УДК 624.072.32

ОПТИМАЛЬНАЯ АРКА

Бекирова М.М., Орлов А.Н., Хоменко О.И. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

Стаття містить розрахунок оптимальних арок, одержані закони кривих, за якими описані оптимальні арки з мінімальним об'ємом.

Одним из основных критериев оптимальности строительных конструкций (арок в том числе) является критерий минимума объёма материала, из которого изготовлена конструкция (или минимума веса конструкции, если материал однороден).

С практической точки зрения поиск оптимальной арки на основе указанного критерия сводится к нахождению соотношения стрелы подъёма арки и длины пролёта *f/l*, обеспечивающего минимум объёма.

Изгибающие моменты отрицательно влияют на работу арок. Рациональной считается безмоментная арка. Рациональной формой оси арки следует считать верёвочную кривую, которая получается при провисании гибкой нити, когда направление нагрузки изменено на противоположное [1]. Строгое доказательство оптимальности безмоментной арки приведено в работе [2].

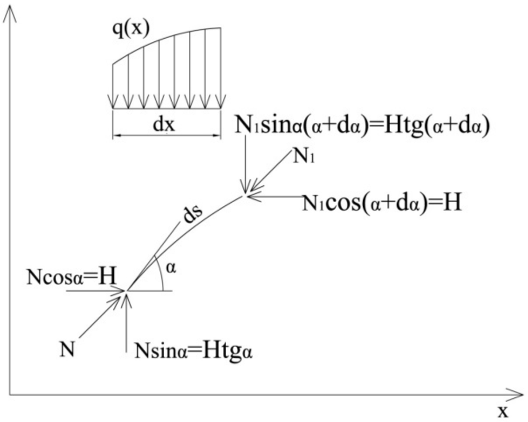

Рис. 1. Элемент арки.

Рассмотрим случай распределённой ветикальной нагрузки *q(x)* общего вида. Рассмотрим уравнение равновесия элемента арки. Уравнение $\sum x = 0$ - условие равенства проекций сил сжатия во всех сечениях арки на горизонтальную ось (H – распор). Из уравнения $\sum y = 0$ следует

$$Htg\alpha - H(tg\alpha + d\alpha) - q(x)dx = 0 \tag{1}$$

или

$$H\left[tg\alpha - tg(\alpha + d\alpha\right] = q(x)dx \tag{2}$$

После подстановки $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$ в (2) и деления его на Hdx, получаем уравнение равновесия арки:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{H} \tag{3}$$

Решение этого уравнения зависит от нагрузки, т.е. от закона изменения нагрузки *q(x).*

1. Пусть арка симметрична и к ней приложена нагрузка интенсивности q, равномерно распределённая по пролёту.

Тогда
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{q}{H} \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид
$$y(x) = -\frac{q}{2H}x^2 + C_1x + C_2 \qquad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий $y(0)=0$ и $y(l)=0$
$$C_1 = \frac{ql}{H}, C_2 = 0 \qquad (6)$$

и окончательно уравнение рациональной оси арки будет
$$y(x) = \frac{q}{2H}\left(lx - x^2\right); y'(x) = tg\alpha = \frac{q}{2H}(l - 2x) \qquad (7)$$

Стрела подъёма арки f определяется из условия прохождения кривой через ключевую точку ($x=l/2$).
$$f = \frac{ql^2}{8H}, H = \frac{ql^2}{8f} \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что существует семейство рациональных арок с заданной длиной пролёта l и заданной интенсивностью нагрузки q. Каждой арке из семейства отвечают свои значения стрелы подъёма f и распора H. Оптимальной будет одна из арок семейства рациональных с минимальным объёмом V, которому отвечают конкретные значения f, H и f/l.

Объём арки
$$V = \int_0^s A(x)ds, \qquad (9)$$

$A(x)$ - площадь поперечного сечения арки, S – длина дуги арки.
Учитывая, что
$$A(x) = \frac{N(x)}{R}, N(x) = \frac{H}{\cos\alpha}, ds = \frac{dx}{\cos\alpha}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \qquad (10)$$

$tg\alpha = y'(x)$, R – расчётное сопротивление материала.

Объём арки будет
$$V = \frac{H}{R}\int_0^l (1 + tg^2\alpha)dx = \frac{H}{R}\int_0^l \left[1 + \frac{q^2}{4H}(l - 2x)^2\right]dx = \frac{Hl}{R}\left(1 + \frac{q^2l^2}{12H^2}\right). \qquad (11)$$

Минимума объём V достигает при выполнении условия $\frac{dv}{dH} = 0,$

откуда следует, что
$$H = \frac{ql}{2\sqrt{3}}, f = \frac{\sqrt{3}}{4}l \qquad (12)$$

Итак, при заданных l и q оптимальной при максимальном V будет арка с такими характеристиками:
$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{l}\left(lx - x^2\right), \frac{f}{l} = \frac{\sqrt{3}}{4}, A(x) = \frac{ql}{2\sqrt{3}R}\sqrt{1 + \frac{3}{l^2}(lx - 2x)^2},$$
$$A(0) = \frac{ql}{\sqrt{3}R}, A\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2\sqrt{3}R}; \min V = \frac{ql^2}{\sqrt{3}R} \qquad (13)$$

2. Рассмотрим симметричную арку с нагрузкой интенсивности q равномерно распределённой по длине дуги арки. В этом случае уравнение равновесия (3) запишется так:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{q}{H\cos\alpha} \tag{14}$$

С учётом того, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, tg\alpha = \frac{dy}{dx}$, (15)

уравнение (14) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{16}$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения (16) получено в виде

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left[-e^{\frac{q}{H}(x-C_2)} + e^{-\frac{q}{H}(x-C_2)}\right], \tag{17}$$

$$y(x) = \frac{H}{2q}\left[C_1 - e^{\frac{q}{H}(x-C_2)} - e^{-\frac{q}{H}(x-C_2)}\right] \tag{18}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ и условия симметрии арки $y'\left(l/2\right) = 0$.

$$C_1 = l^{\frac{ql}{2H}} + l^{-\frac{ql}{2H}}, C_2 = l/2 \tag{19}$$

Получим в окончательном виде уравнение рациональной оси арки

$$y'(x) = tg\alpha = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{q}{2H}(l-2x)} - e^{-\frac{q}{2H}(l-2x)}\right] \tag{20}$$

$$y(x) = \frac{H}{2q}\left[e^{\frac{ql}{2H}} - e^{\frac{q}{2H}(l-2x)} + e^{-\frac{ql}{2H}} - e^{-\frac{q}{2H}(l-2x)}\right] \tag{21}$$

Стрела подъёма арки находится из условий симметрии и прохождения кривой через ключевую точку $y\left(l/2\right) = f$

$$f = \frac{H}{2q}\left(e^{\frac{ql}{2H}} + e^{-\frac{ql}{2H}} - 2\right) \tag{22}$$

При заданной стреле подъёма из (18) можно найти соответствующую величину распора *H*.

Величина *H* при наиболее распространённых соотношениях f/l приведена ниже

f/l	1/8	1/6	1/5	1/4	1/3	опт. арка 0,3393	1/2
H/ql	1,0204	0,7765	0,6774	0,5375	0,4213	0,4152	0,3297

Так же, как и в первом случае, имеется семейство рациональных арок (20), из которых оптимальной будет арка с минимальным объёмом. Исходя из (9) и (10), определяем объём арки:

$$V = \frac{H}{R}\int_0^l \left(1 + tg^2\alpha\right)dx = \frac{H}{4R}\int_0^l \left[e^{\frac{q}{2H}(l-2x)} - e^{-\frac{q}{2H}(l-2x)}\right]^2 dx =$$

$$= \frac{H^2}{4qR}\left(e^{\frac{ql}{H}} - e^{-\frac{ql}{H}} + \frac{2ql}{H}\right) \qquad (23)$$

Условие $\frac{dV}{dH} = 0$ приводит к уравнению:

$$\frac{ql}{H}\left(e^{\frac{ql}{H}} - 1\right) - 2\left(e^{\frac{ql}{H}} + 1\right) = 0 \qquad (24)$$

корень которого *H=0,4152ql*. При такой величине распора *H* и соответствующей ему стреле подъёма *f=0,3393l* объём арки будет минимальным.

При этом варианте загружения оптимальной аркой будет арка со следующими характеристиками:

$$y(x) = 0,2076l\left[3,6365 - e^{\frac{1,2042}{l}(l-2x)} - e^{-\frac{1,2042}{l}(l-2x)}\right]$$

$$\frac{f}{l} = 0,3393, A(x) = 0,2076\frac{ql}{R}\left[e^{\frac{1,2042}{l}(l-2x)} + e^{-\frac{1,2042}{l}(l-2x)}\right],$$

$$A(0) = 0,7549\frac{ql}{R}; A\left(\frac{l}{2}\right) = 0,4152\frac{ql}{R}, \min V = 0,5797\frac{ql^2}{R}.$$

Выводы

1. Выполнены расчёты оптимальных арок на два варианта загружения, наиболее часто имеющих место на практике.

2. Приведенные результаты в полной мере относятся как к трёхшарнирным, так и к двухшарнирным аркам.

Summary

The article presents a calculation of optimal arches obtained by the laws of the curves, which describe the optimal arch with a minimal volume.

Литература

1. Киселёв В. А. Рациональные формы арок и подвесных систе. М., Госстройиздат, 1953.
2. Гольдштейн Ю. Б., Соломиец М. А. Оптимальное проектирование стержневых систем при варьировании осевого контура. СМРС, 1973, №4.