УДК 620.193.4:624.012.45

КОЛЕБАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Фомин В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

У статті [1] були досліджені нестаціонарні коливання вантажу, розташованого на кінці вертикальної консольної балки при заданому законі зміни горизонтального прискорення точки закріплення балки $w = w(t)$. При цьому передбачалось, що основний матеріал балки (який у статті умовно йменувався бетоном) має різну нелінійну пружність у стиснутій та розтягнутій зонах. Однак, як відомо [2], бетон має також різні нелінійно-пружні властивості при збільшенні стискаючих або розтягуючих зусиль (тобто при навантаженні) та при їх зменшенні (тобто при розвантаженні). В даній роботі зроблена спроба врахування цих властивостей бетону при дослідженні нелінійних нестаціонарних коливань залізобетонної колони із зосередженою масою на кінці. При цьому, як і в [1], прийнято, що матеріал арматури є лінійно пружним.

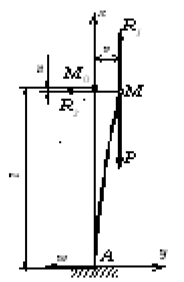

Рис.1

Рассмотрим движение сосредоточенной массы M, расположенной на конце железобетонной колонны (рис.1), основание которой перемещается по горизонтали с ускорением $w(t)$. Составляя основное уравнение динамики точки M относительно неинерциальной системы отсчета xy и проектируя его на ось y, получаем

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = -R_2 + mw(t) \tag{1}$$

где m – масса точки M, v – ее горизонтальное смещение, R_2 – горизонтальная составляющая реакции колонны. Разделим обе части равенства (1) на ml (l – длина консоли) и, пользуясь тем, что по величине $R_2 = F_2$ (F_2 – горизонтальная составляющая силы, вызвавшей смещение v), будем иметь

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{H}{ml^3}\beta + \frac{w(t)}{l} \tag{2}$$

Здесь $\eta = v/l$, $\beta = F_2\, l^2/H$, $H = E_1^{[0]}J + 2E_a S_1 h_1^2$,
($E_1^{[0]} = E^{[0]}/(1-\nu^2)$, $E^{[0]}$ – модуль линейной упругости бетона, ν – его коэффициент Пуассона; $J = dh^3/12$ – момент инерции поперечного сечения, E_a – модуль упругости арматуры; S_1 – площадь сечения верхней и нижней арматуры, $S = dh$; размеры d, h и h_1 показаны на рис.2).

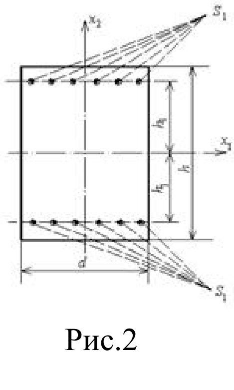

Рис.2

В работах [3] изложен алгоритм, позволяющий определить прогибы железобетонной консольной балки в зависимости от $\beta_{\Delta(j)}$ ($\beta_{\Delta(j)} = \beta - \beta_{(j)}^*$, j – номер этапа, $\beta_{(j)}^*$ – значение β в его начале), а значит, и от β, на разных этапах первого цикла ее квазистатического изгиба: на первом ($\beta \geq 0, d\beta/dt \geq 0$), втором($\beta \geq 0$, $d\beta/dt \leq 0$), третьем ($\beta \leq 0$, $d\beta/dt \leq 0$) и четвертом ($\beta \leq 0$, $d\beta/dt \geq 0$) этапах. На следующих циклах последовательность этапов сохраняется. Таким образом, функция $\upsilon_{(j)} = \upsilon_{(j)}[\beta]$, а, следовательно, и $\eta_{(j)} = \eta_{(j)}(\beta)$, определяется на каждом из этапов. Для сокращения объема вычислений можно поступить следующим образом: вычислить

значения $\eta_{(j)i} = \eta_{(j)}(\beta_{(j)I})$ ($\beta_{(j)1} = \beta_{(j)}^*$, $\beta_{(j)2} < \beta_{(j)3} < ... < \beta_{(j)n-1} < \beta_{(j)n}$, $\beta_{(j)n} = \beta_{(j)}^{**}$, $\beta_{(j)}^{**}$ – значение β в конце j–го этапа),

а затем построить полиномиальную аппроксимацию (например, с использованием интерполяционной формулы Лагранжа) $\tilde{\eta}_{(j)}[\beta] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{(j)k}\beta^{k-1}$ так, чтобы $\tilde{\eta}_{(j)}[\beta_{(j)i}] = \eta_{(j)}[\beta_{(j)i}]$ $[i = 1,2,\ldots,n]$. Используя методы полиномиальной аппроксимации и те же значения $\eta_{(j)i}$ и $\beta_{(j)i}$ ($i = 1,2,\ldots,n$), легко получить формулу и для обратной функции $\tilde{\beta}_{(j)}[\eta]$:

$$\tilde{\beta}_{(j)}[\eta] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{(j)k}\eta^{k-1}. \tag{3}$$

Произведем в (2) замену независимой переменной t безразмерным временем τ следующим образом:

$$t = \tau / \omega_0, \tag{4}$$

(ω_0 – частота свободных линейных колебаний груза на консоли: $\omega_0 = (3H/ml^3)^{1/2}$). Тогда с одновременной заменой β его полиномиальной аппроксимацией для движения груза на j-ом этапе будем иметь следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\eta} = -\tilde{\beta}_{(j)}[\eta]/3 - \overline{w}[\tau/\omega_0], \tag{5}$$

где $\ddot{\eta} = \dfrac{d^2\eta}{d\tau^2}$, $\overline{w}[t] = w(t)/l\omega_0^2$.

Для демонстрации метода решения дифференциального уравнения (5) рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 – нелинейные свободные колебания груза. В этом случае $\overline{w}[t] = 0$. Предположим, что сначала с помощью квазистатического приложения силы F_2 груз был смещен из положения равновесия на некоторое расстояние υ_0 в сторону положительного направления оси y. Затем (при $t = 0$) груз был отпущен, и начались его свободные колебания. Таким образом, на начальном (после $t = 0$) этапе движения груза имеем $\beta > 0$. Кроме того, очевидно, что реакция консоли начинает уменьшаться, т.е. $\dot{\beta} < 0$. Это означает, что движение началось со второго этапа изгиба консоли, т.е. в (5) следует положить $j = 2$. Начальные условия для этого этапа $\eta = \upsilon_0 / l$, $\dot{\eta} = 0$. С помощью методов, изложенных в [2–4], находим коэффициенты $\mathrm{B}_{(2)k}$ разложения (3), тем самым полностью определяем параметры, однозначно определяющие функцию $\tilde{\beta}_{(2)}[\eta]$. Затем приступаем к численному решению уравнения (5), например, с помощью метода Рунге-Кутта, определяя на каждом шаге значение η и $\dot{\eta}$, а также . Как только становится равным нулю, вычисления прекращаем, так как равенство означает конец этапа. Значения η и в этот момент суть не что иное, как $\eta_{(2)}^{**}$ и $\dot{\eta}_{(2)}^{**}$ (т.е. конечные значения для этого этапа).

Вследствие непрерывности функций η(τ) и $\dot{\eta}(\tau)$ они являются одновременно $\overset{*}{\eta}_{(3)}$ и $\overset{*}{\dot{\eta}}_{(3)}$, т.е. начальными значениями для следующего этапа, на котором $\tilde{\beta}_{(3)} < 0$ и $\hat{\tilde{\beta}}_{(3)} < 0$. Затем определяем $B_{(3)k}$ и процедура построения решения повторяется, при этом определяются η и $\dot{\eta}$, а также $\tilde{\beta}_{(3)}$ и $\hat{\tilde{\beta}}_{(3)}$. Значение $\hat{\tilde{\beta}}_{(3)} = 0$ означает конец третьего этапа. В этот момент определяются $\overset{**}{\eta}_{(3)} = \overset{*}{\eta}_{(4)}$ и $\overset{**}{\dot{\eta}}_{(3)} = \overset{*}{\dot{\eta}}_{(4)}$. Теперь можно приступить к четвертому этапу, который является заключительным для первого цикла. Второй цикл начинается с первого этапа, начальные условия для которого определяются в конце четвертого этапа первого цикла и т.д. и т.п.

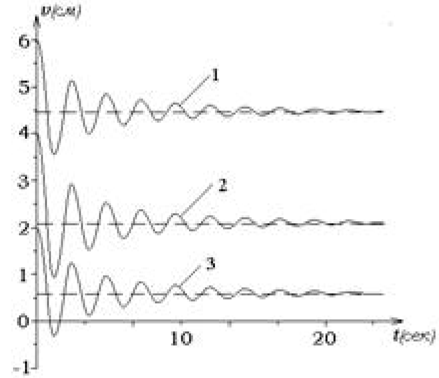

Рис.3

На рис.3 представлены графики свободных колебаний груза на консоли для трех случаев начальных условий 1.v_0=0.06*м,* $\dot{v}_0$ =0; 2. v_0=0.04*м,* $\dot{v}_0$ =0; 3. v_0=0.02*м,* $\dot{v}_0$ =0. Сразу заметен затухающий характер колебаний. Кроме того, заметно, что центр колебаний не совпадает с первоначальным положением равновесия. Это связано с возникновением остаточных деформаций во время первоначального отклонения и в процессе последующих колебаний.

Пример 2 – нелинейные вынужденные колебания груза. Рассмотрим нестационарные колебания груза, вызванные горизонтальным движением точки опоры колонны с ускорением $w(t) = w_0 \sin(\nu t)$. Дифференциальное уравнение (5) в этом случае будет выглядеть так

$$\ddot{\eta} = -\tilde{\beta}_{(j)}(\eta)/3 - \overline{w}_0 \sin(\lambda\tau), \tag{6}$$

где $\overline{w}_0 = w_0 / l\omega_0^2, \lambda = \nu / \omega_0$. Предполагается, что в начальный момент колонна и груз на ее конце находились в состоянии покоя. Согласно рис.1 первоначальное смещение точки опоры колонны вместе с системой координат направлено влево, что приводит к смещению груза относительно системы координат *xy* вправо.

Рис.4

Таким образом, на первом этапе движения груза $\nu > 0, \dot{\nu} > 0$, откуда следует $\beta > 0, \dot{\beta} > 0$, т.е. этап движения соответствует первому этапу изгиба консоли. Используя [3], определяем коэффициенты $B_{(i)k}$ разложения (3), а затем приступаем к решению уравнения (6). Равенство $\dot{\beta} = 0$ означает конец первого этапа и начало второго. Далее все производится аналогично предыдущему примеру. На рис.4 представлены графики движения груза при различных значениях $\lambda = \nu/\omega_0$. Кривая 1 соответствует $\lambda = 0.4$, кривая 2 – $\lambda = 0.7$ и кривая 3 – $\lambda = 1$. Сразу можно заметить, что при малых λ центр колебаний смещен в сторону первоначального смещения груза. При увеличении λ центр смещается к точке $\nu = 0$.

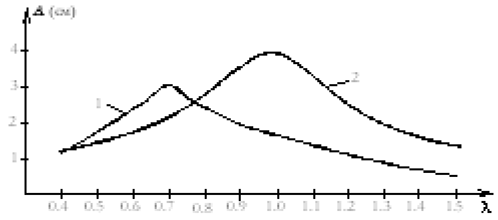

Рис.5

На рис.5 представлены значения амплитуд установившихся нелинейных колебаний в зависимости от $\lambda = \nu/\omega_0$ (кривая 1). Для сравнения приведена кривая 2 зависимости амплитуд линейных колебаний при том же возбуждении колебаний. Для линейных колебаний введено вязкое сопротивление, коэффициент которого может быть определен из соотношения $\gamma = \psi\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,/2\pi$, где ψ – коэффициент поглощения энергии, представляющий собой отношение потери упругой энергии за цикл к упругой энергии в начале цикла [4]. В соответствии с [4] для железобетонных балок ψ принимается равным 0,56.

Вывод. Остаточные деформации существенно влияют на характер нелинейных колебаний железобетонных балок.

Summary

It is well known that concrete has different characteristics of deformation when it is compressed or stretched and when a load is growing or subsiding. In this article an investigation of nonlinear oscillations of RC cantilever has been carried out with taking into account mentioned above properties of concrete.

1.Фомин В.М. Нестационарные колебания груза на консоли с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 30, – Одесса, 2008, – с. 301 – 310. 2. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М: Стройиздат, 1996.– 416 с. 3. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом загружении (1,2,3) // Вісник ОДАБА. Вып. , – Одесса, 2009.– с. 4. Киселев В.А. Строительная механика Специальный курс(динамика и устойчивость сооружений) М: Стройиздат, 1964. – 332 с.