

К ПРИМЕНЕНИЮ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ковров А.В., Кушнир А.М., Ковтуненко А.В. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Викладена методика визначення граничних умов числово-аналітичного методу граничних елементів при розрахунку просторових рамних конструкцій. Наведені матриці, що входять до основного рівняння числово-аналітичного методу граничних елементів, для елементів просторової рамної конструкції.

Актуальность исследований. Обширное применение пространственных рамных конструкций вызывает необходимость их расчета на прочность с целью обоснованного выбора параметров, от которых зависят величины напряжений и деформаций. Существующие методы расчета связаны со сложным математическим аппаратом, а также с рядом сложностей и условностей в моделировании отдельных элементов стержневых конструкций.

Практика инженерного проектирования требует наличия достоверных методик, которые позволяют определять величины расчетных усилий и перемещений, отображающие реальную работу конструкций.

Цель работы. Сформулировать принципы выбора глобальных и локальных систем координат, порядок обозначения узлов и элементов, вывод соотношений статических и кинематических граничных параметров численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ).

Основная часть. В работах [1, 2, 3] предложен ЧА МГЭ, его основные положения и принципы расчета стержневых систем.

При расчете пространственных рамных конструкций предлагается принять левовинтовую глобальную систему координат, которая расположена в левом ближнем углу пространственной рамной конструкции (рис. 1), в соответствии, с которой формируется порядок нумерации узлов и элементов.

Нумерация узлов и элементов производится от начала системы координат. В первую очередь нумеруются стойки по положительному направлению оси y , по принципу снизу вверх, слева направо. Во вторую очередь производится нумерация поперечных ригелей в положительном направлении оси x . Затем производится нумерация продольных ригелей по оси z .

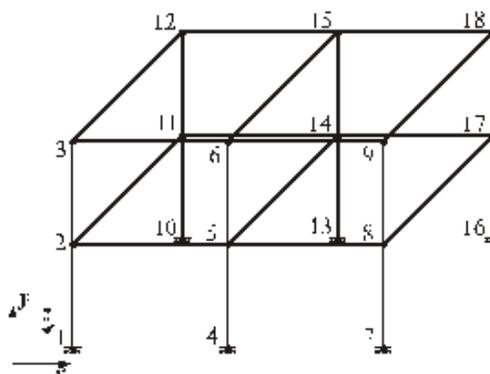


Рис. 1. Принцип нумерации узлов

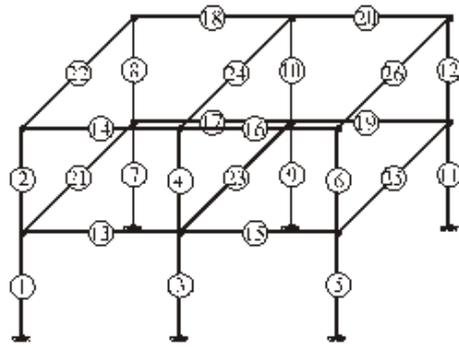


Рис. 2. Принцип нумерация элементов

Для каждого отдельного элемента пространственной рамной конструкции принимается локальная левовинтовая система координат.

Направления координатных осей для элементов стоек представлены на рис. 3, для поперечных и продольных ригелей - на рис. 4, 5.

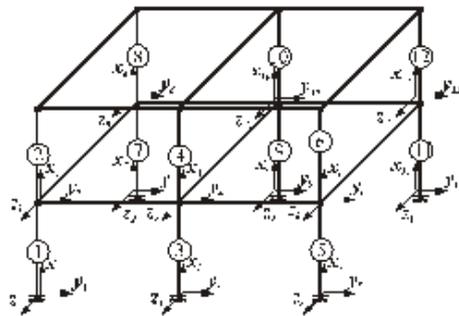


Рис. 3. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов стоек

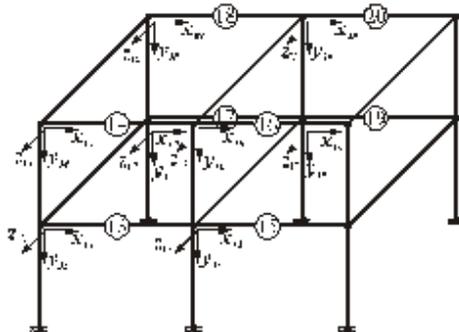


Рис. 4. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов поперечных ригелей

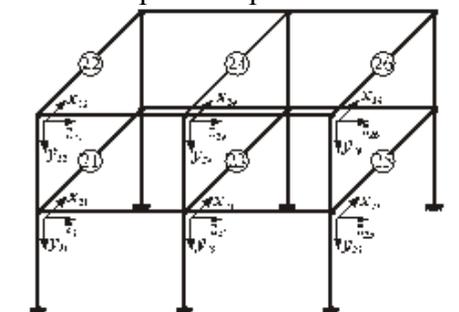


Рис. 5. Направление координатных осей локальных систем координат для элементов продольных ригелей

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние элементов пространственной рамной конструкции, в матричной форме имеет вид [1, 2, 3]:

$$Y(l_i) = A(l_i) X(0) + B(l_i) \quad (1)$$

$Y =$	$EI_z v_y(l_i)$	$X =$	$EI_z v_y(0)$	$B =$	$B_{1.1}(l_i)$
	$EI_z \varphi_z(l_i)$		$EI_z \varphi_z(0)$		$B_{2.1}(l_i)$
	$M_z(l_i)$		$M_z(0)$		$B_{3.1}(l_i)$
	$Q_y(l_i)$		$Q_y(0)$		$B_{4.1}(l_i)$
	$EI_y v_z(l_i)$		$EI_y v_z(0)$		$B_{5.1}(l_i)$
	$EI_y \varphi_y(l_i)$		$EI_y \varphi_y(0)$		$B_{6.1}(l_i)$
	$M_y(l_i)$		$M_y(0)$		$B_{7.1}(l_i)$
	$Q_z(l_i)$		$Q_z(0)$		$B_{8.1}(l_i)$
	$EAu(l_i)$		$EAu(0)$		$B_{9.1}(l_i)$
	$N(l_i)$		$N(0)$		$B_{10.1}(l_i)$
	$GI_k \theta(l_i)$		$GI_k \theta(0)$		$B_{11.1}(l_i)$
	$M_x(l_i)$		$M_x(0)$		$B_{12.1}(l_i)$

$A =$	1	l_i	$\frac{l_i^2}{2}$	$\frac{l_i^3}{6}$																	
		1	$-l_i$	$\frac{l_i^2}{2}$																	
			1	l_i																	
				1																	
					1	l_i	$\frac{l_i^2}{2}$	$\frac{l_i^3}{6}$													
						1	$-l_i$	$\frac{l_i^2}{2}$													
							1	l_i													
								1													
									1	l_i											
										1											
											1	l_i									
													1	l_i							
														1							

Для формирования матриц, входящих в уравнение (1) необходимо сформировать граничные условия для основных типов узлов пространственной рамы, принимая во внимание, что условия нагружения неизвестны.

При равновесии всей системы элементов, объединенных в линейную систему, будут находиться в равновесии и отдельные узлы. При этом статические граничные параметры будут удовлетворять уравнениям равновесия узлов.

Статические граничные параметры, возникающие в сечениях, примыкающих к жесткому узлу, приведены на рис. 6, 7.

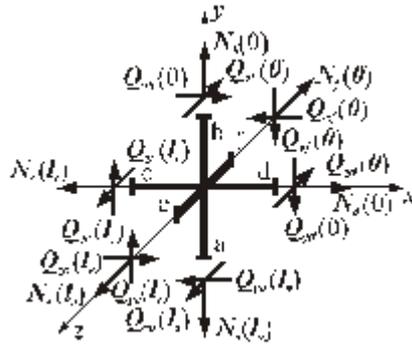


Рис. 6. Поперечные и продольные усилия, возникающие в сечениях элементов, примыкающих к жесткому узлу пространственной рамы

Соотношения между статическими граничными параметрами для жесткого узла из шести стержней, изображенного на рис. 6, 7 представлены в уравнениях равновесия в глобальной системе координат.

Уравнения равновесия рассматриваемого узла в направлении осей:

$$\begin{aligned} \sum x &= 0; \\ -Q_{ya}(l_a) + Q_{yb}(0) - N_c(l_c) + N_d(0) + Q_{zo}(l_o) - Q_{zf}(0) &= 0; \\ Q_{ya}(l_a) &= Q_{yb}(0) - N_c(l_c) + N_d(0) + Q_{zo}(l_o) - Q_{zf}(0); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; \\ N_a(l_a) - N_b(0) - Q_{yc}(l_c) + Q_{yd}(0) - Q_{yo}(l_o) + Q_{yf}(0) &= 0; \\ N_a(l_a) &= N_b(0) + Q_{yc}(l_c) - Q_{yd}(0) + Q_{yo}(l_o) - Q_{yf}(0); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum z &= 0; \\ Q_{za}(l_a) - Q_{zb}(0) + Q_{zc}(l_c) - Q_{zd}(0) + N_o(l_o) - N_f(0) &= 0; \\ Q_{za}(l_a) &= Q_{zb}(0) - Q_{zc}(l_c) + Q_{zd}(0) - N_o(l_o) + N_f(0). \end{aligned} \quad (4)$$

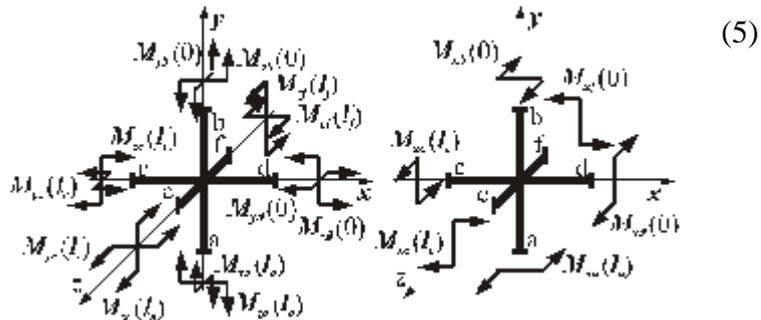


Рис. 7. Крутящие и изгибающие моменты, возникающие в сечениях элементов, примыкающих к жесткому узлу пространственной рамы

Уравнения равновесия рассматриваемого узла относительно осей:

$$\begin{aligned} \sum m_x &= 0; \\ -M_{ya}(l_a) + M_{yb}(0) - M_{zc}(l_c) - M_{zd}(0) + M_{zo}(l_o) - M_{zf}(0) &= 0; \\ M_{ya}(l_a) &= M_{yb}(0) - M_{zc}(l_c) - M_{zd}(0) + M_{zo}(l_o) - M_{zf}(0); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum m_y &= 0; \\ M_{zx}(l_a) - M_{zx}(0) - M_{yz}(l_b) + M_{yz}(0) - M_{yx}(l_c) + M_{yx}(0) &= 0; \\ M_{zx}(l_a) &= M_{zx}(0) + M_{yz}(l_b) - M_{yz}(0) + M_{yx}(l_c) - M_{yx}(0); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum m_x &= 0; \\ M_{zx}(l_a) - M_{zx}(0) + M_{yz}(l_b) - M_{yz}(0) + M_{yx}(l_c) - M_{yx}(0) &= 0; \\ M_{zx}(l_a) &= M_{zx}(0) - M_{yz}(l_b) + M_{yz}(0) - M_{yx}(l_c) + M_{yx}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

При деформировании стержневой системы узлы получают линейные, а стержни, примыкающие к ним угловые перемещения, при этом кинематические граничные параметры будут связаны в этих узлах уравнениями совместности перемещений.

Для установления связи между кинематическими параметрами рассмотрим качественную картину деформированного состояния упругого узла.

Для жесткого узла, в котором сходятся шесть стержней, качественная картина деформирования представлена на рис. 8, 9.

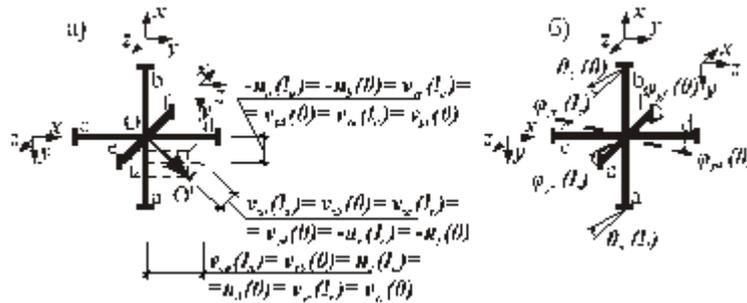


Рис. 8. Деформирование жесткого узла пространственной рамы:
а) линейные перемещения жесткого узла; б) угловые перемещения элемента **a-b**, жесткого узла.

В соответствии с рис. 8а между линейными перемещениями стержней, сходящихся в узле, устанавливаются следующие зависимости:

$$-u_x(t,j) - u_x(t,0) - v_x(t,j) - v_x(t,0) - v_x(t,j) - v_x(t,0) \quad (8)$$

$$v_x(t,j) - v_x(t,0) - v_y(t,j) - v_y(t,0) - u_y(t,j) - u_y(t,0) \quad (9)$$

$$v_y(t,j) - v_y(t,0) - u_z(t,j) - u_z(t,0) - v_z(t,j) - v_z(t,0) \quad (10)$$

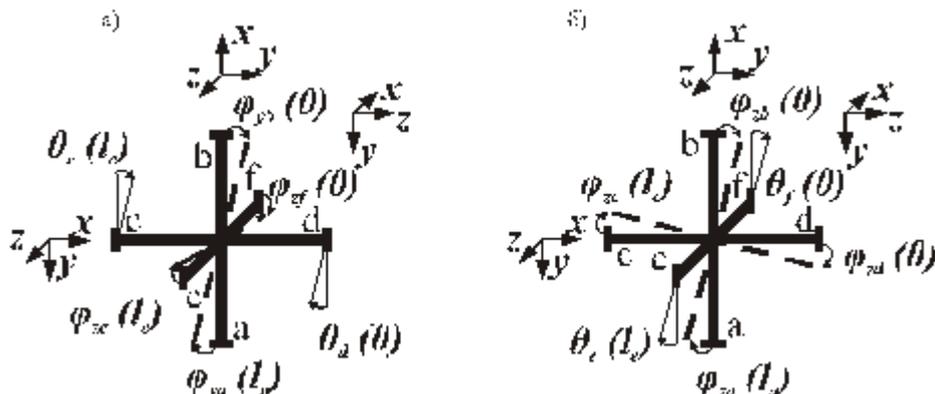


Рис. 9 Деформирование жесткого узла пространственной рамы.

а) угловые перемещения элемента **c-d**, жесткого узла.

б) угловые перемещения элемента **e-f**, жесткого узла.

В соответствии с рис. 8, 9 между угловыми перемещениями стержней, сходящихся в узле, устанавливаются следующие зависимости:

$$\varphi_{\alpha}(I_1) - \varphi_{\alpha}(I_2) - \varphi_{\alpha}(I_3) - \varphi_{\alpha}(I_4) - \vartheta_{\alpha}(I_1) - \vartheta_{\alpha}(I_2) \quad (11)$$

$$-\varphi_{\alpha}(I_1) - \varphi_{\alpha}(I_2) - \vartheta_{\alpha}(I_1) - \vartheta_{\alpha}(I_2) - \varphi_{\alpha}(I_3) - \varphi_{\alpha}(I_4) \quad (12)$$

$$\vartheta_{\alpha}(I_1) - \vartheta_{\alpha}(I_2) - \varphi_{\alpha}(I_3) - \varphi_{\alpha}(I_4) - \varphi_{\alpha}(I_1) - \varphi_{\alpha}(I_2) \quad (13)$$

Если в узле сходятся несколько начальных точек элементов нта с меньшим порядковым номером, а начальные параметры остальных, то в качестве основных выбираются начальные параметры элементе элементов связываются с основными при помощи уравнений совместности перемещений (8...13).

Выводы:

Для расчета пространственных рамных конструкций, при помощи численно-аналитического метода граничных элементов, в работе сформулированы:

- принципы выбора глобальных и локальных систем координат, для элементов стоек и ригелей;
- порядок обозначения узлов и элементов;
- соотношения статических и кинематических граничных параметров.

SUMMARY

The method of determination of boundary terms at the calculation of spatial frame constructions through the numeral-analytical method of boundary elements is described. Matrices for the elements of spatial frame construction, included in basic equation of numeral-analytical method of boundary elements, are shown.

Литература

1. Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численно-аналитический метод граничных элементов. Том 1, 2. ВМВ, Одесса, 2010. – 451 с.
2. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. Учебное пособие. Одесса, «Астропринт». 2001. – 288 с.
3. Оробей В. Ф., Ковров А. В. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: Учебное пособие – Одесса, 2004. – 122 с.