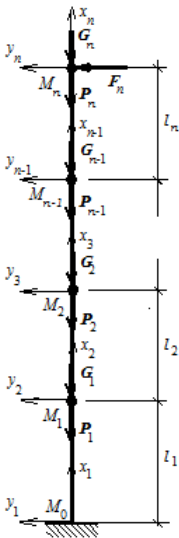


ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОЛОННЫ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

Фомин В.М.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

Будем исследовать изгибные колебания железобетонной колонны в плоскости ее наименьшей жесткости, вызванные импульсным воздействием F_n (рис.1) и системами осевых постоянных сил $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ и переменных сил $G_k (k = 1, 2, \dots, n)$. Колонна рассматривается как система с конечным числом степеней свободы. Для этого масса колонны сосредотачивается в ряде материальных точек $M_k (k = 1, 2, \dots, n)$. Выбираем на каждом стержневом элементе $M_{k-1}M_k$ локальную систему координат $x_k y_k$ колонны и присваиваем ему номер $k (k = 1, 2, \dots, n)$.



Рассмотрим сначала некоторую квазистатическую задачу для колонны, когда на нее кроме осевых сил P_k , приложенных в точках M_k , действуют еще и горизонтальные силы $F_k (k = 1, 2, \dots, n)$, причем силы не предполагаются постоянными (рис.2). Методами, изложенными в [1], строим матрицу $A^{(k)}(x_k)$ фундаментальных функций однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (2)[1], а также матрицы-столбцы $B_Q^{(k)}(x_k)$ и $B_N^{(k)}(x_k)$

специальных част-

Рис.1

ных решений уравнения (2) [1]. Затем записываем равенство [1]

$$\mathbf{X}^{(k)}(x_k) = \mathbf{A}^{(k)}(x_k)\mathbf{X}^{(k)}(0) + \mathbf{B}_Q^{(k)}(x_k)\Delta Q^{(k)} + \mathbf{B}_N^{(k)}(x_k)\Delta N^{(k)}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta Q^{(k)}$ и $\Delta N^{(k)}$ — величины приращений поперечной и продольной сил в начале стержневого элемента, а

$$X_k(x_k) = \begin{bmatrix} \Delta v_k(x_k) \\ \Delta v_k'(x_k) \\ \Delta v_k''(x_k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$(\Delta v_k(x_k))$ – приращение прогиба консоли, вызванное приращением сил $\Delta F_i, \Delta P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), штрих означает производную по x_k).

Тогда при $k=1$ и $x_1 = l_1$ имеем из (1)

$$X^{(1)}(l_1) = A^{(1)}(l_1)X^{(1)}(0) + B_Q^{(1)}(l_1)\Delta Q^{(1)} + B_N^{(1)}(l_1)\Delta N^{(1)}, \quad (3)$$

а при $k=2$ и $x_2 = l_2$

$$X^{(2)}(l_2) = A^{(2)}(l_2)X^{(2)}(0) + B_Q^{(2)}(l_2)\Delta Q^{(2)} + B_N^{(2)}(l_2)\Delta N^{(2)}. \quad (4)$$

Воспользуемся тем, что $X^{(2)}(0) = X^{(1)}(l_1)$, и подставим в (4) вместо $X^{(2)}(0)$ выражение (3). В результате получим

$$X^{(2)}(l_2) = A^{(2)}(l_2)A^{(1)}(l_1)X^{(1)}(0) + [A^{(2)}(l_2)B_Q^{(1)}(l_1) + B_Q^{(2)}(l_2)]\Delta Q^{(1)} + [A^{(2)}(l_2)B_N^{(1)}(l_1) + B_N^{(2)}(l_2)]\Delta N^{(1)} + B_Q^{(2)}(l_2)\Delta F_1 + B_N^{(2)}(l_2)\Delta P_1.$$

Продолжая таким же образом далее, находим

$$X^{(k)}(l_k) = D^{(1,k)}X^{(1)}(0) + \sum_{i=1}^k D^{(i,k)}[B_Q^{(i)}(l_i)\Delta Q^{(i)} + B_N^{(i)}(l_i)\Delta N^{(i)}]. \quad (5)$$

Здесь $D^{(i,k)} = \prod_{j=i}^k A^{(j)}(l_j)$. Заметим, что

$$\Delta Q^{(i)} = -\sum_{j=i}^n \Delta F_j, \quad \Delta N^{(i)} = -\sum_{j=i}^n \Delta P_j. \quad (6)$$

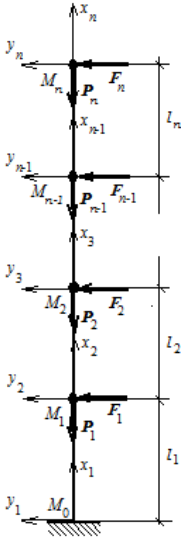


Рис.2

Учитывая граничные условия консоли, можем записать

$$\mathbf{X}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta v_1''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(n)}(l_n) = \begin{bmatrix} \Delta v_n(l_n) \\ \Delta v_n'(l_n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Из ненулевых элементов этих столбцов формируем столбец $\mathbf{X}^{(1)*}$:

$$\mathbf{X}^{(1)*} = \begin{bmatrix} \Delta v_n(l_n) \\ \Delta v_n'(l_n) \\ \Delta v_1''(0) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Введем матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

которая обладает следующим свойством:

$$\mathbf{C}\mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{X}^{(n)}(l_n). \quad (9)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbf{D}^{(1,k)*} \mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{D}^{(1,k)} \mathbf{X}^{(1)}(0). \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{D}^{(1,k)*}$ — матрица, полученная из $\mathbf{D}^{(1,k)}$ обнулением первых двух столбцов.

При $k = n$ равенство (5) с учетом (9) и (10) выглядит так

$$\mathbf{C}\mathbf{X}^{(1)*} = \mathbf{D}^{(1,n)*} \mathbf{X}^{(1)*} + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^{(i,n)} [\mathbf{B}_Q^{(i)}(l_i) \Delta Q^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(l_i) \Delta N^{(i)}]. \quad (11)$$

Из (11) находим

$$\mathbf{X}^{(1)*} = [\mathbf{C} - \mathbf{D}^{(1,n)*}]^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^{(i,n)} [\mathbf{B}_Q^{(i)}(l_i) \Delta Q^{(i)} + \mathbf{B}_N^{(i)}(l_i) \Delta N^{(i)}], \quad (12)$$

т.е. $\Delta v_1''(0)$, $\Delta v_n(l_n)$ и $\Delta v_n'(l_n)$. После этого при помощи равенств (5) можно определить $\Delta v_k(l_k)$, $\Delta v_k'(l_k)$ и $\Delta v_k''(l_k)$ при любом k .

Применим изложенный алгоритм к построению матрицы коэффициентов влияния Y , т.е. положим $\Delta P_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $\Delta F_k = 0$ ($k \neq i$), $\Delta F_i = 1$ (для некоторого фиксированного i) и определим

приращения прогибов $\Delta v_k(l_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Положим $Y_{ik} = \Delta v_k(l_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Меняя i от 1 до n получим все элементы матрицы Y .

Переходим теперь к определению приращений динамических прогибов колонны, изображенной на рис. 1. При этом будем использовать метод линейных ускорений в модификации Вильсона [2]. В соответствии с методикой, предложенной в [2], сначала определяем матрицу-столбец приращений реакций колонны к точкам M_k ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\widehat{\Delta R} = -[I + \frac{6}{(\widehat{\Delta t})^2} M Y]^{-1} \left\{ \frac{6}{(\widehat{\Delta t})^2} M [V \widehat{\Delta t} + a \frac{(\widehat{\Delta t})^2}{2}] + \widehat{\Delta F} \right\}. \quad (13)$$

Здесь $\widehat{\Delta t} = \theta \Delta t$ (Δt - временной шаг, $\theta > 1$ - некоторый множитель), $\widehat{\Delta F}$ - матрица-столбец приращений сил F_k ($k = 1, 2, \dots, n$) на временном интервале $\widehat{\Delta t}$, M - диагональная матрица масс точек M_k , Y - матрица коэффициентов влияния, V и a - матрицы-столбцы скоростей и ускорений точек M_k , определенные в результате вычислений на предыдущих временных шагах, I - единичная матрица.

Из формулы

$$\widehat{\Delta v} = -Y \widehat{\Delta R}$$

находим матрицу-столбец приращений перемещений точек M_k ($k = 1, 2, \dots, n$), соответствующих временному шагу $\widehat{\Delta t}$, а из выражения

$$\widehat{\Delta a} = \frac{6}{(\widehat{\Delta t})^2} [\widehat{\Delta v} - V \widehat{\Delta t} - \frac{1}{2} a (\widehat{\Delta t})^2]$$

определяем матрицу-столбец приращений ускорений этих точек на том же временном шаге, а затем из формул

$$\Delta a = \frac{1}{\theta} \widehat{\Delta a}, \Delta V = (a + \frac{1}{2} \Delta a) \Delta t, \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} (a + \frac{1}{3} \Delta a) (\Delta t)^2$$

определяем приращения ускорений, скоростей и перемещений материальных точек M_k , соответствующие промежутку времени Δt . Ускорения, скорости и перемещения точек M_k ($k = 1, 2, \dots, n$) после окончания рассматриваемого промежутка времени принимают следующие значения:

$$a_{нов} = a + \Delta a, V_{нов} = V + \Delta V, v_{нов} = v + \Delta v.$$

Пример. Будем исследовать динамическую устойчивость железобетонной колонны при следующих значениях параметров: число масс (грузов) $n = 3$, массы материальных точек (грузов) одинаковы и равны некоторой величине m , значение которой будет принято позднее.

Будем рассматривать случай, когда вертикальные переменные силы также одинаковы и определяются формулой $G_k(t) = \widehat{G} \sin \omega t$ ($k = 1, 2, 3$). Геометрические параметры: $l_1 = l_2 = l_3 = 4$ м. Размеры поперечного сечения: $b = 0.8$ м, $h = 0.28$ м. Армирование симметричное: $S_1 = S_2 = 8,5 \text{ см}^2$. Сталь марки А-III, характеристики бетона: $E_0 = 2,8 \cdot 10^4$ МПа, $R_c = 19$ МПа, $R_p = 1,9$ МПа, $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$.

Примем $m = 25$ Т и проведем исследование свободных колебаний колонны в плоскости ее наименьшей жесткости. Как и в примерах в статьях [1-2] предполагается, что нагружение колонны происходит в два этапа. На первом (предварительном) этапе происходит постепенное увеличение массы грузов (т.е. постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Это приводит к появлению в точках M_k ($k = 1, 2, 3$) постоянных вертикальных сил $P = mg = 245,25$ кН, которые в дальнейшем остаются неизменными.

Затем при $t = 0$ начинается второй этап: на сосредоточенную массу M_3 воздействует импульс $F_3(t)$, график которого представлен на рис.3. После окончания действия импульса, продолжительность которого равна 1с (рис. 3), колонна с грузами совершает свободные колебания. Перемещения грузов определяются при помощи пошагового метода, изложенного выше.

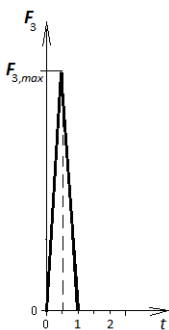


Рис. 3

Графики движения грузов представлены на рис. 4 ($F_{3,max} = 1$ кН; прогибы в метрах, время в секундах). Нумерация графиков соответствует номерам грузов. Заметно затухание колебаний. Кроме того, низшая частота колебаний, определенная по упругой стадии, равна $\omega_{1,y} = 1,719 \text{ с}^{-1}$, что соответствует периоду $T_{1,y} = 3,654$ с. Нетрудно определить из рис. 4, что частота свободных колебаний значительно ниже. Это объясняется тем, что сжатый бетон обладает касательным модулем упругости, гораздо меньшим, чем начальный. Если определить коэффициенты влияния колонны после окончания начального этапа нагружения, а затем на их основании найти низшую частоту, то она окажется равной $\omega_1 = 1,353 \text{ с}^{-1}$, что соответствует периоду $T_1 = 4,644$ с (и достаточно хорошо соответствует графику на рис. 4). Поэтому при исследовании динамической устойчивости будем исходить из значений частот, определенных по предложенной выше методике.

Исследуем теперь движение колонны под действием поперечного импульсного воздействия $F_3(t)$ и гармонических осевых сил $G_k(t) =$

$\widehat{G} \sin \omega t$ ($k = 1, 2, 3$). Примем $\widehat{G} = 61 \text{ кН}$. Сила $F_3(t)$ выводит колонну из неизогнутого состояния, а результат воздействия сил $G_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) зависит от их частоты. Как известно из теории [3], при некоторых значениях ω , P и \widehat{G} возникают интенсивные поперечные колебания. Такое явление называется параметрическим резонансом. Введем коэффициент возбуждения μ , определяемый по формуле

$$\mu = \frac{\widehat{G}}{2(P_* - P)} \quad (14)$$

(P_* - значение P , соответствующее потере статической устойчивости колонны; в рассматриваемом случае $P_* = 640 \text{ кН}$, $\mu = 0,077$).

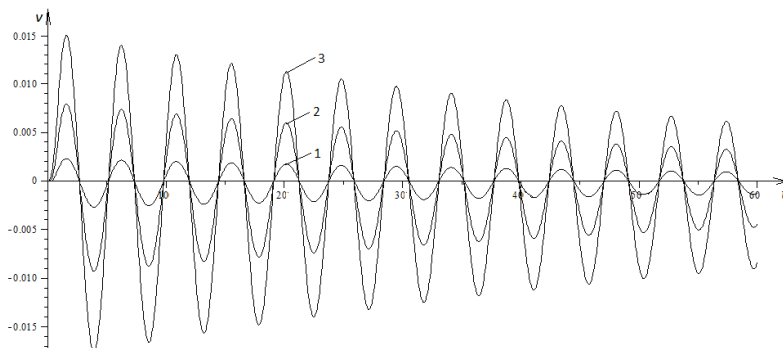


Рис. 4

В плоскости (μ , ω) множества значений этих параметров, при которых возникают неограниченно возрастающие колебания, называются областями динамической неустойчивости. В линейном случае при отсутствии затухания каждая область динамической неустойчивости (присвоим ей номер j) содержит точку $\mu = 0$, $\omega = 2\omega_1 / j$ ($j = 1, 2, \dots$) [3]. Главная область (или как ее иначе называют «область главного параметрического резонанса») соответствует $j = 1$, т.е. случаю $\omega = 2\omega_1 = 2,706 \text{ с}^{-1}$. При наличии затухания области становятся меньше и начинаются с точки с координатами $\omega = 2\omega_1 / j$ и $\mu = \mu^*$ (μ^* - некоторое положительное число, возрастающее с увеличением номера j).

Исследуем сначала нерезонансный случай, когда $\omega \neq 2\omega_1 / j$ ни при каком j , например, $\omega = 2,095 \text{ с}^{-1}$ ($T = 3 \text{ с}$). Графики движения точек M_k ($k = 1, 2, 3$) представлены на рис. 5.

Легко заметить, что графики на рисунках 4 и 5 практически не отличаются друг от друга, т.е. воздействие сил $G_k(t)$ ($k = 1,2,3$) не ощущается.

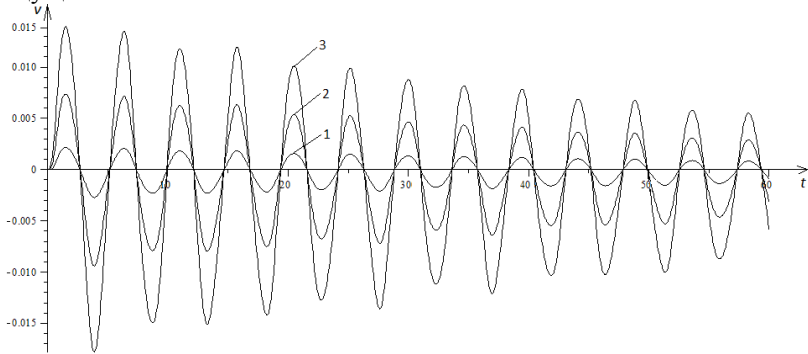


Рис. 5

Пусть теперь $\omega = 2\omega_1 = 2,706 \text{ c}^{-1}$. Значения P и \hat{G} оставим неизменными. Графики движения грузов в этом случае представлены на рис. 6.

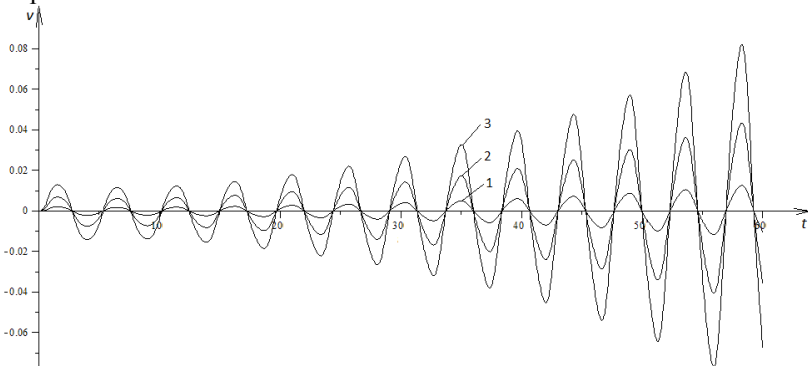


Рис. 6

Налицо присутствие резонанса.

Попробуем проверить наличие резонансов более высокого порядка, например, второго резонанса, т.е. когда $j = 2$ и $\omega = \omega_1$. Как показали вычисления, при $\mu = 0,077$ этот резонанс не наблюдается. Увеличим μ , приняв $P = 392,4 \text{ кН}$ (т.е. $m = 40 \text{ Т}$), $\hat{G} = 98,1 \text{ кН}$. Тогда окажется, что $\mu = 0,25$. Новое значение первой частоты $\omega_1 = 0,802 \text{ c}^{-1}$ ($T_1 = 7,83 \text{ с}$). Графики движения точек M_k ($k = 1,2,3$) приведены на рис. 7. Очевидно наличие резонанса.

Вывод

Метод исследования динамики железобетонных балок и рам, предложенный в [1-2] и в настоящей работе, позволяет выявить и исследовать явление параметрического резонанса, что играет важную роль при расчете вышеуказанных объектов на динамическую устойчивость.

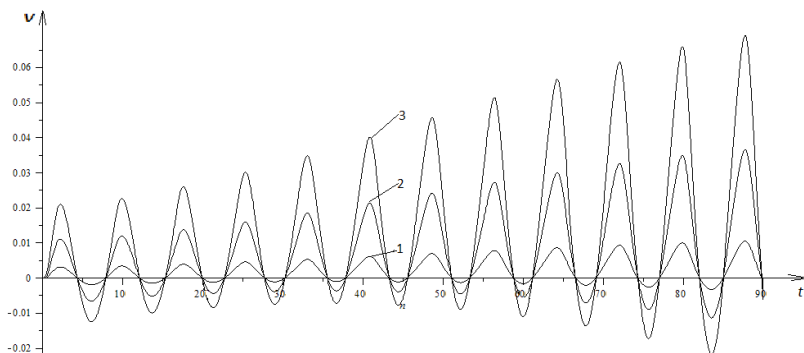


Рис.7

SUMMARY

Method of investigation of RC frame and beam dynamics, offered in [1-2] and in this work, allows to find out and investigate phenomenon of parametric resonance what is of great importance in calculations of dynamic stability of listed above objects.

Литература

1. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при статических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона // Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, 2013. – с
2. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при динамических расчетах статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона // Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, 2013. – с
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.

