УДК 539.3

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ ВЕКТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Барановский В.И. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина)*

У статті наводиться функціональне уявлення для вирішення повної системи диференційних рівнянь просторової задачі теорії пружності, в класі функцій, які задовольняють бігармонічним рівнянням.

Решение пространственной задачи теории упругости в статической постановке для линейно-упругого тела, занимающего область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S, как известно [1], сводится к матричной системе 15-го порядка дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих граничных условий. Эта система уравнений представляет собой синтез основных уравнений теории упругости – статических, геометрических и физических.

Придадим этим уравнениям и полной системе дифференциальных уравнений для однородной и неоднородной (правая часть уравнений равна вектору $(\vec{b})$) задач матричную форму

$$F\vec{a} = \vec{0},(\vec{b}), \quad \vec{a} = \vec{a}(x,y,z), \quad x,y,z \in \Omega,S \tag{1}$$

где $\vec{a}$ – 15-ти компонентный вектор неизвестных функций – напряжений $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(x,y,z)$, деформаций $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(x,y,z)$ и перемещений $\vec{z} = \vec{z}(x,y,z)$, $\vec{a} = \left|\vec{\sigma},\vec{\varepsilon},\vec{z}\right|^T$, $\vec{\sigma} = \left|\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{zx},\tau_{zy}\right|^T$, $\vec{\varepsilon} = \left|\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{zx},\gamma_{zy}\right|^T$, $\vec{z} = \left|u,v,w\right|^T$; $F(5x5)$ – дифференциальный оператор в частных производных, который можно преобразовать к блочно-треугольному виду

$$F = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ -B & E & 0 \\ 0 & -E & A^T \end{vmatrix} \tag{2}$$

здесь $A(3x6)$ – дифференциальный оператор условий равновесия элементарного параллелепипеда; A^T – оператор, транспонированный по отношению к А и фигурирующий в уравнениях связи между деформациями и перемещениями (уравнениях Коши); $A(6x6)$ – алгебраическая матрица физических констант материала (матрица упругой податливости); $\vec{b}(15x1)$ – вектор, характеризующий воздействие на объект во внутреннем объеме тела и определяющий задачу (1) как неоднородную; $E = E_6$ – единичная матрица 6-го порядка; 0 – нулевые матричные операторы соответствующих порядков.

Система дифференциальных уравнений (1) рассматривается совместно с условиями на поверхности тела S, ограничивающей область Ω

$$\frac{\vec{z}}{S} = \vec{z}_r, \quad \frac{\vec{\sigma}}{S} = \vec{\sigma}_r \quad \text{при } x,y,z \in S \tag{3}$$

Решение полной системы уравнений пространственной задачи теории упругости, представляющей собой краевую задачу (1), (3), в общем виде достаточно сложная задача.

Однако анализ показывает, что для неизвестного вектора функций $\vec{a}$ можно указать следующее функциональное представление в классе функций, φ удовлетворяющих бигармоническим уравнениям

$$\vec{a} = F^T \vec{\varphi} \quad , \tag{4}$$

где $F^T(15x15)$ – блочно-матричный полностью заполненный дифференциальный оператор, блочная (клеточная) структура которого имеет вид

$$F^T = \begin{vmatrix} F_{11}^{(3)}(6x3) & F_{12}^{(4)}(6x6) & F_{13}^{(4)}(6x6) \\ F_{21}^{(3)}(6x3) & F_{22}^{(4)}(6x6) & F_{23}^{(4)}(6x6) \\ F_{31}^{(2)}(3x3) & F_{32}^{(3)}(3x6) & F_{33}^{(3)}(3x6) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $F_{ij}^{(\,)}$ – матричные дифференциальные операторы в частных производных соответствующих порядков, указанных в верхних скобках; $\vec{\varphi}(15x1)$ – вектор функций, удовлетворяющих бигармоническим уравнениям.

Напряжения и перемещения, выраженные через функции φ, должны удовлетворять граничным условиям (3). Клеточная структура вектора имеет вид

$$\vec{\varphi}^T = \left|\vec{\varphi}_1(3x1), \vec{\varphi}_2(6x1), \vec{\varphi}_3(6x1)\right|$$

Оператор F^T(5) решения (4) полной системы уравнений (1) обладает свойством:

$$F \cdot F^T = E_{15} \nabla^4, \tag{6}$$

где $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$, ∇^2 – гармонический трехмерный оператор Лапласа; ∇^4 – бигармонический оператор пространственной задачи.

При решении однородной задачи (1) вектор $\vec{\varphi}$ представляет собой вектор бигармонических функций. При рассмотрении неоднородной задачи (1) вектор $\vec{\varphi}$ содержит 15 функций, являющихся решением неоднородных бигармонических уравнений

$$\nabla^4 \vec{\varphi} = \vec{b}$$

причем в общем случае $\vec{b} = \vec{b}(x, y, z, T)$, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(x, y, z, T)$, T – температура.

Если в (1) с помощью физических соотношений исключить деформации $\vec{\varepsilon}$, то получим, как частный случай, уравнения смешанного метода с таким оператором $F(9x9)$ и вектором $\vec{a}(9x1)$

$$F = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -B & A^T \end{vmatrix}, \quad \vec{a} = \left|\vec{\sigma}, \vec{z}\right|^T \tag{7}$$

При этом оператор решения F^T для этого случая удается выразить через компоненты этого же оператора (5) для полной системы уравнений

$$F^T = \begin{vmatrix} F_{11}^{(3)}(6x3) & F_{12}^{(4)}(6x6) \\ F_{31}^{(3)}3(6x3) & F_{32}^{(3)}(3x6) \end{vmatrix} \tag{8}$$

Объем статьи не позволяет записать выражения для всех матричных операторов F_{ij}. В частности, для линейно-изотропного тела оператор F_{32} имеет вид

$$F_{32}^{(3)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \partial x^3 + G_1 \partial x d yz & l_1 \partial x \partial y^2 & l_1 \partial x \partial z^2 \\ l_1 \partial x^2 \partial y & \lambda_1 \partial y^3 + G_1 \partial y d xz & l_1 \partial y \partial z^2 \\ l_1 \partial x^2 \partial z & l_1 \partial y^2 \partial z & \lambda_1 \partial z^3 + G_1 \partial z d xy \end{vmatrix} \ldots$$

$$\ldots \begin{vmatrix} \lambda_2 \partial x^2 \partial y + G_1 \partial y d yz & 2 l_1 \partial^3 xyz & l_2 \partial x^2 \partial z + G_1 \partial z d yz \\ l_2 \partial x \partial y^2 + G_1 \partial x d xz & l_2 \partial y^2 \partial z + G_1 \partial z d xz & 2 l_1 \partial^3 xyz \\ 2 l_1 \partial^3 xyz & l_2 \partial z^2 \partial y + G_1 \partial y d xy & l_2 \partial x^2 \partial z + G_1 \partial x d xy \end{vmatrix}$$

где $l_1 = \lambda_1 - G_1$, $l_2 = l_1 + \lambda_1$, $\lambda_1 = (2G + \lambda)^{-1}$, $G_1 = G^{-1}$; λ, G – физические константы в виде параметров Ламе; $d()$ - двухмерные операторы Лапласа

$$dxy = \partial x^2 + \partial y^2, \quad dxz = \partial x^2 + \partial z^2, \quad dyz = \partial y^2 + \partial z^2 .$$

Символ $\partial(\ )$ условно обозначает соответствующую частную производную, например

$$\partial x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial xy = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \partial^3 xyz = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ и т.д.}$$

Как видно из решения (4), напряжения $\vec{\sigma}$, деформации $\vec{\varepsilon}$ и перемещения $\vec{z}$ выражаются через функции φ, удовлетворяющие бигармоническим уравнениям и граничным условиям. Следовательно, эти функции можно назвать разрешающими для пространственной задачи теории упругости.

Как частный случай из (4) следуют решения для плоской задачи теории упругости. В этом случае, наряду с известным решением в напряжениях (функция напряжений Эйри) и решением Колосова-Мусхелишвили, выраженным через две произвольные аналитические функции комплексной переменной [2], можно рассматривать и общее решение, следуемое из (4), (5), где напряжения и перемещения выражаются через разрешающие функции , путем применения к ним соответствующих дифференциальных операторов (5), то есть путем дифференцирования. При этом нет необходимости дополнительно прибегать к интегрированию уравнений Коши для определения перемещений, как это делается при решении плоской задачи через функцию напряжений Эйри или к использованию функций комплексной переменной при решении по методу Колосова-Мусхелишвили.

Оператор плоской задачи F (3) имеет также не полностью заполненную, треугольную форму, но с размером (8x8). Оператор F^T (5) решения (4) – полностью заполненный, клеточная структура которого принимает вид

$$F^T = \begin{vmatrix} F_{11}^{(3)}(3x2) & F_{12}^{(4)}(3x3) & F_{13}^{(4)}(3x3) \\ F_{21}^{(3)}(3x2) & F_{22}^{(4)}(3x3) & F_{23}^{(4)}(3x3) \\ F_{31}^{(2)}(2x2) & F_{32}^{(3)}(2x3) & F_{33}^{(3)}(2x3) \end{vmatrix} \tag{9}$$

Вектор разрешающих функций φ плоской задачи имеет размер (8x1)

$$\vec{\varphi}^T = \left|\vec{\varphi}_1(2x1), \vec{\varphi}_2(3x1), \vec{\varphi}_3(3x1)\right|$$

В качестве иллюстрации предлагаемого подхода и применения разрешающей функции φ, рассмотрим известный пример решения плоской задачи в полиномах [3] для длинной балки, при отсутствии объемных сил, загруженной по верхней кромке равномерно-распределенной нагрузкой q, нижняя кромка свободна от нагрузки. Функция напряжения для этого случая известна [3]

$$\varphi_\sigma(x,y) = c_1 x_1^2 + c_2 y x^2 + c_3 y^3 + c_4 y^5 + c_5 x^2 y^3$$

и после определения напряжений и деформаций, для определения перемещений интегрируются уравнения Коши.

Разрешающая функция для этого случая, удовлетворяющая тем же граничным условиям и приводящая к такому же напряженно-деформированному состоянию, имеет вид

$$\varphi(x,y) = c_1 x y^2 + c_2 y x^3 + c_3 x y^5 + c_4 x^3 + c_5 x^3 y + c_6 x^5 y$$

причем напряжения и перемещения определяются путем только дифференцирования этой функции соответствующими операторами, следующими из (9). Можно также получить зависимость между этими функциями

$$\nabla^2 \varphi_\sigma = \partial x \nabla^2 \varphi$$

Выводы

Предлагаемый подход позволяет аналитически строить решения пространственной задачи теории упругости с относительно полными возможностями анализа и выявления свойств полей напряжений, деформаций и перемещений.

При решении задач для многосвязных тел полученные поля перемещений должны дополнительно удовлетворять известным [1] условиям однозначности для контуров воображаемых разрезов, превращающих многосвязную область в односвязную.

При рассмотрении задач механики разрушения важное значение имеет определение параметров напряженно-деформированного состояния тел, включая и пространственные. Предлагаемое решение позволяет расширить круг рассмотрения задач механики разрушения, включая и трехмерные тела.

SUMMARY

The problem of boundary-value for the multi-matrix differential-operator of theory of elasticity is examined .

1.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.М.:Наука, 1988.

2.Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М.: Наука, 1966.

Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990.