \cdot 2(1+\nu_{\inf})}{\lambda^2_{0.y} \cdot E_{\inf}} = 1 + \frac{2,4(1+\nu_{\inf})}{\alpha_{\inf}\lambda^2_{0.y}} \tag{32}$$

Для прямоугольного сечения $n = 1,20$. Коэффициент Пуассона изменяется незначительно. Для бетонных сжатых элементов прямоугольного сечения гибкость вычисляется по формуле

$$\lambda_{0.y} = l_0/h.$$

Принимаем $\nu_{\inf} = \nu_0 = 0,18$, подставим его в (32)

$$1 + \frac{2,4(1+0,18)h^2}{\alpha_{\inf} l_0^2} = 1 + 2,832\frac{h^2}{\alpha_{\inf} l_0^2} \tag{33}$$

Для колонны сечением 40×40 см и высотой 4м получим

$$1 + 2,832\frac{0,16}{\alpha_{\inf} \cdot 16} = 1 + \frac{0,02832}{\alpha_{\inf}}. \tag{34}$$

Для того, чтобы второе слагаемое составило 5% по сравнению с 1, $\alpha_{\inf}$ должно принять значение $\alpha_{\inf} = 0,5664$. Это возможно при сильном агрессивном воздействии.

По схеме воздействия б) такая пятипроцентная добавка по сравнению с единицей произойдет при $\alpha_{\inf} = 0,4$.

Здесь вывод напрашивается такой: учитывать деформации сдвига имеет смысл при очень сильном агрессивном воздействии.

Выводы

1. Наведенная неоднородность характеризуется изменением модуля упругости в зоне проникновения фронта воздействия, поэтому ее необходимо учитывать при определении критических сил.
2. Наиболее интенсивное изменение величины критических сил происходит при коррозионном износе.

Литература

1. Иноземцев В.К. Модель наведенной неоднородности материала в задачах долговечности элементов тонкостенных конструкций// Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – №9. – с. 30-33.
2. Пановко Я.Г, Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: «Наука», 1979, - 384с.