

**АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА БАЛОК НА УПРУГОМ
ОСНОВАНИИ ПРИ ПОМОЩИ
МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Ковров А.В., Болгар А.Ю., Островидова Е.А. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса).

Изложен алгоритм автоматизации расчета балок на упругом основании при помощи метода граничных элементов на основе модели Винклера, а также сравнительный анализ результатов расчета балки на упругом основании с помощью данного метода и расчета на основе модели упругого полупространства.

Дифференциальное уравнение изгиба стержня постоянного поперечного сечения на упругом основании с моделью Винклера имеет вид:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + kv(x) = q(x); \quad (1)$$

где: EI – поперечная жесткость балки в кНм²;
 $v(x)$ – поперечный прогиб стержня в м;
 k – коэффициент постели в кН/м³;
 b – ширина подошвы стержня в м;
 $q(x)$ – поперечная нагрузка в кН/м.

Решение уравнения (1) по стандартному алгоритму, изложенному в работах [1], [2], приводится к матричному виду:

$$Y = A X(0) + B, \quad (2)$$

где: Y – матрица усилий и перемещений в произвольном сечении;
 A – матрица коэффициентов системы уравнений изгиба;
 $X(0)$ – матрица усилий и перемещений в начале (матрица начальных параметров);
 B – матрица внешней нагрузки.

Начальные параметры определяются из граничных условий: условий опирания и уравнений равновесия. Выражения для определения фундаментальных функций A_{ij} , приведенных в работе [3], имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A_{11}(\lambda, x) &= ch\lambda x \cos \lambda x; \quad A_{12}(\lambda, x) = (ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x) \\
 A_{13}(\lambda, x) &= \frac{1}{2\lambda^2} sh\lambda x \cos \lambda x; \quad A_{14}(\lambda, x) = \frac{1}{4\lambda^3} (ch\lambda x \sin \lambda x - sh\lambda x \cos \lambda x); \\
 A_{21}(\lambda, x) &= -\lambda(ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x); \quad A_{31}(\lambda, x) = -2\lambda^2 sh\lambda x \sin \lambda x; \\
 A_{41}(\lambda, x) &= -2\lambda^3 (ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x); \\
 A_{15}(\lambda, x) &= \frac{1}{4\lambda^4} [H(\lambda x) - ch\lambda x \cos \lambda x].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Выражения для определения элементов вектора нагрузки B имеют вид:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \sum_{i=1}^n |_{a_i} M_i A_{13}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n |_{b_i} F_i A_{14}(\lambda, x - b_i) + \\
 (1) \quad &+ \sum_{i=1}^n |_{c_i} q_i A_{15}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n |_{d_i} q_i A_{15}(\lambda, x - d_i); \\
 B_{21} &= \sum_{i=1}^n |_{a_i} M_i A_{12}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n |_{b_i} F_i A_{13}(\lambda, x - b_i) + \\
 &+ \sum_{i=1}^n |_{c_i} q_i A_{14}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n |_{d_i} q_i A_{14}(\lambda, x - d_i); \\
 B_{31} &= \sum_{i=1}^n |_{a_i} M_i A_{11}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n |_{b_i} F_i A_{12}(\lambda, x - b_i) + \\
 (4) \quad &+ \sum_{i=1}^n |_{c_i} q_i A_{13}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n |_{d_i} q_i A_{13}(\lambda, x - d_i); \\
 B_{41} &= \sum_{i=1}^n |_{a_i} M_i [-4\lambda^4 A_{14}(\lambda, x - a_i)] + \sum_{i=1}^n |_{b_i} F_i A_{11}(\lambda, x - b_i) + \\
 (4) \quad &+ \sum_{i=1}^n |_{c_i} q_i A_{12}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n |_{d_i} q_i A_{12}(\lambda, x - d_i).
 \end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача сводится к решению системы из 4 линейных уравнений. Конечные параметры напряженно деформированного состояния в стержне можно определить, пользуясь уравнением:

$$Y(l) = A(l)X(0) + B(l), \tag{5}$$

где: $Y(l)$ – матрица усилий и перемещений в конце координат – вектор конечных параметров;

$A(l)$ – матрица коэффициентов;

$X(0)$ – матрица усилий и перемещений в начале координат – вектор начальных параметров;

$B(l)$ – матрица внешней нагрузки.

Ячейки квадратной матрицы коэффициентов A содержат фундаментальные функции, определяемые по формулам (3) с подстановкой вместо переменной x длины стержня l . Выполним равносильное преобразование уравнения (5):

$$A(l)X(0) - Y(l) = -B(l) \Rightarrow A^*(l)X^* = -B(l) \quad (6)$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных граничных параметров, которые содержались в матрицах $X(0)$ и $Y(l)$.

Вследствие преобразований матрицы $A^*(l)$ и X^* приобретают вид:

$$A^*(l) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -1 & \\ A_{21} & A_{11} & & -1 \\ -A_{31} & -A_{21} & & \\ -A_{41} & -A_{31} & & \end{bmatrix} \quad X^* = \begin{bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ EIv(l) \\ EI\varphi(l) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Авторами разработан алгоритма формирования матриц, входящих в уравнение (6), его блок-схема представлена ниже на рис. 1

Ввод длины балки l , коэффициента постели k , модуля упругости балки E , момента инерции I .

Определение параметра: $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kd}{4EI}}$

Формирование матрицы координат точек приложения внешних моментов $a(m \times 1): a(i, 1) = a_i$

Формирование матрицы значений внешних моментов $M(m \times 1): M(i, 1) = M_i$

Формирование матрицы коэффициентов системы уравнений изгиба балки $K1M(1 \times m), K2M(1 \times m), K3M(1 \times m), K4M(1 \times m):$
 $K1M(1, i) = A13(\lambda, l - a(i, 1)); K2M(1, i) = A12(\lambda, l - a(i, 1));$
 $K3M(1, i) = A11(\lambda, l - a(i, 1)); K4M(1, i) = -4\lambda^4 A14(\lambda, l - a(i, 1)).$

Формирование матрицы координат точек приложения сосредоточенных сил $b(f \times 1): b(i, 1) = b_i$

Формирование матрицы значений внешних моментов $F(m \times 1): F(i, 1) = F_i$

Формирование матрицы коэффициентов системы уравнений изгиба балки (FO)
 $K1F(1 \times f), K2F(1 \times f), K3F(1 \times f), K4F(1 \times f):$
 $K1F(1, i) = A14(\lambda, l - b(i, 1)); K2F(1, i) = A13(\lambda, l - b(i, 1));$
 $K3F(1, i) = A12(\lambda, l - b(i, 1)); K4F(1, i) = A11(\lambda, l - b(i, 1));$

Формирование матрицы координат начала приложения распределенных нагрузок $c(q \times 1): c(i, 1) = c_i$

Формирование матрицы координат окончания распределенных нагрузок $d(q \times 1): d(i, 1) = d_i$

Формирование матрицы значений распределенных нагрузок $Q(q \times 1): Q(i, 1) = Q_i$

Формирование матрицы коэффициентов системы уравнений изгиба балки
 $K1Qc(1 \times c), K1Qd(1 \times d), K2Qc(1 \times c), K2Qd(1 \times d),$
 $K3Qc(1 \times c), K3Qd(1 \times d), K4Qc(1 \times c), K4Qd(1 \times d):$
 $K1Qc(1, i) = A15(\lambda, l - c(i, 1)); K1Qd(1, i) = A15(\lambda, l - d(i, 1));$
 $K2Qc(1, i) = A14(\lambda, l - c(i, 1)); K2Qd(1, i) = A14(\lambda, l - d(i, 1));$
 $K3Qc(1, i) = A13(\lambda, l - c(i, 1)); K3Qd(1, i) = A13(\lambda, l - d(i, 1));$
 $K4Qc(1, i) = A12(\lambda, l - c(i, 1)); K4Qd(1, i) = A12(\lambda, l - d(i, 1)).$

Определение элементов грузовой матрицы:

$$\begin{aligned} B(1,1) &= -1(K1M \cdot M + K1F \cdot F + K1Q_c \cdot Q - K1Q_d \cdot Q); \\ B(2,1) &= -1(K2M \cdot M + K2F \cdot F + K2Q_c \cdot Q - K2Q_d \cdot Q); \\ B(3,1) &= -1(K3M \cdot M + K3F \cdot F + K3Q_c \cdot Q - K3Q_d \cdot Q); \\ B(4,1) &= -1(K4M \cdot M + K4F \cdot F + K4Q_c \cdot Q - K4Q_d \cdot Q). \end{aligned}$$

Формирование матрицы коэффициентов $A^*(4,4)$:

$$\begin{aligned} A(1,1) &= A11(\lambda, l); \quad A(1,2) = A12(\lambda, l); \quad A(2,1) = A21(\lambda, l); \quad A(2,2) = A11(\lambda, l); \\ A(3,1) &= A31(\lambda, l); \quad A(3,2) = -A21(\lambda, l); \quad A(4,1) = -A41(\lambda, l); \\ A(4,2) &= -A31(\lambda, l); \quad A(1,3) = -1; \quad A(2,4) = -1. \end{aligned}$$

Определение матрицы граничных параметров X^* из уравнения

$$A^*(l)X^* = -B(l)$$

Рис. 1. Блок-схема алгоритм формирования матриц МГЭ

В результате решения уравнения краевой задачи вычисляется матрица граничных параметров X^* . Значения начальных параметров можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} EIv(0) &= X^*(1,1); \\ EI\varphi(0) &= X^*(2,1). \end{aligned} \tag{8}$$

Далее при помощи метода начальных параметров определяются усилия и перемещения в любом сечении балки.

Авторами создана программа расчета балок на упругом основании в системе компьютерной математики MatLab, реализующая описанный метод расчета. Программа позволяет рассчитывать балки, лежащие на упругом основании, загруженные произвольным количеством внешних моментов, сосредоточенных сил и распределенных нагрузок.

Рассмотрим балку на упругом основании, расчет которой приведен в [4]. Железобетонный ленточный фундамент длиной 14м, шириной 1м имеет квадратное сечение. Расчетная схема приведена на рис.2. Модуль деформации грунта (песок средней крупности при коэффициенте пористости $e = 0,45$) $E_0 = 50$ МПа; марка бетона М 250; $E_I = 26500$ МПа; $R_{np} = 9,5$ МПа; арматура класса А-II ($R_a = 270$ МПа); с площадью поперечного сечения $A_a = 47,5$ см², $m_{\sigma l} = 0,85$ (нагрузка с

малой суммарной длительностью отсутствует). Исследования авторов позволяют принять для данного основания коэффициент постели $k=100000 \text{ кН/м}^2$ при расчете по предложенной выше методике.

На рис.2 приведены эпюры изгибающих моментов.

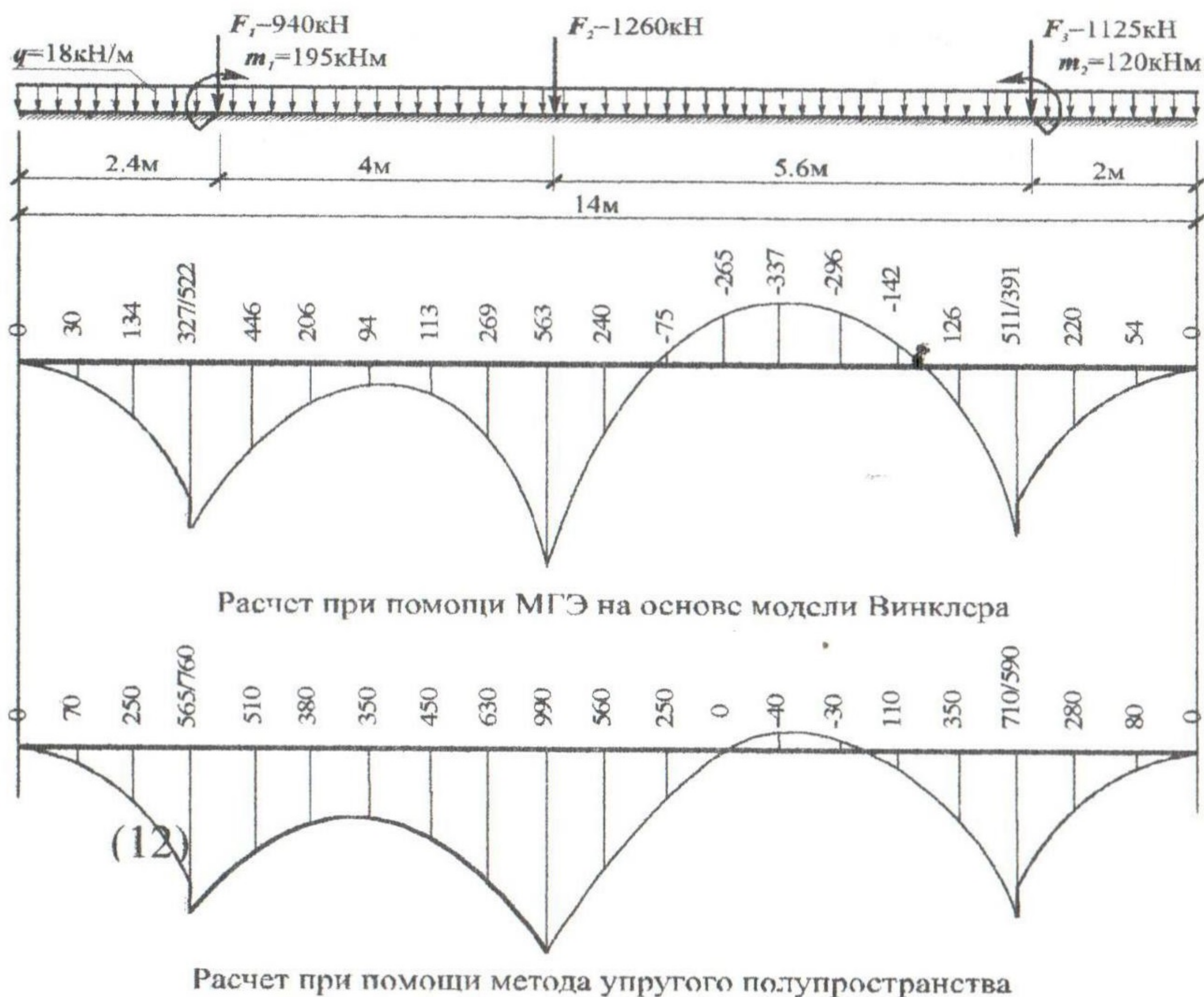


Рис.2. Расчетная схема балки, эпюры изгибающих моментов различных способов расчета

В силу особенностей принятых моделей результаты расчетов закономерно отличаются.

Сравнительная таблица изгибающих моментов балки, рассчитанной предложенными выше способами:

Сечение x , м		0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2
Изг. момент M , кНм	МГЭ	0	30	134	327	446	206	94
	[4]	0	70	250	760	510	380	350

Сечение x , м		4,9	5,6	6,3	7,0	7,7	8,4	9,1
Изг. момент M , кНм	МГЭ	113	269	563	240	-75	-256	-337
	[4]	450	630	990	560	250	0	-40

Сечение x , м		9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14
Изг. момент M , кНм	МГЭ	-296	-142	126	511	220	54	0
	[4]	-30	110	350	590	280	80	0

Выводы

1. Разработан алгоритм автоматизации формирования матриц, уравнения МГЭ описывающего изгиб стержня постоянного поперечного сечения на упругом основании с моделью Винклера.

2. На основе алгоритма составлена программа в системе компьютерной математики MatLab, позволяющая рассчитывать балки, лежащие на упругом основании, загруженные произвольным количеством внешних нагрузок.

Литература

1. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 704с.
2. Оробей В. Ф., Ковров А. В. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: Учебное пособие – Одесса, 2004. – 122 с.
3. Оробей В.Ф., Ковров А.В. Расчет балок на упругом винклеровском основании при помощи метода граничных элементов. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип.№16 Одеса, ОДАБА 2004, С.165-170.
4. Горбунов-Пасадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. – Москва: Стройиздат, 1984. – 679с.