

УЧЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В РАСЧЕТАХ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ РАВНОВЕСНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Яременко А.Ф., Эль Дхайби Мухаммед Мустафа. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Приведены основные зависимости для расчета тонких пологих сферических железобетонных оболочек при осесимметричной нагрузке для различных условий опирания в условиях трещинообразования. Относительные перемещения в контрольных точках при ступенчатой нагрузке сопоставлены с экспериментальными данными [1], полученными при испытаниях пологих сферических оболочек.

Большинство железобетонных конструкций работает с трещинами, которые количественно, иногда качественно изменяют характер их напряженно-деформированного состояния. Теория расчета пологих оболочек без учета и с учетом трещин была предложена в работах [2], [3], [4], [5] и др.

В нашей работе рассматривается задача расчета пологих сферических железобетонных оболочек с развивающимися трещинами при радиально меняющихся жесткостных характеристиках для различных уровней осесимметричной нагрузки. Для решения этой задачи нами использован итерационный метод, сочетающий один из вариантов метода конечных элементов с методом коррекции жесткостей конечных элементов с трещинами.

Для расчета малых линейных деформаций в работе был применен метод равновесных конечных элементов (МРКЭ), в котором в качестве основных неизвестных выбираются усилия. Математическая модель МРКЭ для пологих оболочек описана в работах [2] и [6].

Уравнения равновесия для k -го конечного элемента:

$$[A_k] \{S_k\} = \{F_k\},$$

где $[A_k]$ – матрица равновесия k -го конечного элемента, $\{F_k\}$ – вектор внешних сил (определяемых давлением p_k , прилагаемым к k -му конечному элементу и узловыми нагрузками), $\{S_k\}$ – вектор значений усилий в узловых точках этого конечного элемента. Для кольцевого

конечного элемента тонкой полой оболочкой, задаваемого тремя узлами, достаточно определить аппроксимационно независимые усилия $\{S_k\} = \{M_{\rho,k,1}, M_{\varphi,k,1}, N_{\rho,k,1}, N_{\varphi,k,1}, M_{\rho,k,2}, M_{\varphi,k,2}, M_{\rho,k,3}, M_{\varphi,k,3}, N_{\rho,k,3}, N_{\varphi,k,3}\}$, то есть радиальные и кольцевые изгибающие моменты и продольные силы, (рис. 1).

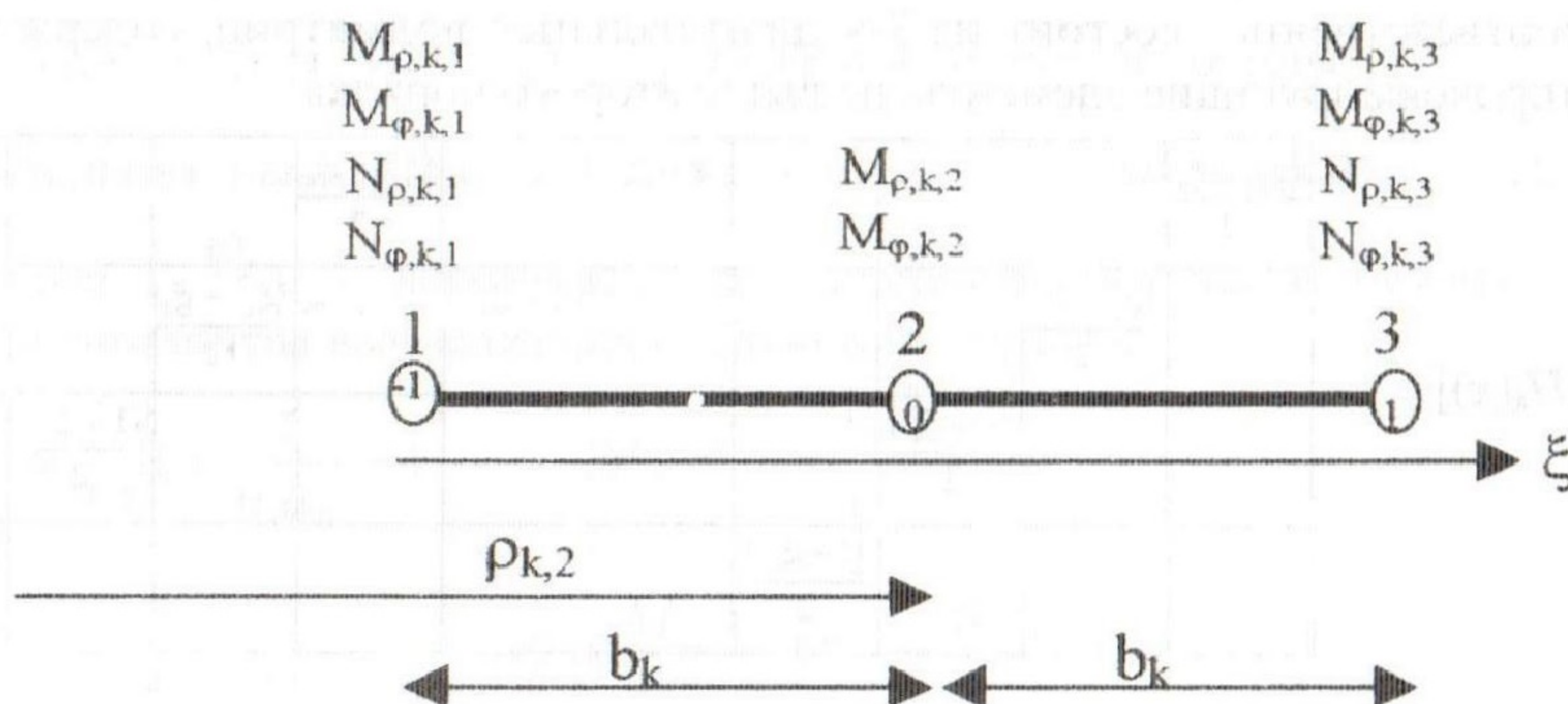


Рис. 1. Привязка узловых точек конечного элемента к глобальным и локальным координатам.

Матрица равновесия $[A_k]$ строится из подматрицы статического равновесия и матриц неразрывности усилий между соседними элементами.

Физико-геометрические уравнения позволяют определить $\{S\}$ при известном векторе внешних перемещений $\{u\}$:

$$[D]\{S\} = [A]^T\{u\},$$

где $[D]$ – матрица податливости всей полой оболочкой, $\{S\}$ – вектор внутренних усилий, $[A]$ – матрица статического равновесия всей полой оболочкой.

Вектор $\{u\}$ определяется из разрешающего уравнения данной математической модели:

$$[K]\{u\} = \{F\},$$

где $[K] = [A][D]^{-1}[A]^T$ – матрица жесткости системы.

Матрица податливости $[D]$ в методе конечных элементов имеет блочный квазидиагональный вид. Ее диагональными блоками являются матрицы податливости элементов $[D_k]$, которые для пологих сферических оболочек в локальных координатах, определяются так [6]:

$$[D_k] = 2\pi b_k \int_{-1}^1 [H_k(\xi_k)]^T [d_k] [H_k(\xi_k)] (\rho_{k,2} + \xi_k b_k) d\xi_k$$

где $[H_k(x)]$ – матрица аппроксимации усилий, $[d_k]$ – матрица обобщенного закона Гука k -го конечного элемента.

Для трехузлового конечного элемента матрица $[H_k(x)]$ соответственно состоит из 3-х диагональных подматриц, содержащих аппроксимирующие элементы не выше второго порядка:

$$[H_k(x)] \equiv \begin{bmatrix} \frac{(\xi_k^2 - \xi_k)}{2} & & & 1 - \xi_k^2 & & \frac{(\xi_k^2 + \xi_k)}{2} & & \\ & \frac{(\xi_k^2 - \xi_k)}{2} & & & 1 - \xi_k^2 & & \frac{(\xi_k^2 + \xi_k)}{2} & \\ & & \frac{(1 - \xi_k)}{2} & & & & & \frac{(1 + \xi_k)}{2} \\ & & & \frac{(1 - \xi_k)}{2} & & & & \frac{(1 + \xi_k)}{2} \end{bmatrix}$$

Развивающиеся трещины изменяют жесткость конструкции в различных направлениях. В работе [6] матрица обобщенного закона Гука $[d_k]$ и соответственно матрица $[D_k]$ рассматривались лишь для изотропных материалов. Для выполнения корректировки жесткости мы получили следующее выражение для матрицы обобщенного закона Гука малого элемента железобетонной оболочки:

$$[d_k] = \frac{1}{E_k t_k} \begin{bmatrix} \frac{12}{t_k^2 K_{M\rho}} & -\frac{12\nu}{t_k^2 K_{M\rho}} & 0 & 0 \\ \frac{12\nu}{t_k^2 K_{M\rho}} & \frac{12}{t_k^2 K_{M\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_{N\rho}} & -\frac{\nu}{K_{N\rho}} \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{K_{N\rho}} & \frac{1}{K_{N\rho}} \end{bmatrix},$$

где E_k – модуль упругости, t_k – толщина элемента железобетонной оболочки, ν – коэффициент Пуассона, $K_{M\rho}$, $K_{M\phi}$, $K_{N\rho}$, $K_{N\phi}$ – коэффициенты снижения жесткости по координатам ρ и ϕ для изгибов и продольных деформаций соответственно.

Коэффициенты снижения жесткости для изгибов $K_{M\rho}$, $K_{M\phi}$ при трещинообразовании рассчитываем единым образом (в формулах их обозначим K_M) согласно [7],[8]:

$$K_M = \frac{12 \mu_s \alpha_E (1 - 0.5 \xi_0)}{\psi_s + 2 \mu_s \alpha_E (1 + \varphi_t) / \xi_0}$$

где $\mu_s = \frac{A_s}{bh_0}$ - коэффициент армирования, $\alpha_E = \frac{E_s}{E_b}$ -

отношение модуля упругости арматурной стали и бетона, ξ_0 -

относительная высота сжатой зоны бетона, ψ_s - коэффициент В.И.

Мурашова, φ_t - характеристика линейной ползучести бетона.

Данные параметры вычисляются следующим образом:

$$\xi_0 = \mu_s \alpha_E \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\mu_s \alpha_E}} - 1 \right), \quad \psi_s = 1 - \frac{0,7}{\varphi_e} \zeta$$

$$\varphi_e = 1 + 5 \mu_s \alpha_E (1 + \varphi_t), \quad \zeta = \frac{M_{crc}}{M}, \quad M_{crc} = \frac{R_{bt,ser} b t_k^2}{3.5}$$

где M_{crc} - упругопластический момент трещинообразования, M - приложенный изгибающий момент, $R_{bt,ser}$ - расчетное сопротивление бетона на растяжение, b - относительная масштабная ширина конечного элемента.

Вышеуказанные выражения применяются при $M > M_{crc}$. В состояниях, когда $M < M_{crc}$ коэффициент снижения жесткости определяется только коэффициентом ползучести бетона $K_M = 1/(1 + \varphi_t)$.

Коэффициенты снижения жесткости $K_{N\rho}$, $K_{N\varphi}$ в условиях трещинообразования рассчитываем единым образом (в формулах их обозначим K_N) согласно [7], [8]:

при осевом сжатии

$$K_N = \frac{v_b}{1 + v_b \varphi_t},$$

где v_b - коэффициент изменения секущего модуля бетона;

при осевом растяжении

$$K_N = \frac{(\mu_s + \mu'_s) \alpha_E}{\psi_s^N}$$

где μ'_s - коэффициент армирования верхней части сечения конечного элемента из железобетона, то есть $(\mu_s + \mu'_s)$ - коэффициент армирования всего сечения.

$K_{M\rho}$, $K_{M\varphi}$ и $K_{N\rho}$, $K_{N\varphi}$ - вычисляются при подстановке параметров сечений оболочки по соответствующим координатам в вышеуказанные выражения.

Выполнив интегрирование, мы получили обобщенный вид матрицы $[D_k]$

$$[D_k] = Q \begin{bmatrix} \frac{d_{1,1}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{1,1}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{d_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{vd_{1,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ \frac{-vd_{1,1}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{1,1}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{-vd_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{vd_{1,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{1,1}}{K_{N\rho}} & \frac{-vb_{1,1}}{K_{N\varphi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{1,2}}{K_{N\rho}} & \frac{-vb_{1,2}}{K_{N\varphi}} \\ 0 & 0 & \frac{-vb_{1,1}}{K_{M\varphi}} & \frac{b_{1,1}}{K_{N\varphi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-vb_{1,2}}{K_{N\rho}} & \frac{b_{1,2}}{K_{N\varphi}} \\ \frac{d_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{d_{2,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{2,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{2,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ \frac{-vd_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{1,2}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{-vd_{2,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{2,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{2,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{vd_{1,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{d_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{3,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{3,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-d_{1,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 & \frac{-vd_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{2,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{-vd_{3,3}}{K_{M\varphi}} & \frac{d_{3,3}}{K_{M\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{1,2}}{K_{N\rho}} & \frac{-vb_{1,2}}{K_{N\varphi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{2,2}}{K_{N\rho}} & \frac{-vb_{2,2}}{K_{N\varphi}} \\ 0 & 0 & \frac{-vb_{1,2}}{K_{M\varphi}} & \frac{b_{1,2}}{K_{N\varphi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-vb_{2,2}}{K_{N\rho}} & \frac{b_{2,2}}{K_{N\varphi}} \end{bmatrix}$$

где $Q = \frac{2\pi b_k}{15K(1-\nu^2)}$, $d_{1,1} = 4\rho_{k,2} - 3b_k$, $d_{1,3} = 2(\rho_{k,2} - b_k)$,
 $d_{3,3} = 16\rho_{k,2}$, $d_{1,5} = \rho_{k,2}$, $d_{4,5} = 2(\rho_{k,2} + b_k)$,
 $d_{5,5} = 4\rho_{k,2} + 3b_k$.

В таком виде, математическая модель задачи пригодна для итерационного расчета тонких железобетонных оболочек с развивающимися трещинами. Данная модель используется в разработанном нами программном комплексе. Адекватность модели проверялась для известных аналитических решений, представленных в [4], [9] и [10].

Определим относительные перемещения для полой оболочки толщиной 4 см с одиночной арматурой и сравним их с экспериментальными данными, полученными А.М.Овечкиными в [1]. Параметры оболочки: радиус кривизны $R = 0.595$ м, пролет $L = 0.965$ м,

толщина $h = 0.04$ м, толщина кольцевых балок $h_1=0.045$ м. Оболочка последовательно нагружается по кольцу с внутренним диаметром 0.23 м и внешним диаметром 0.33 м нагрузкой, ступенчато изменяющейся в диапазоне от $P = 0$ до $P = 115$ кН. Оболочка изготовлена из бетона класса В30 $E_b = 3.25 \cdot 10^4$ МПа; $R_{bt.ser} = 2.25$ МПа. Арматура класса АIII $E_s = 20 \cdot 10^4$ МПа; $\mu^{sx} = 0,00018$; $\mu^{sy} = 0,0033$.

На рисунке 1 показаны расчетные и экспериментальные относительные перемещения для купола с данными параметрами

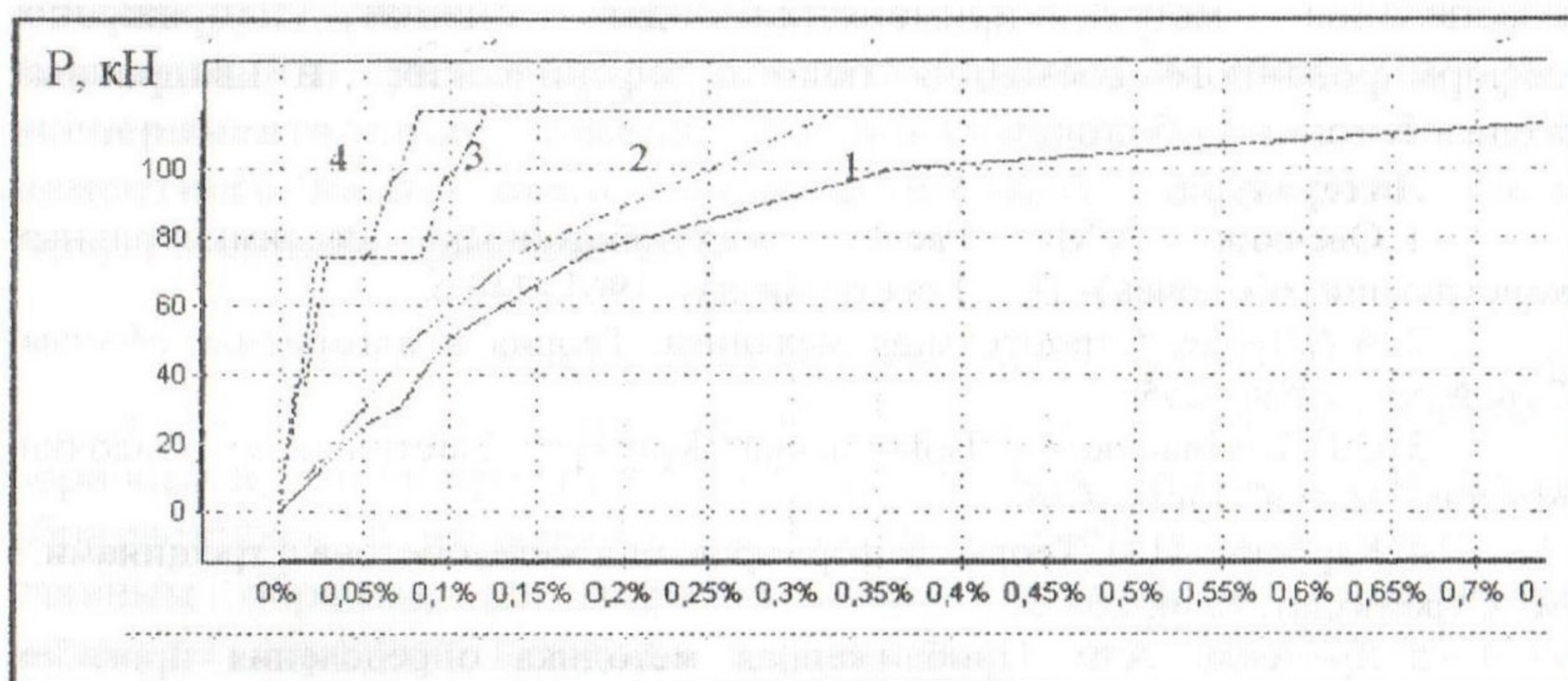


Рис 1. Графики относительных перемещений купола : 1 — экспериментальные вертикальные перемещения первой четверти купола, 2 — экспериментальные горизонтальные перемещения опорного контура, 3 — расчетные вертикальные перемещения первой четверти купола, 4 — расчетные горизонтальные перемещения опорного контура; суммарная нагрузка представлена в кН, перемещения рассчитываются относительно горизонтального наружного радиуса опорного кольца.

В таблице 1 показано сравнение расчетных и экспериментальных нагрузок трещинообразования и предельных нагрузок для разных методик расчета.

Таблица 1.

Сравнение опытных и расчетных нагрузок трещинообразования $P_{срс}$ и предельных нагрузок P_u

Марка купола	$P_{срс}$, кН			$P_{срс}$, кН		
	опыт	расчет [5]	Расчет МРКЭ	опыт	расчет [5]	Расчет МРКЭ
С-2	30,0	30,0	30,0	115,0	110,0	115,0

1. М.С. Трещинообразование и ползучесть бетона оболочки приводят к увеличению упругих прогибов примерно в 6 раз. Внутренние усилия изменяются незначительно.

2. Сходимость вычислительного процесса достигалась за 4-5 итераций. При этом учитывалась не только нелинейность деформированных материалов, но и необратимость процесса трещинообразования.

3. Расчетные данные по прогибам качественно отвечают экспериментальным данным, полученным для оболочек равного пролета. Следовательно, разработанная методика и программное обеспечение могут применяться для оценки напряженно-деформированного состояния пологих сферических и квадратных железобетонных оболочек.

Литература:

1. Овечкин А.М. Расчет железобетонных осесимметричных конструкций (оболочек) – М. – Госстройиздат, 1961.-240 с.

2. А.А.Чирас. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Москва. Стройиздат, 1989г.-255с.

3. С.П.Тимошенко, С.Войновский Кригер. Пластинки и оболочки: Москва, "Наука" 1966г.-636с.

4. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976.-208 с.

5. Яременко А.Ф. Приближенная методика определения прогибов железобетонных оболочек с трещинами. Известия вузов – Новосибирск, №11, 1987, с. 7–9.

6. Р.П.Каркоускас, А.А.Крутинис, Ю.Ю.Аткочюнас, С.А.Калана, Ю.А.Нагя-вичус, Строительная механика и решения задач на ЭВМ: Москва, Стройиздат 1996г.-360с.

7. Улицкий И.И. Панель в виде сборной железобетонной оболочки двойкой кривизны. О результатах конкурса на наиболее эффективные конструкции перекрытий жилых и гражданских зданий. Киев, 1954.

8. Яременко Е.А. Напряженно-деформированное состояние поврежденных куполов и сводов. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Одесская государственная академия строительства и архитектуры Министерства образования и науки Украины, Одесса 2003

9. Яременко О.Ф., Балдук П.Г., Яременко О.О. Разрахунок и проектування залізобетонних куполів. – Навчальний посібник – Одеса: МПП «ЕВЕН», 2005.

10. Королев А.Н., Крылов С.М. Способ расчета прогибов железобетонных оболочек, опертых по контуру, и безбалочных перекрытий при действии кратковременной нагрузки. – Тр. НИИЖБ, вып. 26, 1962, с. 59-119.