УДК 624.072.126

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ

Зюкин Ю.П., **Бондаренко А.С**. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина)*

В даній роботі представлена техніка визначення значень перпендикулярного стиску та вертикального переміщення у двошаровій основі. Тертя між шарами не враховувалось й жорсткість може бути будь-якою.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости (плоскую деформацию) для двухслойной упругой среды, лежащей на абсолютно жестком основании без учета сил трения между слоями и этим основанием. Размеры и упругие свойства слоев различны. На данную среду действует поверхностная нагрузка $q(x)$ (см. рис. 1).

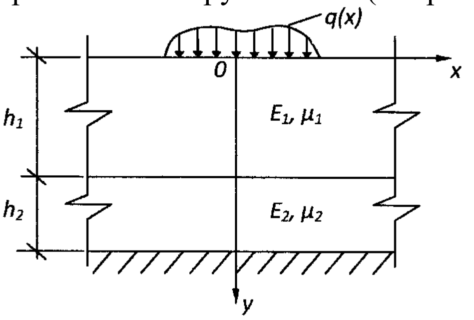


Рис.1

Решая первую основную задачу теории упругости для рассматриваемой двухслойной среды с помощью преобразования Фурье получаем в случае симметричного случая задачи следующие выражения для нормальных напряжений $\sigma_y(x,y)$ и вертикальных перемещений $v(x,y)$:

$$\sigma_y(x,y) = -\frac{2\Delta}{y}\int_0^\infty \varphi_1(u) G\left(\frac{u}{y}\right) cos\frac{x}{y}u du \tag{1}$$

$$v(x,y) = \frac{4\left(1-\mu_1^2\right)}{\pi E_1}\int_0^\infty \varphi_2(u) G\left(\frac{u}{y}\right) cos\frac{x}{y}u\frac{du}{u} \tag{2}$$

где функции $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ определяются следующими выражениями

$$\varphi_1(u) = \Phi(u)R(u),\ \varphi_2(u) = 2sh^2u\Phi(u),\ \Phi(u)K(u) = shu + uchu \tag{3}$$

$$K(u) = 4sh^2u\beta\left(sh^2u - u^2\right) + \Delta R(u),\ R(u) = sh2u + 2u \tag{4}$$

Коэффициенты $\Delta = E_2\left(1-\mu_1^2\right)/E_1\left(1-\mu_2^2\right)$, $\beta = h_2/h_1$, функция $G(u)$ является преобразованием Фурье [1] от внешней поверхностной нагрузки на двухслойное основание и, например, для симметричных нагрузок (см.рис.2) определяются простыми формулами.

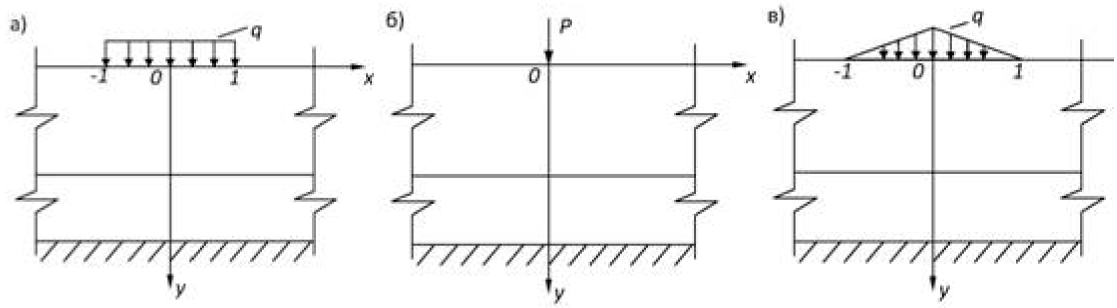


Рис.2

Так, для равномерно – распределенной нагрузки интенсивностью q, приложенной на приведенном отрезке (-1,1) (см.Рис.2 а), имеем $G(u) = 2q\sin u/u$, для сосредоточенной силы P, приложенной в начале координат (см.Рис.2, б), $G(u) = P$, а в случае симметрично распределенной по треугольному закону с максимальным значением q на приведенном отрезке (-1,1) (см. Рис.2 ,в), $G(u) = 2q(\cos u - 1)/u^2$.

Отметим, что в случае кососимметричной задачи в формулах (1) и (2) следует заменить $\cos$ на $\sin$. В общем случае нормальных нагрузок следует представлять последние в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих.

Особый интерес представляет распределение нормальных напряжений и вертикальные перемещения по линии контакта слоев т.е. при $y = h_1$. Такие вопросы возникают при расчете конструкций на упругом основании (штампов или балочных плит). Известно, что реальные основания фундаментов являются слоистыми средами. Причем часто бывает так, что нижний слой более податлив, чем верхний т.е. $E_2 \le E_1$ (для формул (1) и (2) нормальных напряжений и вертикальных перемещений Δ< 1).

При решении контактной задачи об изгибе балочной плиты на двухслойном основании методом ортогональных многочленов [2] контактные напряжения $p(x)$ представляются в виде ряда по многочленам Чебышева первого рода $T_n(x)$ и в случае симметричной задачи записываются:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{N} Y_{2k} T_{2k}(x), \quad |x| \le 1 \tag{5}$$

Коэффициенты Y_{2k} определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений и, как показано в работе [2], для значений параметров $\beta \le 2$, $\Delta \ge 0,1$ можно принять в формуле (5) $N=2$. Это позволяет получить простые выражения для коэффициентов Y_0, Y_2, Y_4, которые приведены в работе [3].

Таким образом, для определения по линии $y = h_1$ нормальных напряжений $\sigma_y(x, h_1)$ и вертикальных перемещений $v(x, h_1)$ можно получить простые инженерные формулы, в частности для нормальных напряжений:

$$\sigma_y(x, h_1) = -\frac{2\Delta}{h_1}\left\{ g_0\left(\frac{x}{h_1}\right) Y_0 + g_2\left(\frac{x}{h_1}\right) Y_2 + g_4\left(\frac{x}{h_1}\right) Y_4 \right\} \tag{6}$$

Здесь коэффициенты $g_{2m}(x)$ определяются в виде следующего разложения:

$$g_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2m+k)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m+k} C_k^{2m}(x) \tag{7}$$

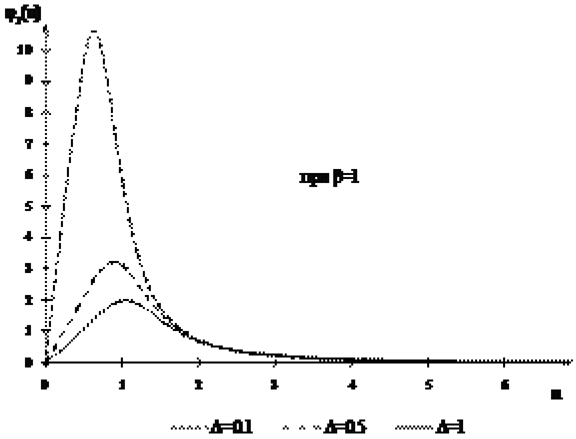
Параметр $\alpha = a/h_1$, где a – полудлина штампа или балочной плиты. От этого параметра зависит быстрота сходимости бесконечного ряда в (7). На практике α <1 и для инженерной точности достаточно удерживать в (7) несколько слагаемых. Коэффициенты $C_k^{2m}(x)$ определяются в виде несобственного интеграла от функции $\varphi_1(x)$, а именно:

$$C_k^{2m}(x)=\int_0^\infty \varphi_1(u)u^{2m+k}\cos xu\,du \qquad (8)$$

Интеграл в (8) является сходящимся, так как функция $\varphi_1(u)$ является ограниченной в нуле и убывающей на бесконечности согласно асимптотикам:

$$\varphi_1(u)=O(u),u\to 0 \qquad \varphi_1(u)=1+O(e^{-u}),u\to\infty \qquad (9)$$

Приведем графики функции $\varphi_1(x)$ для различных значений параметров β и Δ (см.рис.3). Как видно из графиков при *u* > *5*, функция $\varphi_1(u)$ практически равна нулю и убывает экспоненциально.



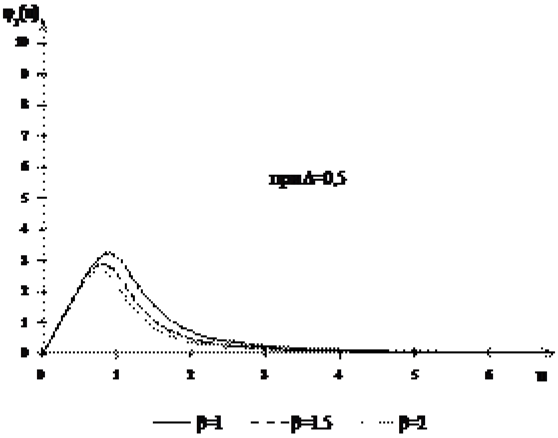


Рис.3

Определение коэффициентов $C_k^{2m}(x)$ наиболее трудоемкий, с точки зрения вычислений, процесс. Приведем значения этих коэффициентов для определения максимальных нормальных напряжений $\sigma_y(0,h_1)$ между слоями при симметричной нагрузке на основание , т.е. при *x=0,* для значений 2m = 0, 2, 4 и к = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. (см. таблицу 1). При этом принималось $\beta = 1$, $\Delta = 0{,}5$.

Отметим, что при численном интегрировании в (8) достаточно было положить верхний предел интегрирования равным *7*. Далее произведены вычисления значений коэффициентов $g_{2m}(0)$ для 2m = 0, 2, 4 при различных значений α на основе значений $C_k^{2m}(0)$, приведенных в Таблице 1. Вычисления показали весьма быструю сходимость ряда в (7), для инженерной точности вполне достаточно было удерживать до шести слагаемых, это объясняется наличием в знаменателях слагаемых произведений факториалов. Значения коэффициентов $g_{2m}(0)$ для значений параметра *α=0,2, 0,4, 0,6, 1* приведены в Таблице 2.

Уже на этом этапе можно сделать выводы о влиянии параметра *α* на сходимость приближенного процесса вычислений по предлагаемой методике. Как видно из Таблицы 2 при увеличении *α* напряжения между слоями уменьшаются, что вполне объяснимо с точки зрения «механического» смысла этого параметра.

Отметим, что соответствующие результаты получены и при определении вертикальных перемещений $v(x,y)$ (для точек двухслойного основания при $y=h_1$). Формулы вида (6), (7) и (8) приводятся ниже:

$$v(x,h_1)=\frac{4(1-\mu_1^2)}{\pi E_1}\left\{f_0\left(\frac{x}{h_1}\right)Y_0+f_2\left(\frac{x}{h_1}\right)Y_2+f_4\left(\frac{x}{h_1}\right)Y_4\right\} \tag{10}$$

$$f_{2m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2m+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m+k}D_k^{2m+k}(x) \tag{11}$$

$$D_k^{2m+k}(x)=\int_0^{\infty}\varphi_2(u)u^{2m+k-1}\cos xu\,du \tag{12}$$

Функция $\varphi_2(u)$, используемая в (12), имеет асимптотику (9) и процесс вычислений значений коэффициентов $D_k^{2m+k}(x)$ и соответственно $f_{2m}(x)$ аналогичен по сходимости в формулах (7) и (8). Таблицы значений этих коэффициентов при $x=0$ в целях экономии места не приводятся.

Таблица 1.

k / 2m	0	1	2	3	4	5	6
0	3,915	5,019	9,586	25,563	86,680	343,779	1505,443
2	9,586	25,563	86,680	343,779	1505,443	7029,789	34296,003
4	86,680	343,779	1505,443	7029,789	34296,003	172665,412	890040,111

Таблица 2.

α / 2m	0,2	0,4	0,6	1
0	3,5362	3,1806	2,8477	2,2468
2	0,0210	0,069	0,1243	0,1940
4	0,0003	0,0019	0,0230	0,1509

Предлагаемая методика может быть легко реализована простыми программными продуктами современных компьютерных технологий. Это позволяет с одной стороны получить программный комплекс для инженерных расчетов в проектной практике для двухслойных оснований, а также провести исследования по влиянию исходных параметров задачи на напряженно-деформируемое состояние двухслойного основания.

Заключение

В работе построена методика определения нормальных напряжений и вертикальных перемещений между слоями различной жесткости двухслойного основания в плоском случае задачи теории упругости от нормальной нагрузки по свободной поверхности.

Получены инженерные формулы для определения этих величин в случае контактной задачи для балок и штампов на двухслойном основании, которые можно использовать при расчетах оснований и фундаментов в реальном проектировании.

Произведены численные эксперименты для различных значений физических параметров двухслойного основания с целью определения уровня сходимости несобственных интегралов и бесконечных рядов, входящих в расчетные формулы

Summary

In the present work the technique for definition of values of normal pressure and vertical moving in the two-layer base, arising between layers is constructed at normal loading on a base surface. The friction between layers is not considered, and rigidness of layers are various.

Литература

1. И. Снеддон, Преобразование Фурье, Издательство иностранной литературы, Москва, 1955.
2. Зюкин Ю.П., Об изгибе балки конечной длины на двухслойном основании. «Известия вузов, раздел «Строительство и архитектура», 1973, №3.
3. Зюкин Ю.П., Об одной методике расчета балочных плит на двухслойном основании, Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, Вип. 37, Одеса, 2010. – С. 131-136.