

УДК 691.328:539.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЛОИСТОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

Клованич С.Ф. (*Одесский национальный морской университет*)

Безушко Д.И. (*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса, Украина*)

Представлена реализация криволинейного изопараметрического слоистого конечного элемента, для расчета железобетонных плит и оболочек, с учетом физически нелинейных свойств материала.

Введение

Расчет плит и оболочек ведется, как известно, на базе прикладных технических теорий, позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Очевидно, что реализация подобного подхода, в основе которого лежит исследование поведения срединной поверхности плиты или оболочки, в МКЭ обуславливает появление специфических конечных элементов. В большинстве случаев, для построения матриц, характеризующих такие элементы, используются соответствующие соотношения теории плит и оболочек, основанных на априорных гипотезах об изменении напряженно-деформированного состояния по толщине. Причем имеется целый ряд таких теорий, отличающихся характером и степенью обоснованности вводимых допущений. Наиболее распространенными из них являются теория тонких плит и оболочек Кирхгофа-Лява, средней толщины С.П.Тимошенко, Э.Рейсснера. Однако, железобетонные плиты и оболочки трудно отнести к классу тонких или средней толщины, во-первых, из-за их геометрических размеров, во вторых, из-за существенной неоднородности материала, наличия арматуры, трещин и т.д. Более того, с точки зрения МКЭ каждый конечный элемент, являясь частью системы, дол-

жен рассматриваться как отдельная конструкция в ее составе, соотношение его геометрических размеров должно отвечать требованиям, при которых допустимо использование кинематических и статических гипотез. Кроме того, при помощи технических теории невозможно объяснить образование не только нормальных, но и наклонных трещин, появление напряжений в поперечной арматуре, проскальзывание арматурных стержней в трещине относительно бетона, в результате которого происходит их раскрытие, сдвиг отдельных блоков бетона, образуемых смежными трещинами и т.д.

Перечисленные особенности деформирования железобетона могут быть учтены только с привлечением аппарата общей трехмерной теории с использованием всей совокупности компонент напряжений и деформаций. Поэтому, на наш взгляд, необходим комплексный подход, сочетающий, с одной стороны, часть гипотез технической теории изгиба, с другой – соотношения общей механики. Основой такого подхода могут служить специальные конечные элементы, построенные на базе стандартных объемных элементов, но учитывающие особенности аппроксимации геометрии и перемещений по толщине.

Описание конечного элемента

Рассмотрим объемный конечный элемент в виде криволинейной параллелепипеда или гексаэдра (рис.1) в местных нормализованных криволинейных координатах ξ, η, ζ или L_1, L_2, L_3, ζ , значения которых находятся в пределах от -1 до 1, при этом $\zeta = \pm 1$ соответствуют верхней и нижней поверхности элемента. Поверхности криволинейны, а поперечные сечения образованы прямыми линиями. Связь между этими координатами и общими декартовыми может быть представлена

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum C_k(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}_{\text{средн}} + \sum C_k(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} V_{3k}; \quad (1)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты узлов в уровне срединной поверхности ($k=1,2,3 \dots n$), n - общее число узлов элемента, $C_k(\xi, \eta)$ - интерполяционные функции перемещений в уровне срединной поверхности, V_{3k} - вектор нормали к срединной поверхности в точке k .

$$V_{3k} = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{\text{верхн.}} - \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{\text{нижн.}} \quad (2)$$

В случае гексаэдра интерполяционные функции будут зависеть от нормализованных L-координат $C_k(L_1, L_2, L_3)$. Отметим, что в дальнейшем для общности изложения аргументы интерполяционных функций будем опускать, считая все соотношения справедливыми как для криволинейного параллелепипеда, так и для гексаэдра. Несмотря на то, что данный элемент является частным случаем объемного элемента, тем не менее, наличие только двух узлов в направлении толщины приводит к тому, что изменение перемещений в этом направлении долж-

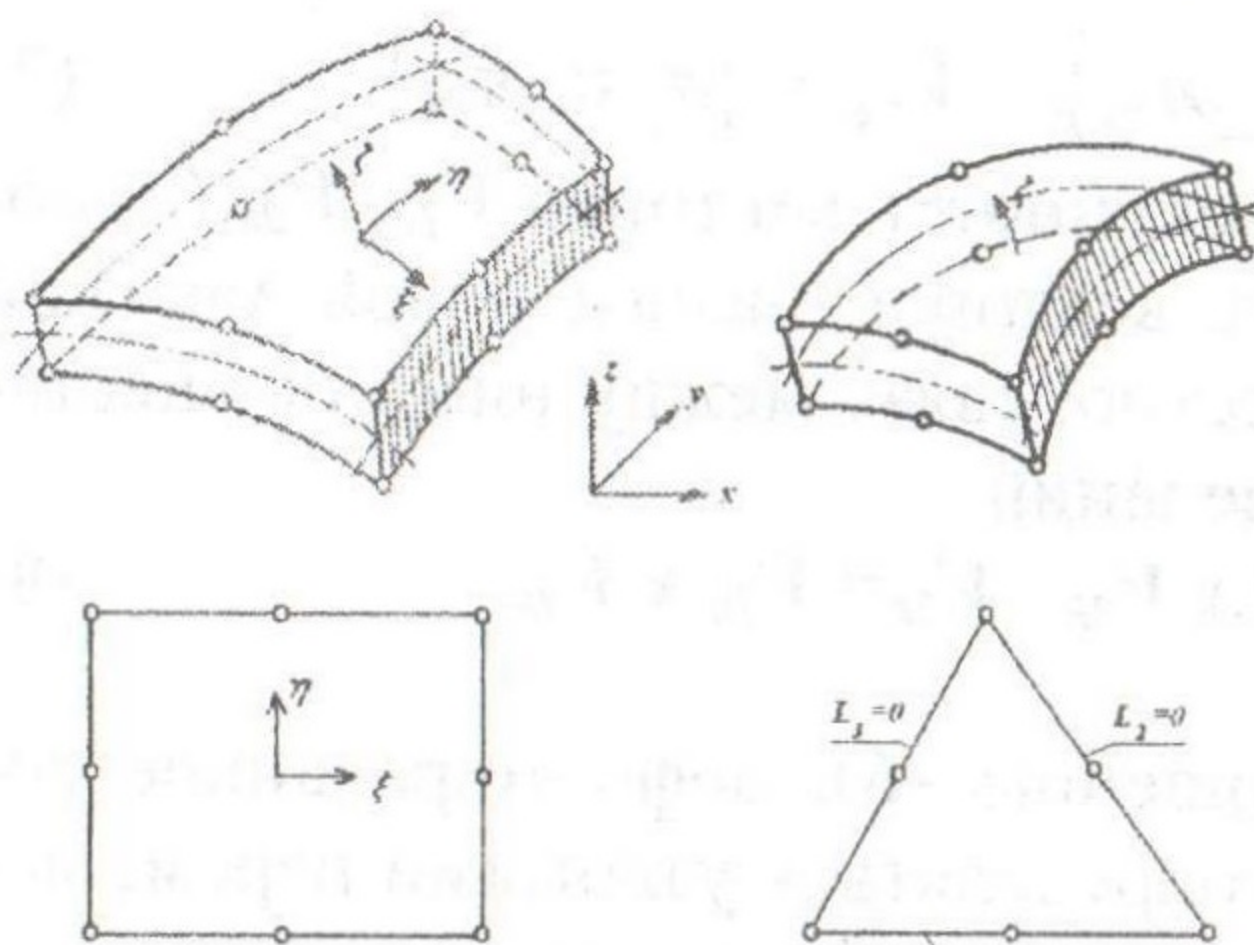


Рис.1. Конечные элементы

но описываться линейными функциями, что отвечает гипотезе о прямолинейности нормали, принятой во всех технических теориях изгиба. Кроме того, это дает возможность принять в качестве узлов не точки по углам элемента, а линии-нормали к срединной поверхности до ее деформации. В результате, вектор узловых перемещений, например в k -ом узле элемента

записывается так

$$\{q(\zeta)\}_k = \{u_k(\zeta)v_k(\zeta)w_k(\zeta)\}. \quad (3)$$

Ясно, что компонентами в (3) являются перемещения точек нормали, зависящие от нормализованной координаты ζ . Для всего элемента

$$\{q(\zeta)\} = \{\{q(\zeta)\}_j, \{q(\zeta)\}_k, \dots, \{q(\zeta)\}_n\}, \quad (4)$$

где n - число узлов в элементе.

Очевидно, что переход от (4) к перемещениям по области рассматриваемого элемента, пользуясь методом разделения переменных, можно представить в виде

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [[C]_j, [C]_k, \dots, [C]_n] \begin{Bmatrix} \{q(\zeta)\}_j \\ \{q(\zeta)\}_k \\ \dots \\ \{q(\zeta)\}_n \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

В работе [1] было показано, что даже в случае достаточно толстых оболочек использование линейного закона для $\{q_k(\zeta)\}$, что эквивалентно гипотезе о прямолинейности нормали, дает удовлетворительные результаты. Поэтому принимаем такой закон и, пренебрегая, как и в случае тонких оболочек, деформациями в направлении толщины элемента запишем

$$\{q_k(\zeta)\} = \begin{Bmatrix} u_{ok} \\ v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} - \frac{\zeta h}{2} \begin{bmatrix} n_{12} & n_{11} \\ n_{22} & n_{21} \\ n_{32} & n_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu_k \\ \psi_k \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Здесь n_{ij} - направляющие косинусы нормали к срединной поверхности k -ом узле. Для определения направляющих косинусов n_{ij} введем следующие обозначения

$$V_{1k} = \{n_{21} n_{22} n_{23}\}; \quad V_{2k} = \{n_{11} n_{12} n_{13}\}. \quad (7)$$

Совместно с вектором V_{3k} (2) совокупность векторов V_{1k}, V_{2k} (7) образует тройку взаимортогональных векторов базиса новой местной системы координат (рис.2). Как известно, связь между ними осуществляется с помощью векторных произведений

$$V_{1k} = i \times V_{3k}, \quad V_{2k} = V_{1k} \times V_{3k}, \quad (8)$$

где $i = \{1 \ 0 \ 0\}$.

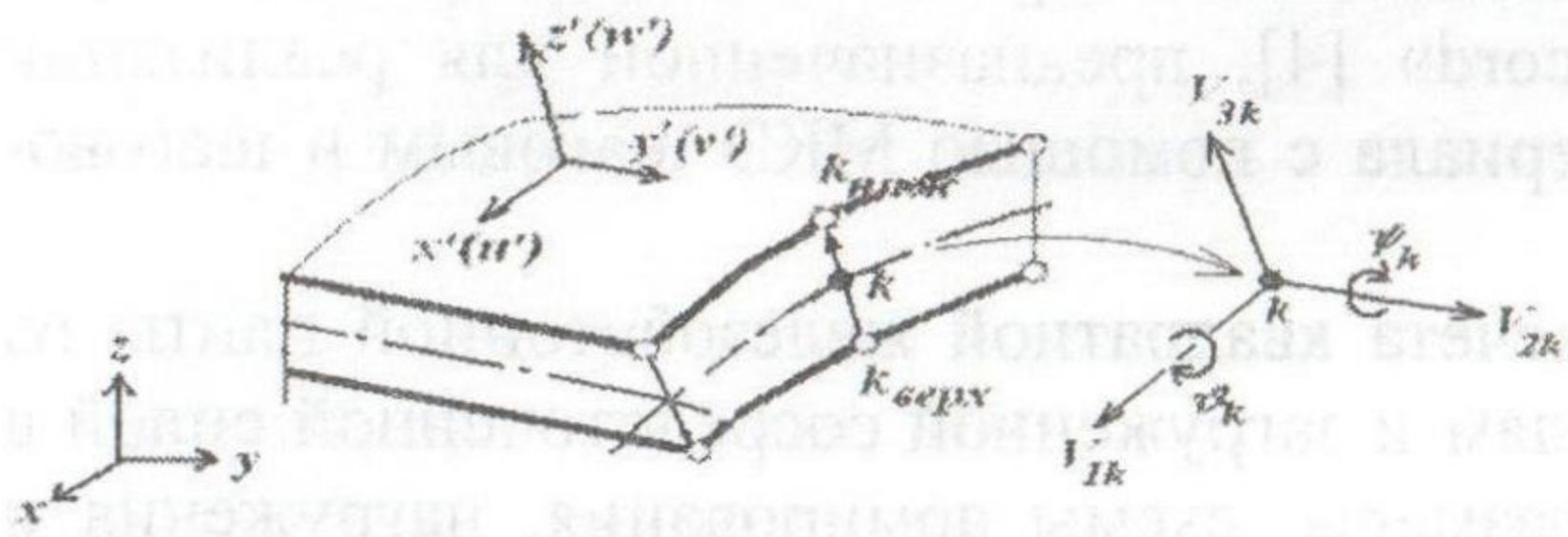
Таким образом, согласно соотношению (6), деформированное состояние элемента будет однозначно определяться узловыми перемещениями в уровне срединной поверхности, составляющими которых в каждом k -ом узле являются - три линейных перемещения u_{ok}, v_{ok}, w_{ok} и два угла поворота ψ_k и ν_k .

Отметим, что в общем случае направление оси ζ не совсем точно совпадает с направлением нормали к срединной поверхности, тем не менее, как показано в [1], это не вызывает существенных погрешностей при расчете конструкций. Также следует подчеркнуть, что если геометрия элемента определяется в соответствии с уравнением (1) координатами узлов на нижней и верхней поверхностях общим числом для каждого узла-линии равным шести, то его деформированное состояние определяется компонентами узловых перемещений по пять в каждом узле. Следовательно данный элемент следует отнести к элементам суперпараметрического вида [1].

Определив геометрию и перемещения элемента, можно найти его деформации. В общем виде связь между узловыми перемещениями элемента $\{q\} = \{\{q\}_j \{q\}_k \dots \{q\}_n\}$, где $\{q\}_k = \{u_{ok} v_{ok} w_{ok} \nu_k \psi_k\}$ и деформациями $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}\}$ в системе координат x, y, z имеет вид

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}. \quad (9)$$

Поскольку здесь используются основные гипотезы технической теории, то в местной ортогональной системе координат



где ось z' — нормаль к срединной поверхности, а оси y' и x' ей перпендикулярны, деформациями в направлении оси z' можно пренебречь. Поэтому

Рис.2. Системы координат и узловые перемещения

связь между деформациями и перемещениями целесообразно записать сначала именно в этой системе координат с последующим переходом в общую глобальную систему

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x' & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y' & 0 \\ \partial/\partial y' & \partial/\partial x' & 0 \\ 0 & \partial/\partial z' & \partial/\partial y' \\ \partial/\partial z' & 0 & \partial/\partial x' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Определяющие соотношения

До сих пор, все построения для элемента были связаны с его деформированным состоянием. Описание напряженного состояния невозможно без учета механических свойств материалов. Так, если для изменение деформаций по толщине оболочки определяется в соответствии с гипотезой о прямолинейности нормали, то принять аналогичный линейный закон для нормальных напряжений в случае физически нелинейного материала, каким является железобетон, было бы ошибкой, напряжения непропорциональны деформациям, а матрица механических характеристик железобетона меняется по толщине оболочки и является функцией $[D(\zeta)]$. При этом для каждого значения ζ должна быть установлена своя матрица механических характеристик, осуществляющая связь между напряжениями и деформациями, т.е.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (11)$$

Для получения матрицы $[D]$ используются соотношения деформационной теории пластичности железобетона, описанной в работе [3].

Пример расчета

Данный элемент реализован в версии «Plast-Khan» пакета прикладных программ «Concord» [4], предназначенной для реализации нелинейных моделей материала с помощью МКЭ шаговым и шагово-итерационным методами.

Рассмотрим пример расчета квадратной железобетонной плиты из опытов [4], опертой по углам и нагруженной сосредоточенной силой в центре. Геометрические размеры, схемы армирования, нагружения и расчетная представлены на рис.3. Исходные характеристики материалов: $R_b = 43$ МПа, $R_{bt} = 3$ МПа, $E_b = 16400$ МПа, предельные деформации сжатия $\varepsilon_b = 0.0035$, растяжения - $\varepsilon_{bt} = 0.0002$, $E_s = 201000$ МПа, $R_s = 6700$ МПа. По высоте плита разбивалась на 10 слоев.

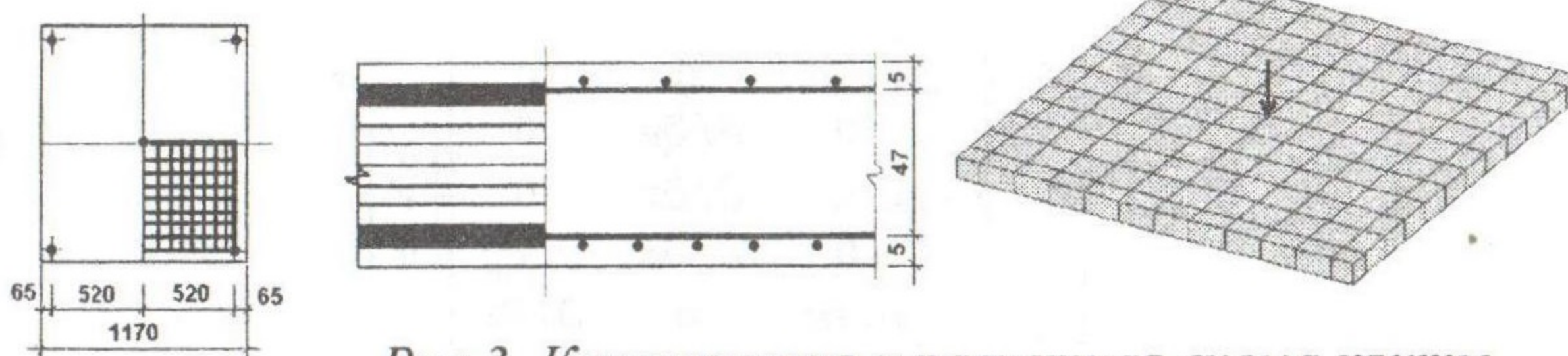


Рис.3. Конструкция и расчетная схема плиты

Рабочая арматура располагалась в 2 и 9 слоях, указанных на рисунке. При этом коэффициент армирования для нижней арматуры принимался равным $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.06$, для верхней $\mu_{sx} = \mu_{sy} = 0.03$. Нагружение осуществлялось ступенями по $\Delta P = 1.3$ кН вплоть до разрушения. Расчет велся шагово-итерационным методом. Результаты расчетов представлены на рис.4-5. Здесь же, на рис.4 дано сопоставление с опытными данными по прогибам.

Вывод

Описанный выше элемент, являясь достаточно точным для описания напряженно-деформированного состояния оболочек средней толщины и толстых, тем не менее, в отдельных случаях дает погрешности в тех областях конструкции, где велико влияние нормальных напряжений по площадкам, перпендикулярным срединной поверхности, например, в приопорных зонах, зонах приложения сосредоточенных сил и т.д. В этом случае расчет необходимо осуществлять в трехмерной постановке с использованием всех шести составляющих компонент

напряжений и деформаций с отказом от гипотезы о недеформируемости нормали.

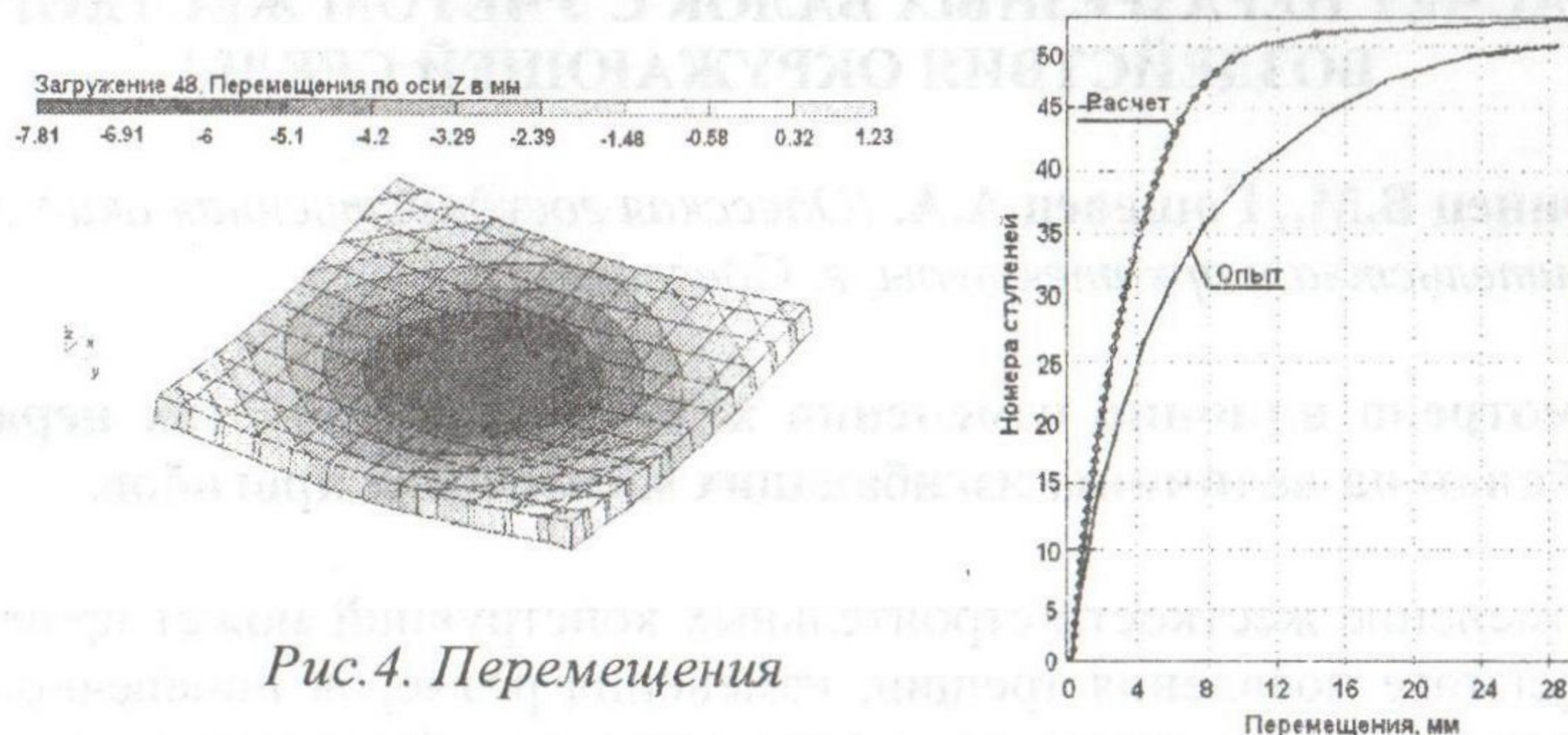


Рис.4. Перемещения

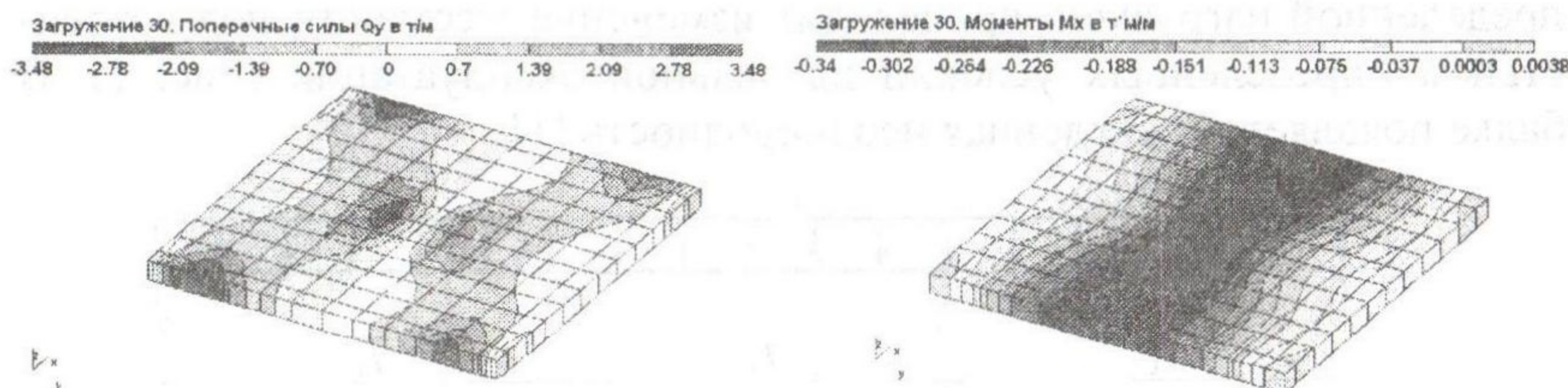


Рис.5. Усилия

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. –М.:Мир, 1977. – 541 с.
2. Балан Т.А., Раздорожная О.В. Расчет анизотропных слоистых оболочек методом конечных элементов// Проблемы прочности. – 1985. -№ 7. – С. 103-108.
3. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Численный эксперимент по исследованию деформационных теорий пластичности бетона//Вестник Одесской госакадемии строительства и архитектуры. - вып. 22, 2006. – С. 122-130.
4. Клованич С.Ф. Модель прочности и деформаций бетона и грунта при сложном напряженном состоянии // Строительные конструкции / Меж вед. н.-т. сб., Вып. 59. –Киев, НИИСК, 2003. -С.163-170.
5. Duddeck H., Griebenon G., Schaper G. Material and time dependent non-linear behavior of cracks concrete slab// Nonlinear behavior of reinforced concrete spatial structures. – v.1.- Priliminary Report, IASS Symp., Darmstadt, 1978.