

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОПОЛЗНЕВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ  
ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

**Гришин А.В.<sup>1</sup>, д.т.н., проф., Гришин В.А.<sup>2</sup>, д.т.н., проф.**

<sup>1</sup>*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

<sup>2</sup>*Одесский национальный морской университет*

Так как грунты склонов являются нелинейной сложной средой, то их напряженно-деформированное состояние очень зависит от пути, времени и вида нагружения. Поэтому желательно, чтобы из бесконечного числа факторов, характеризующих эту реальную сложную систему, были учтены в расчетной модели только конечное их число, отражающее важнейшие ее свойства. При этом эти свойства должны быть реально определяемыми из опытных данных и допускающими в дальнейшем численную реализацию с применением ЭВМ. Следовательно, выбираемая нами расчетная модель не будет точно совпадать с реальной системой, но должна отражать ее основные свойства. Хотя модель “беднее” и неоднозначна материальному объекту, но, как правило, она доступнее, информативнее и удобнее для пользователя. Она также позволяет часто лучше понять основные свойства исследуемого объекта, прогнозировать последствия при изменении свойств его материалов и различных на него воздействий.

В настоящее время наблюдается бурное развитие методов математического моделирования, которое привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. Наиболее подробное их описание и классификация изложена, например, в работах [1, 2, 3]. Следует отметить, что такой подход в научных исследованиях является сейчас наиболее применяемым и результативным. Как показано в [2], постановку вопроса о математическом моделировании можно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа. Кратко рассмотрим эти этапы применительно к склонам, которые находятся под воздействием собственного веса и приложенных ранее статических, а затем сейсмических нагрузок.

На первом этапе строится модель рассматриваемой сложной системы, которая в математической форме отображает важнейшие ее свойства, формулируемых в виде фундаментальных законов природы. В работе [4] показано, что грунты склонов даже под действием

собственного веса находятся в упругопластическом состоянии, поэтому их модель должна учитывать этот фактор. Далее, грунты склонов подвержены сложным нагружениям, поэтому деформационные теории пластичности не применимы, следовательно, должна использоваться более сложная теория пластического течения с упрочнением [4]. Определение физико-механических параметров грунтов, характеризующих их свойства, которые необходимы для этой теории, изложено, например, в работе [5].

Под действием статических и динамических нагрузок в склонах могут возникать большие деформации и перемещения, которые также должны быть учтены в модели и определены из расчетов. В этом случае, используя лагранжев (материальный) подход, связь между тензором деформации Коши-Грина  $C$  и вектором перемещений  $\mathbf{u}$  будет иметь вид [4]

$$C = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^T + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^T),$$

$$\gamma_{ks} = \frac{1}{2}(u_{k,s} + u_{s,k} + u_{t,k}u_{t,s}). \quad (1)$$

При решении нелинейных задач возникают сложности, связанные с отсутствием информации об актуальной конфигурации  $V_t$ , в которой определяется тензор напряжений Коши  $\sigma$ . Поэтому при решении нелинейных задач удобнее находить напряженное состояние с применением отсчетной конфигурации  $V_0$ , которая описывается исходными данными. В связи с этим, приходится оперировать с возникающими тензорами напряжений, определенными в этой конфигурации. Здесь будет использоваться симметричный тензор напряжений Кирхгофа  $\mathbf{K}$ , который определяется через тензор напряжений Коши следующим образом

$$\mathbf{K} = \sqrt{D} \nabla \mathbf{x}^T \cdot \sigma \cdot \nabla \mathbf{x}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{D}} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{X}. \quad (2)$$

Уравнение движения, равновесия и статические граничные условия с применением тензора Кирхгофа  $\mathbf{K}$  являются нелинейными, они зависят от деформированного состояния сплошной среды.

Соотношение принципа виртуальной работы в полных напряжениях и в приращениях с применением тензора Кирхгофа определяются в компонентной форме в следующем виде:

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \left[ \kappa_{sm} \delta \gamma_{sm} + \left( \rho \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{c}_m \dot{\mathbf{u}}_m - \mathbf{F}_m \right) \delta \mathbf{u}_m \right] dV - \int_{\overset{\circ}{S}_i} \mathbf{q}_m \delta \mathbf{u}_m dS - \int_{\overset{\circ}{S}_p} \mathbf{p}_m \delta \mathbf{u}_m dS = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

$$\int_{\dot{V}} \left\{ \Delta \kappa_{sm} \delta \Delta \gamma_{sm}^A + (\rho \Delta u_s + c_s \Delta \dot{u}_s) \delta u_s + \frac{1}{2} \kappa_{sm} \delta (\Delta u_{n,s} \Delta u_{nm}) - \Delta F_s \delta \Delta u_s + \right. \\ \left. \left[ \kappa_{sm} \delta \Delta \gamma_{sm}^A + (\rho u_s + c_s \dot{u}_s - \dot{F}_s) \delta \Delta u_s \right] \right\} d\dot{V} - \quad (3)$$

$$- \int_{\dot{S}_l} (\Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s) \delta \Delta u_s d\dot{S} - \int_{\dot{S}_p} (\Delta \dot{p}_s + \dot{p}_s) \delta \Delta u_s d\dot{S} = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Уравнение состояния в приращениях можно записать в следующем виде [4]

$$\Delta \kappa_{ij} = \bar{D}_{ijnm} \Delta \gamma_{nm}^\Lambda, \quad (4)$$

$$\bar{D}_{ijnm} = D^{(N)} D_{\alpha\beta\xi\eta} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{n,\xi} x_{m,\eta}, \quad \frac{dV}{d\dot{V}} = \sqrt{D} = |X_{\kappa,s}|.$$

При исследовании задач с малыми удлинениями и сдвигами принимается, что актуальные конфигурации тела  $V_t$  совпадают с его отсчетной конфигурацией  $V_0$ . Это существенно облегчает решение. Но при деформировании с более 10% градиентами перемещений такой подход может привести к качественно и количественно неверным результатам. Поэтому процесс решения задач с большими деформациями порождает дополнительные трудности, связанные, во-первых, с геометрической нелинейностью исходных уравнений и, во-вторых, с отсутствием информации об актуальных конфигурациях тела  $V_t$ .

Первая проблема приводит к введению различных тензоров напряжений и деформаций и к двум основным подходам в исследовании задач механики: лагранжеву и эйлерову. Вторая проблема порождает широко используемые методы решения задач инкрементального (скоростного) типа. Такой подход позволяют одно полное нагружение заменить на эквивалентный ряд малых последовательных шагов и определять конфигурацию тела, а также напряжения и деформации, на последующем шаге из предыдущего, на котором они известны. В этом случае в качестве отсчетной конфигурации последующего нагружения принимается актуальная конфигурация предыдущего. Это дает возможность процесс определения результатов для каждого нагружения записывать в виде однотипных операций, используя алгоритм решения геометрически линейных задач.

Рассмотрим основные уравнения, используемые при решении рассматриваемой задачи в лагранжевой формулировке. Основным преимуществом такого подхода является постоянство области изменения пространственных переменных. Хотя информация об

актуальных конфигурациях в процессе расчета необходима, но применение методов инкрементального типа вносит существенные упрощения в реализацию проблемы решения.

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе рассматривается статическая задача определения напряженно-деформированного состояния склона от действия собственного веса грунтового массива и приложенных к нему статических нагрузок. На втором этапе решается динамическая задача от действия сейсмических сил. На этих этапах необходимо реализовать две проблемы: 1) дискретизацию области, занимаемой склоном, и дискретизацию исходных уравнений; 2) построение итерационного процесса для определения искомых функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние тела с наперед заданной прочностью.

Решение первой проблемы позволяет представить рассматриваемую задачу в алгебраической форме, т.е. перейти от бесконечного числа степеней свободы склона к конечному числу. Ее можно реализовать, используя различные проекционные методы. Здесь будет применен метод конечных элементов. Решение второй проблемы дает возможность произвести линеаризацию исходных нелинейных уравнений. При этом операцию по корректировке их коэффициентов можно выполнять на каждой итерации решения или через их заданное число.

Дискретизация уравнений методом конечных элементов и статические методы расчета склонов подробно рассмотрены, например, в монографиях [4, 6], поэтому перейдем к решению динамических задач. В матричной форме в момент времени  $t_n$  уравнение движения тела преобразуется к следующему виду

$$\left( \mathbf{M} + \frac{1}{\rho} [\mathbf{h}]^T [\mathbf{H}]^{-1} \mathbf{h} \right) \ddot{\delta}_n + \mathbf{C} \dot{\delta}_n + \mathbf{K}(\delta_n) \delta_n = \mathbf{Q}_n. \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое в круглых скобках есть матрица масс, которая для каждого конечного элемента равна

$$M_{(e)}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^i]^m \rho_{(e)} [N_{(e)}^j] h_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 m_{(e)}^{ij} d\eta_1 d\eta_2.$$

Второе слагаемое в этих скобках называется матрицей присоединенных масс, она учитывает влияние водной среды на склон при его колебаниях [4]. Обозначим сумму в скобках через  $\bar{\mathbf{M}}$  и назовем ее приведенной массой.

Второе слагаемое в (5) есть матрица демпфирования, которая для каждого конечного элемента равна

$$C_{(e)}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^i]^m c_{(e)} [N_{(e)}^j] h_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c_{(e)}^{ij} d\eta_1 d\eta_2.$$

$\mathbf{K}(\delta)$  называется матрицей жесткости системы, которая зависит через матрицу  $\mathbf{D}$  от вектора глобальных узловых перемещений  $\delta$ .  $\mathbf{Q}$  – действующая на склон нагрузка.

Для решения уравнения (5) использовались методы явного или неявного интегрирования. Решения показали, что для рассматриваемых задач наиболее приемлемыми являются методы второго типа, поэтому здесь применялся метод Ньюмарка и его возможные модификации. Для определения перемещения  $\delta_{n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$  получено следующие уравнения:

Рассмотрим пример расчетная схема склона которого показана на рис. 1.

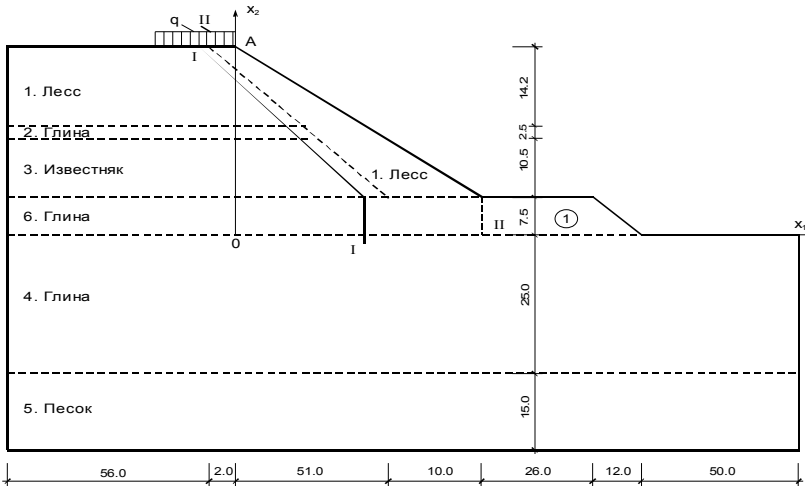


Рис. 1. Расчетная схема спланированного откоса

Пусть грунт склона, расположенный на вертикальной плоскости с координатой  $x_1 = -60$  м получил вправо импульсное горизонтальное смещение на 10 см, которое вызвало колебание склона. На границах, ограничивающих склон, волны колебаний не отражаются, а свободно пропускаются. На рис. 2 показаны эпюры горизонтальных и

вертикальных колебаний перемещений точки А склона от заданного смещения.

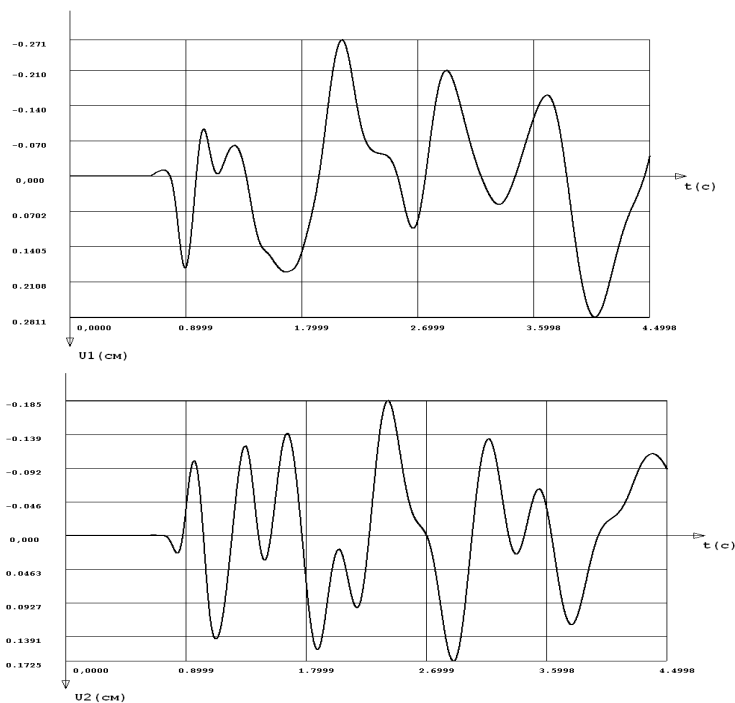


Рис. 2. Эпюры горизонтальных и вертикальных колебаний перемещений точки А

На рис. 3 приведены эпюры колебаний нормальных и касательных напряжений в точке В склона.

### *Заключение*

Таким образом, можно исследовать колебательные процессы, происходящие в любой точке склона от действия сейсмической нагрузки. Возможности комплекса программ не исчерпываются только решением задач от заданных начальных смещений части грунта склона. Также можно вводить акселерограммы землетрясений.

## Summary

In this paper, we investigate the stress-strain state of soil slopes with their geometrical and physical nonlinearity of the seismic action.

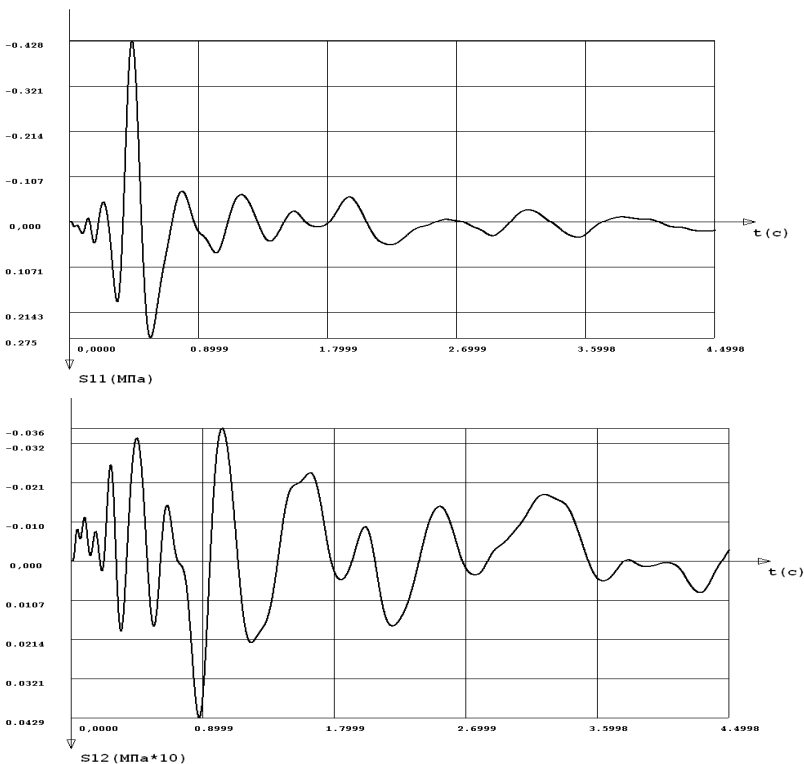


Рис. 3. Эпюры нормальных и касательных колебаний напряжений точки В

1. Введение в математическое моделирование. Учебное пособие под редакцией П.В.Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.

2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

3. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.

4. Гришин В.А., Дорофеев В.С. Некоторые модели грунтовой среды. – Одесса: Внешрекламсервис, 2007. – 310 с.

5. Болдырев Г.Г. Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса. – Пенза: ПГУАС, 2008. – 696 с.

6. Гришин В.А., Снисаренко В.И. Одесские склоны и оползни. – К: “МП Леся”, 2008. – 300 с.

7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.



