УДК 624.072.233

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

Чайковський Р.Э., Ковров А.В. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Приведено сравнение данных экспериментов по определению частот собственных колебаний неразрезной железобетонной балки с результатами расчетов по методике, предлагаемой Е.С.Сорокиным и при помощи методики, основанной на численно-аналитическом варианте МГЭ.

В работах [1, 2] Е.С.Сорокин приводит экспериментальные данные динамических испытаний железобетонных балок перекрытий.

На рис.1 и рис.2 приведена схема и армирование испытанной балки.

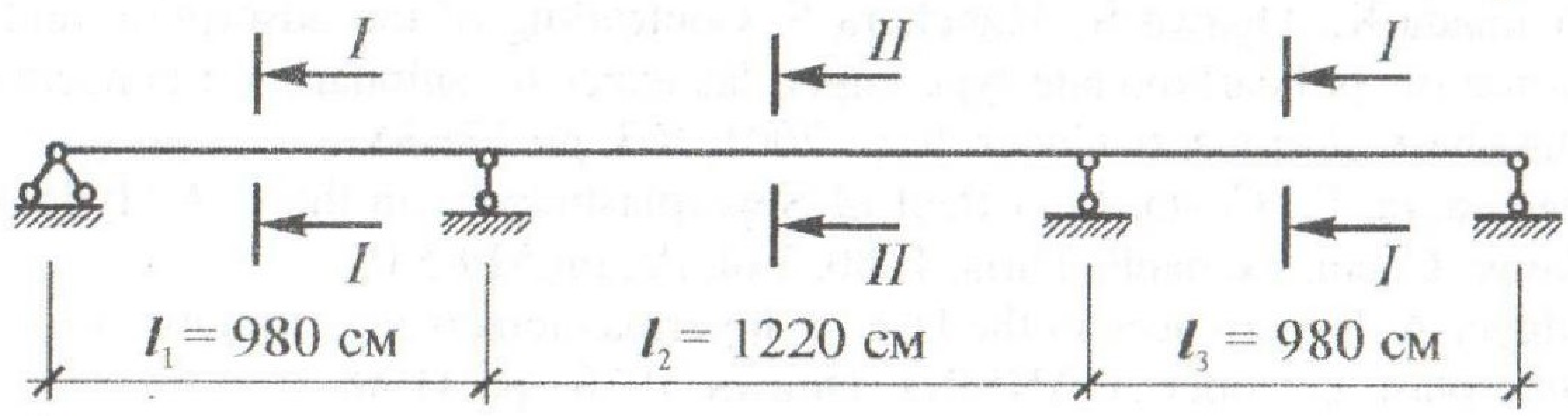

Рис. 1.

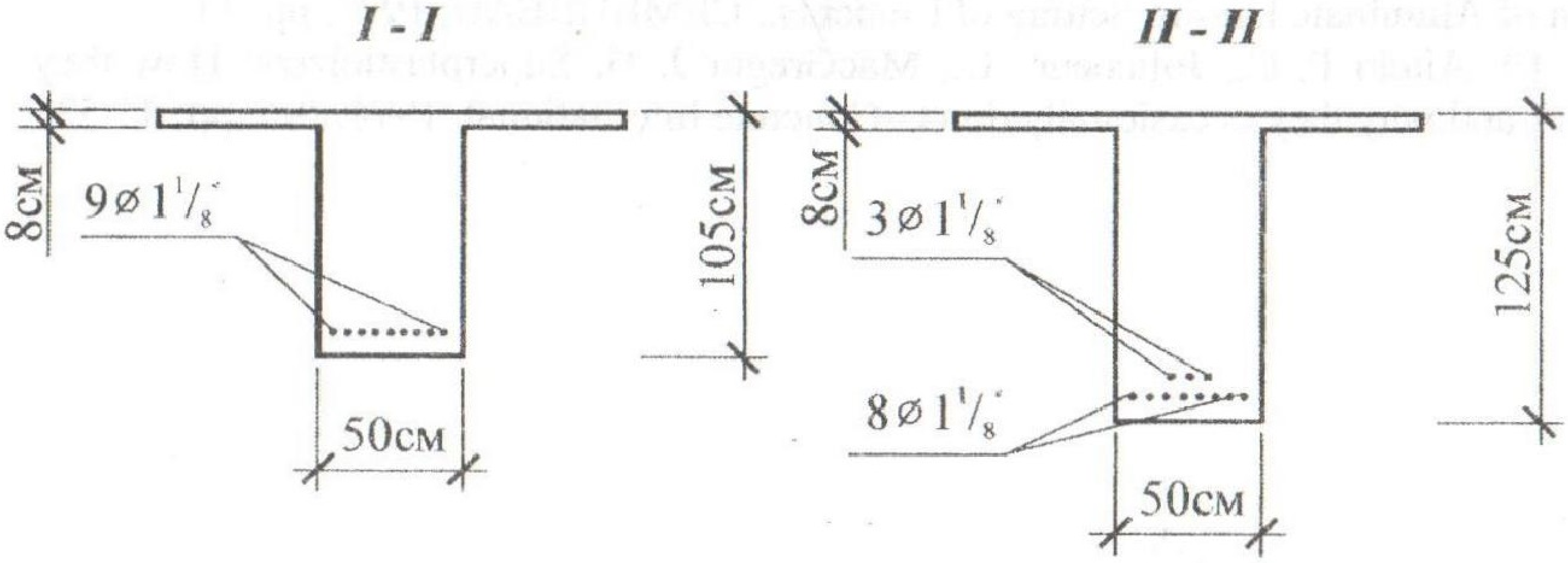

Рис. 2.

Одной из основных целей динамических испытаний было определение первой частоты собственных колебаний.

Для определения расчетной величины первой частоты собственных колебаний Е.С.Сорокин использует предложенную им формулу:

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EI}{m + \frac{M}{l}s}}, \tag{1}$$

где: f_1 – основная частота (техническая);

l – длина пролета;

EI – изгибная жесткость балки;

m – равномерно распределенная масса;

M – масса сосредоточенного груза;

s – число равных участков, на которые делится сосредоточенными грузами пролет балки.

Рассмотрим определение частот собственных колебаний при помощи численно-аналитического варианта МГЭ, предложенного в работах [3, 4], для неразрезной железобетонной балки переменной жесткости и погонной массы таврового сечения, расчетная схема которой приведена на рис.3.

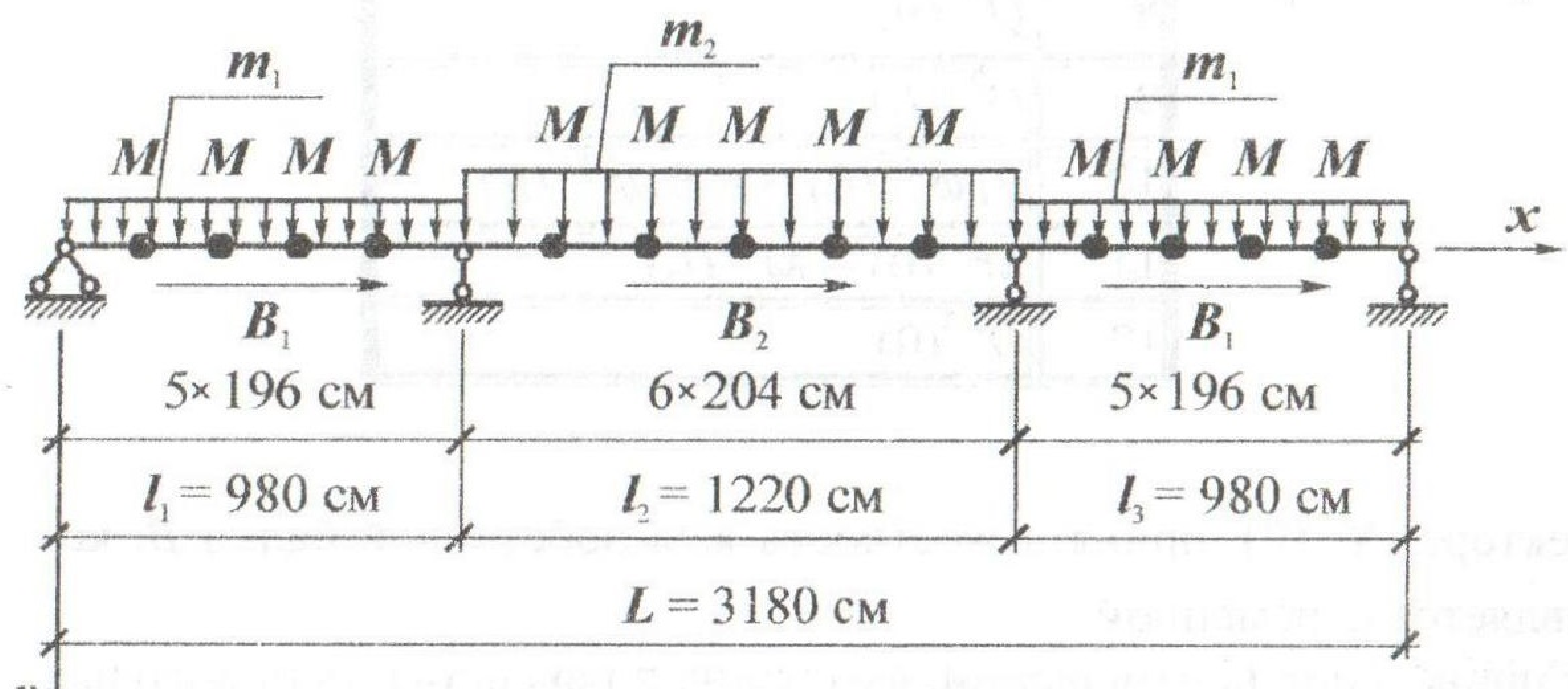

Рис. 3.

При определении собственных частот решение приближенного дифференциального уравнения поперечных колебаний балки по стандартному алгоритму, изложенному в работах [3, 4], приводится к следующему виду:

$$A^*(l_i)\cdot X^*(0)=0, \qquad (2)$$

где: $A^*(l_i)$ – матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций с наложенными компенсирующими элементами (матрица коэффициентов);

$X^*(0)$ – вектор неизвестных граничных элементов.

Для данной трехпролетной железобетонной балки вектор $X^*(0)$ имеет вид:

$$X^*(0)=\begin{array}{|l|l|}\hline 1 & Q^{0\text{-}1}(l_1)\\ \hline 2 & B_1\varphi^{0\text{-}1}(0)\\ \hline 3 & Q^{1\text{-}2}(l_2)\\ \hline 4 & Q^{0\text{-}1}(0)\\ \hline 5 & B_1\varphi^{2\text{-}3}(l_3)\\ \hline 6 & B_2\varphi^{1\text{-}2}(0)=n_1B_1\varphi^{0\text{-}1}(l_1)\\ \hline 7 & M^{1\text{-}2}(0)=M^{0\text{-}1}(l_1)\\ \hline 8 & Q^{1\text{-}2}(0)\\ \hline 9 & Q^{2\text{-}3}(l_3)\\ \hline 10 & B_1\varphi^{2\text{-}3}(0)=n_2B_2\varphi^{1\text{-}2}(l_2)\\ \hline 11 & M^{2\text{-}3}(0)=M^{1\text{-}2}(l_2)\\ \hline 12 & Q^{2\text{-}3}(0)\\ \hline\end{array} \qquad (3)$$

В векторе $X^*(0)$ принята жесткость железобетонной балки B, которая является переменной.

Для приведения перемещений, входящих в равенства, суть которых уравнения неразрывности, к одному масштабу жесткости, введены следующие отношения:

$$n_1=\frac{B_2}{B_1},\quad n_2=\frac{B_1}{B_2}. \qquad (4)$$

Для учета переменной жесткости в матрице $A^*(l_i)$ вводятся отношения жесткости текущего участка к жесткости последующего:

$$N_1 = \frac{1}{n_1} = \frac{B_1}{B_2}, \quad N_2 = \frac{1}{n_2} = \frac{B_2}{B_1}. \qquad (5)$$

С учетом (5) матрица коэффициентов $A^*(l_i)$ имеет вид:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 & A_{12} & & -A_{14} & & & & & & & & \\
 & A_{11} & & -A_{13} & & -N_1 & & & & & & \\
 & -\lambda_1^4 A_{14} & & A_{12} & & & -1 & & & & & \\
-1 & -\lambda_1^4 A_{13} & & A_{11} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} & & & & \\
 & & & & & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & & -N_2 & & \\
 & & & & & -\lambda_2^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} & & & -1 & \\
 & & -1 & & & -\lambda_2^4 A_{13} & \lambda_2^4 A_{14} & A_{11} & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\
 & & & & -1 & & & & & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\
 & & & & & & & & & -\lambda_3^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\
 & & & & & & & & -1 & -\lambda_3^4 A_{13} & \lambda_3^4 A_{14} & A_{11}
\end{array}\right| \qquad (6)$$

Параметр λ для каждого из участков неразрезной балки, с учетом соотношения $\omega = 2\pi f$, определяется следующим образом:

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m_1}{B_1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m_2}{B_2}}, \quad \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m_1}{B_1}}. \qquad (7)$$

Система (2) имеет нетривиальное решение $X^*(0) \neq 0$, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\left|A^*(\omega)\right| = 0. \qquad (8)$$

Решая уравнение (8) с применением методики, предложенной в работе [6], получим спектр частот собственных колебаний.

Исходные данные для определения частот собственных колебаний неразрезной трехпролетной железобетонной балки таврового сечения (согласно работам [1, 2]):

$\ell_1 = 980$ см; $\ell_2 = 1220$ см; $\ell_3 = 980$ см;

$m_1 = 0{,}042472245$ $кГ \cdot с^2 / см^2$; $m_2 = 0{,}043818197$ $кГ \cdot с^2 / см^2$;

При $E_1 = E_2 = 180000$ $кГ / см^2$:

$B_1 = 19134 \cdot 10^8$ $кГ \cdot см^2$; $B_2 = 32976 \cdot 10^8$ $кГ \cdot см^2$;

При $E_1 = E_2 = 200000$ $кГ / см^2$:

$B_1 = 21260 \cdot 10^8$ $кГ \cdot см^2$; $B_2 = 36640 \cdot 10^8$ $кГ \cdot см^2$.

Результаты динамических испытаний, а также результаты, полученные по изложенным выше методикам, сведены в табл.1.

В методике с использованием численно-аналитического варианта МГЭ было найдено первые пять частот собственных колебаний неразрезной балки.

Таблица 1

№ собств. частот	$E_б$ (из опыта), кг/см^2	Число колебаний в секунду f								
		Опытное	расчетное							
			по формуле в работах [1, 2]				по предложенной методике			
			при $E_б$ опытном		при $E_б$=200000 кг/см^2		при $E_б$ опытном		при $E_б$=200000 кг/см^2	
				%		%		%		%
1	180000	10,2	10,3	+1	10,9	+6,9	10,05	-1,5	10,59	+3,8
2		-	-	-	-	-	14,51	-	15,30	-
3		-	-	-	-	-	18,28	-	19,27	-
4		-	-	-	-	-	39,83	-	41,99	-
5		-	-	-	-	-	50,48	-	53,21	-

Выводы

1. Расчетное значение первой частоты собственных колебаний, определенное при помощи числено-аналитического варианта МГЭ, практически совпадает с полученным экспериментальным.
2. В данных экспериментов не указано армирование балки на опорах. Уточнение характера армирования на опорах может позволить определить более точное значение частот собственных колебаний.
3. Предложенная методика определения частот собственных колебаний неразрезной железобетонной балки при помощи численно-аналитического варианта МГЭ позволяет определить любое наперед заданное количество частот с любой заданной точностью вычислений.

Литература

1. Сорокин Е.С. Динамика междуэтажных перекрытий. – Москва-Ленинград: Госстройиздат, 1941. – 240с.
2. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – Москва: Госстройиздат, 1956. – 340с.
3. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288с.
4. Оробей В. Ф., Ковров А.В. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов. – Одесса, 2004. – 122с.
5. Яременко А.Ф., Оробей В.Ф., Ковров А.В., Чайковский Р.Э. Собственные колебания железобетонной балки на упруго податливых опорах. // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону. Будівельні конструкції. – Киев: НДІБК, 2005. – Том 1. – С. 399–403.
6. Ковров А.В., Болгар А.Ю., Чайковский Р.Э. Методика определения частот собственных колебаний неразрезной балки при помощи метода граничных элементов. // Вісник ОДАБА. – Одесса, 2005. – № 18. – С. 109–115.