УДК 539.3

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Оробей В.Ф., *д.т.н., профессор,* **Корнеева И.Б.,** *к.т.н., доцент,* **Бондаренко Д.О.**
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

В строительстве и различных отраслях машиностроения широко используются балки, у которых по различным законам изменяются жёсткость, масса, параметры упругого основания, нагрузка и т. п. факторы. Сопротивление таких балок описывается так называемыми псевдодифференциальными уравнениями или уравнениями с переменными коэффициентами. Как правило, получить аналитическое решение этих уравнений не удаётся. Решение в рядах приводит к значительным математическим трудностям, а численное решение МКЭ требует доказательств сходимости и достоверности результатов.

От подобных сложностей расчёта напряжённо-деформированного состояния балок с переменной топологией свободен численно-аналитический метод граничных элементов. Наиболее полно он изложен в работах [1,2], с которыми можно ознакомиться на сайтах www. odsopromat. narod. ru; www. listlib. narod. ru. Сущность предлагаемого подхода решения псевдодифференциальных уравнений состоит в следующем. Интервал интегрирования (в данной работе это длина балки) разбивается на n частей. В пределах каждой части все параметры объекта принимаются постоянными величинами. Значения этих величин можно взять с избытком или с недостатком. Очевидно, что наиболее точное решение уравнения с переменными коэффициентами можно будет получить при условии, что ступенчатая зависимость будет максимально близко описывать заданный параметр. Например, при линейных зависимостях коэффициентов значения постоянных величин необходимо вычислять в серединах всех частей объекта. В пределах каждой части будет справедливо решение соответствующего дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Данное решение всегда можно получить (решение задачи Коши). На краях интервала интегрирования (на опорных сечениях балок) необходимо удовлетворить краевым условиям, а во внутренних граничных точках обеспечить непрерывность вектора состояния объекта. В численно-аналитическом методе граничных элементов все эти условия реализуются точно. Таким образом, формируется краевая задача для граничных параметров объекта с корректным выполнением исходных условий вида [2]

$$A_* \cdot X_* = -B \qquad (1)$$

где: A_* - квазидиагональная квадратная матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами; X_* - вектор начальных и конечных независимых параметров всех частей объекта; B – вектор внешней нагрузки.

Порядок системы линейных алгебраических уравнений (1) равен m x n, где m – порядок дифференциального уравнения; n – число частей, на которые разбивается интервал интегрирования. Решение системы (1) не вызывает затруднений, т. к. матрица коэффициентов A_* весьма сильно разрежена и накопление погрешностей округления не происходит. При большом числе n можно получить достаточно точное решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Основная доля погрешности результатов предлагаемого подхода складывается из того, что в модели рассматриваемой задачи (1) коэффициенты дифференциального уравнения изменяются скачкообразно. При малых скачках будет и маленькая погрешность решения. Данный алгоритм является универсальным по отношению к физическому содержанию задачи. Поэтому МГЭ может решать разнообразные линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, которые описывают задачи различных наук. В качестве примера рассмотрим расчёт статически неопределимой балки из работы [3] (рис. 1). Нагрузка и жёсткость балки изменяются по линейным законам:

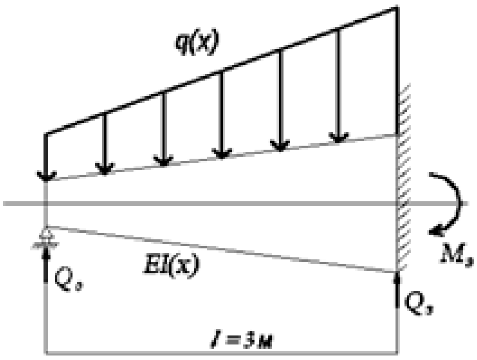

Рис. 1. Балка с распределёнными параметрами

$$q(x) = q_0\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{l}\right);$$
$$EI(x) = EI\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{l}\right). \qquad (2)$$

Балка испытывает поперечный изгиб. Вследствие переменной жёсткости аналитически решить данную задачу весьма сложно. Пролёт балки разбиваем на n равных частей. Длина каждой части $x_i = l/n$. В пределах каждой части по формулам (2) вычисляются значения q_i и EI_i при среднем значении аргумента. Таким образом формируются значения постоянных коэффициентов на каждом участке балки. Диагональные блоки матрицы A_* и грузовые члены матрицы B соответствуют поперечному изгибу. Для упрощения условий непрерывности вектора состояния балки во внутренних граничных точках параметры жёсткости вносим в исходные матрицы. Они принимают вид:

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & x_i & -\frac{x_i^2}{2EI_i} & -\frac{x_i^3}{6EI_i} \\ & 1 & -\frac{x_i}{EI_i} & -\frac{x_i^2}{2EI_i}; \\ & & 1 & x_i \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad B_i = \begin{vmatrix} -\frac{q_i x_i^4}{24EI_i} \\ -\frac{q_i x_i^3}{6EI_i} \\ \frac{q_i x_i^2}{2} \\ q_i x_i \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Если требуется решить другие задачи расчёта балки с распределёнными параметрами, то соответственно необходимо поменять содержание матриц (3). Результаты решения краевой задачи (1), сформированной из матриц (3), представлены в безразмерной форме в таблице 1, а эпюры напряжённо-деформированного состояния – на рис. 2-5.

Таблица 1

Граничные параметры балки

Число участков n	Результаты обобщённого метода начальных параметров [3]			
	Угол поворота в масштабе жёсткости $EI\theta_0/q_0$	Реакция левой опоры Q_0/q_0	Изгибающий момент в заделке M_3/q_0	Реакция в заделке Q_3/q_0
3	0,65 Δ=17,37 %	1,25 Δ=5,40%	-1,59 Δ=6,05%	-2,75 Δ=2,27%
	Результаты МГЭ			
3	0,5633	1,2203	-1,6726	-2,7797
10	0,5548	1,189	-1,6905	-2,8110
20	0,5540	1,1867	-1,6919	-2,8133
30	0,5539	1,1862	-1,6922	-2,8138
40	0,5538	1,1861	-1,6922	-2,8138
50	0,5538	1,1860	-1,6923	-2,8140

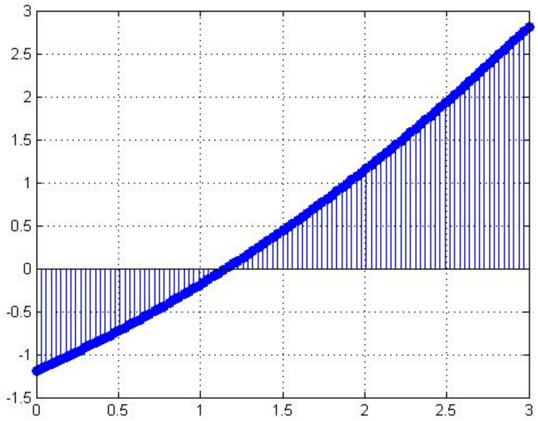

Рис. 2. Эпюра поперечных сил Q

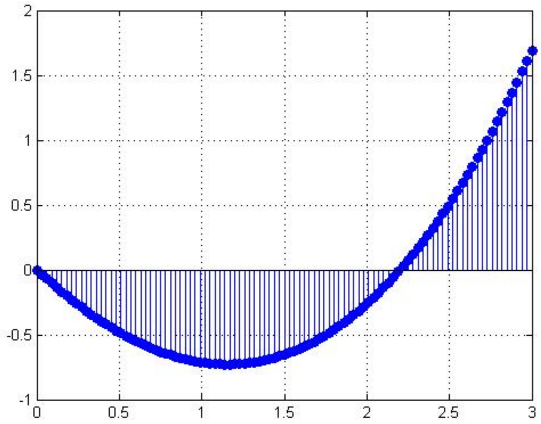

Рис. 3. Эпюра изгибающих моментов M

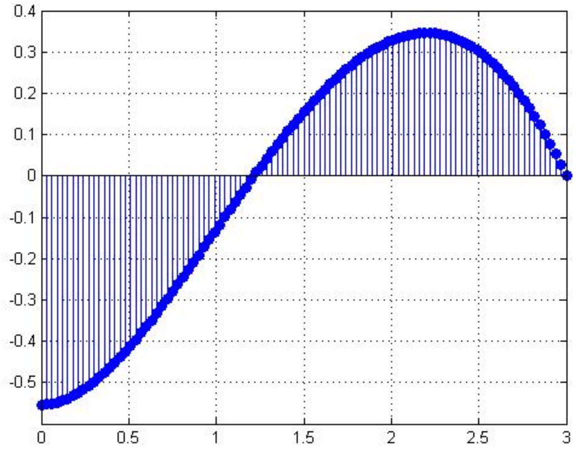

Рис. 4. Эпюра углов поворота EIφ

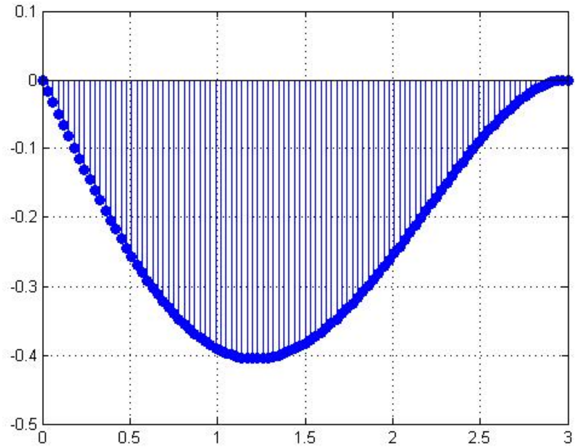

Рис. 5. Эпюра прогибов EIv

Из таблицы 1 следует, что разбиение балки на 30 частей достаточно для получения точного результата при линейном изменении коэффициентов дифференциального уравнения. Дальнейшее увеличение числа участков не приводит к уточнению результатов. Аналогичные выводы содержатся и в работе [4], где решались задачи устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных балок. Сравнение с результатами обобщённого метода начальных параметров показывает небольшую погрешность. Однако, применимость метода начальных параметров существенно ограничена. Рекуррентные зависимости данного метода содержат произведения матриц (3), что способствует накоплению погрешностей округления и при увеличении числа n увеличивается погрешность результата. Данный недостаток отсутствует в численно-аналитическом МГЭ. Добавим, что результаты МГЭ точно удовлетворяют уравнениям равновесия заданной балки.

Выводы

Для расчёта статически неопределимых балок с распределёнными параметрами наиболее эффективно применение численно-аналитического метода граничных элементов, который позволяет получать результаты с высокой точностью и достоверностью, отбрасывая при этом недостатки других методов. Не представляют трудностей расчёты неразрезных балок и рам с аналогичными свойствами своих элементов.

SUMMARY

There were offered methods of tence-deformated condition of staticly undetermined beems with free changing acerdity, masses, springy base characteristics and other parameters laws calculation. Algorythm of solving similar problems leads to substitution of portioned parameters system with ensemble of constant parameter systems. Hereinafter numerically – analytical method of border elements (MBE) technology is applied to ensemble of constant parameter systems. There was cited an instance and made a comparison with the results of generalized initial parameter method.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. и др. Численные методы в механике. – Одесса: Стандартъ, 2005. – 565 с.
2. Дащенко А.Ф., Кириллов В.Х., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. и др. Решение задач сопротивления материалов, теоретической и строительной механики в среде MATLAB. – Одесса: Стандартъ, 2009. – 552 с.
3. Постнов В.А., Суслов В.П. Строительная механика корабля и теория упругости. – Л.: Судостроение, 1987. – Т. 1. – 288 с.
4. Оробей В.Ф., Кострова Г.В. Численно-аналитическое решение краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Труды Одесского политехнического ун-та. – Одесса: ОНПУ, 2007. – Вып. 1 (27). – С. 23 – 30.