

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ЗАГРУЖЕНИИ (1)

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Досліджується плоский позовжньо-поперечний згин консольної залізобетонної балки з врахуванням геометричної та фізичної нелінійностей, коли поперечна складова сили, прикладеної до кінця консолі, змінюється з плинном часу за циклічним законом.

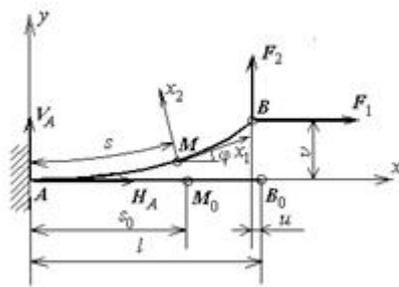


Рис.1

Рассмотрим изгиб железобетонной консольной балки, находящейся под действием двух сил  $F_1$  и  $F_2$  (рис.1). Предполагается, что процесс деформации балки, вызванный изменением сил, является квазистатическим, поэтому, пренебрегая инерционными эффектами, массу балки можно не учитывать. Изменение сил  $F_1$  и  $F_2$  будем называть циклическим, если оно состоит из отдельных циклов, в конце каждого из которых они принимают значения, совпадающие со значениями в его начале.

Каждый из циклов разобьем на отдельные этапы монотонного возрастания или убывания этих сил при постоянном их знаке. В статье [1] приращение  $\varphi_{\Delta}(s)$  угла поворота  $\varphi(s)$  поперечного сечения балки на некотором этапе ( $s$  – длина деформированного отрезка оси балки между рассматриваемым сечением и левым концом балки) представлено в следующем виде:

$$\varphi_{\Delta}(s) = \varphi_{\Delta}^{[0]}(s) + \varphi_{\Delta}^{[1]}(s) \tag{1}$$

Здесь и далее через  $X_{\Delta}$  обозначено приращение величины  $X$ :  $X_{\Delta} = X - X^*$ , где  $X^*$  – значение этой величины в начале рассматриваемого этапа. Через  $X^{**}$  обозначим значение  $X$  в конце этапа.

Введем следующие обозначения:

$$\zeta = s/l, \alpha = F_1 l^2 / H, \beta = F_2 l^2 / H,$$

где:

$$H = E_1^{[0]} J + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) - \frac{E_a^2}{H_1} (S_1 h_1 - S_2 h_2)^2, H_1 = S E_1^{[0]} + E_a (S_1 + S_2),$$

$$E_1^{[0]} = E^{[0]} / (1 - \nu_0^2), E^{[0]} - \text{модуль линейной упругости бетона,}$$

$\nu_0$  – начальный коэффициент Пуассона;  $J$  – момент инерции поперечного сечения,  $E_a$  – модуль упругости арматуры;  $S_1$  и  $S_2$  – площади сечений верхней и нижней арматуры,  $S = bh$  (размеры  $h$ ,  $h_1$  и  $h_2$  показаны на рис.2).

Предположим, что нагружение консоли происходит следующим образом: вначале (будем называть этот этап нулевым) прикладывается сжимающая сила  $F_1$ , которая изменяется от нуля

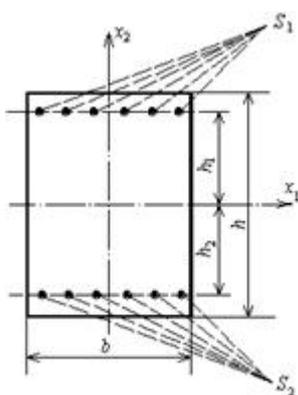


Рис.2

до некоторого значения  $F_1^*$ , а  $F_2$ ,  $\beta$  и  $\varphi$  остаются равными нулю. При этом параметр  $\alpha$  изменяется от нуля до  $\alpha^* = F_1^* l^2 / H$ . На последующих этапах  $F_1$  и  $\alpha$  предполагаются

неизменными, а параметр  $\beta$  меняется от  $\beta_{(j)}^*$  до  $\beta_{(j)}^{**}$  ( $j$  – номер этапа). Под обозначением  $\beta_{(j)}$  понимается следующее:

$$\beta_{(j)} = \beta \text{ при } \beta \in [\beta_{(j)}^*, \beta_{(j)}^{**}].$$

Первое приближение  $\varphi_{\Delta}^{[0]}(\xi)$  на  $j$ -ом этапе определяется дифференциальным уравнением [1]

$$H \frac{d^2 \varphi_{(j)\Delta}^{[0]}}{ds^2} + D \frac{dR_{(j)\Delta,1\Delta}^{[0]}}{ds} = R_{(j)\Delta,2\Delta}^{[0]} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} D &= E_2(S_1 h_1 - S_2 h_2) / H_1, R_{(j)\Delta,k\Delta}^{[0]}(\xi) = R_{(j)\Delta,k}^{[0]}(\xi) - R_{(j)\Delta,k}^{[0]*}(\xi) \quad (k = 1, 2), \\ R_{(j)\Delta,1}^{[0]}(\xi) &= H_{(j)\Delta} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) + V_{(j)\Delta} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi), R_{(j)\Delta,2}^{[0]}(\xi) = -H_{(j)\Delta} \times \\ &\times \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) + V_{(j)\Delta} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi), R_{(j)\Delta,1}^{[0]*}(\xi) = H_{(j)\Delta}^* \cos \varphi_{(j)}^{[0]*}(\xi) + V_{(j)\Delta}^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]*}(\xi), \\ R_{(j)\Delta,2}^{[0]*}(\xi) &= -H_{(j)\Delta}^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]*}(\xi) + V_{(j)\Delta}^* \cos \varphi_{(j)}^{[0]*}(\xi) \end{aligned}$$

( $H_A$  и  $V_A$  – горизонтальная и вертикальная составляющая опорной реакции  $R_{(j)\Delta}$ ;  $\varphi_{(j)}^{[0]*}(\xi)$ ,  $H_{(j)\Delta}^*(\xi)$  и  $V_{(j)\Delta}^*(\xi)$  – значения  $\varphi_{(j)}^{[0]}(\xi)$ ,  $H_{(j)\Delta}(\xi)$  и  $V_{(j)\Delta}(\xi)$  в начале рассматриваемого этапа).

Из условий равновесия следует  $H_{(j)\Delta} = -F_{(j)1}$ ,  $V_{(j)\Delta} = -F_{(j)2}$ . Тогда (2) представится так:

$$\frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi^2} - (\alpha^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]} - \beta_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}) (1 - \delta_0 \frac{d\varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi}) = \Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \varphi_{(j)}^{[0]*}) \quad (3)$$

где  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \varphi_{(j)}^{[0]*}) = \frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[0]*}}{d\xi^2} - (\alpha^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]*} - \beta_{(j)}^* \cos \varphi_{(j)}^{[0]*}) (1 - \delta_0 \frac{d\varphi_{(j)}^{[0]*}}{d\xi})$ ,  $\delta_0 = D/H$

На первом этапе  $\varphi_{(1)}^{[0]*} = \beta_{(1)}^* = 0$ . Тогда  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(1)}^*, \varphi_{(1)}^{[0]*}) = 0$  и уравнение (3) для первого этапа принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi^2} - (\alpha^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]} - \beta_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}) (1 - \delta_0 \frac{d\varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi}) = 0 \quad (4)$$

Отсюда вытекает, что в конце этапа  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(1)}, \varphi_{(1)}^{[0]}) = 0$ , а следовательно, и в начале следующего  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(2)}^*, \varphi_{(2)}^{[0]*}) = 0$ . Продолжая таким же образом далее, получаем  $\Phi(\alpha^*, \beta_{(j)}^*, \varphi_{(j)}^{[0]*}) = 0$  при любом  $j$  и уравнение (3) для рассматриваемой задачи выглядит так

$$\frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi^2} - (\alpha^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]} - \beta_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}) (1 - \delta_0 \frac{d\varphi_{(j)}^{[0]}}{d\xi}) = 0 \quad (5)$$

Решая (5) методом последовательных приближений аналогично [3], получаем

$$\varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) = \sum_{k=1}^4 \Phi_{(j)k}^{[0]} \xi^k \quad (6)$$

где  $\Phi_{(j)1}^{[0]} = \beta_{(j)}(1 - \alpha^*/3 - \delta_0 \beta_{(j)}/2)$ ,  $\Phi_{(j)2}^{[0]} = -\beta_{(j)}(1 - \delta_0 \beta_{(j)})/2$ ,  $\Phi_{(j)3}^{[0]} = \beta_{(j)}(\alpha^* - \delta_0 \beta_{(j)})/6$ ,  $\Phi_{(j)4}^{[0]} = -\alpha^* \beta_{(j)}/24$ .

Положение нейтральной линии в поперечном сечении определяется равенством

$$\sigma_{(j)11}^{[0]}(s, x_2) = 0. \quad (7)$$

В [2] показано, что

$$\sigma_{(j)11}^{[0]}(\xi, x_2) = E_1^{[0]} [e_{(j)B}^{[0]}(\xi) - \frac{x_2}{l} \theta_{(j)}^{[0]}(\xi)] + \frac{K_2^{[0]}}{2} [a_{(j)B}^{[0]}(\xi)]^2 d_2^2(x_2) \quad (8)$$

Здесь

$$\varepsilon_{(j)z}^{[0]}(\zeta) = -\frac{3}{20}SK_2^{[0]}[a_{(j)z}^{[0]}(\zeta)]^2 h^4 + \delta_0 \theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \delta_1 [\alpha^* \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \beta_{(j)} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\zeta)],$$

$$a_{(j)z}^{[0]}(\zeta) = \delta_2 [\alpha^* \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\zeta) - \beta_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\zeta)],$$

$$\delta_2 = H/l^2 H_2, \delta_3 = 2H/l^2 H_3, H_3 = G^{[0]} b h^3 + G_a [d_2(h_1) S_1 + d_2(h_2) S_2],$$

$$\theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \frac{d\varphi_{(j)}^{[0]}}{d\zeta}, d_2(x_2) = \frac{3}{4} h^2 - 3x_2^2, K_2^{[0]} = K^{[0]} - 2G^{[0]}/3,$$

( $K^{[0]}$  и  $G^{[0]}$  – начальные, т.е. соответствующие линейно упругой деформации, модули объемного сжатия и сдвига бетона;  $G_a$  – модуль сдвига арматуры).

Будем рассматривать класс задач, в которых  $\beta^2 \ll |\alpha^*|$ ,  $(\alpha^*)^2 \ll 1$ . Тогда оставляя только величины до первого порядка малости по  $\beta_{(j)}$  включительно, можем записать

$$\varphi_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \beta_{(j)} \bar{\varphi}^{[0]}(\zeta), \theta_{(j)}^{[0]}(\zeta) = \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta),$$

$$a_{(j)z}^{[0]}(\zeta) = -\beta_{(j)} \bar{a}_3^{[0]}(\zeta), \varepsilon_{(j)z}^{[0]}(\zeta) = \beta_{(j)} \delta_0 \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \alpha^* \delta_2,$$
(9)

где

$$\bar{\varphi}^{[0]}(\zeta) = (1 - \alpha^*/3)\zeta - \zeta^2/2 + \alpha^* \zeta^3/6 - \alpha^* \zeta^4/24,$$

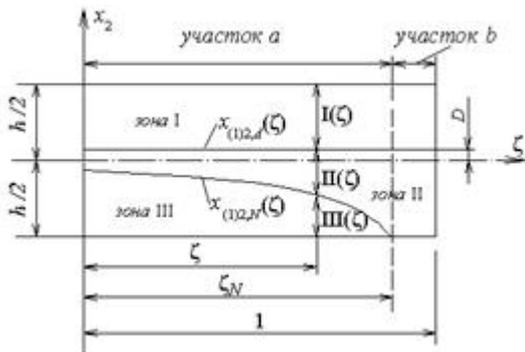
$$\bar{\theta}^{[0]}(\zeta) = 1 - \alpha^*/3 - \zeta + \alpha^* \zeta^2/2 - \alpha^* \zeta^3/6, \bar{a}_3^{[0]}(\zeta) = \delta_3 [1 - \alpha^* \bar{\varphi}^{[0]}(\zeta)].$$
(10)

Из (7) и (9) найдем  $x_{(j)2,N}$  – координату  $x_2$  нейтральной линии на поперечном сечении. Кроме того, положим  $x_{(j)2,N} = -\text{sgn}(\beta_{(j)})h/2$  при  $\zeta > \zeta_N$  ( $\zeta_N$  – координата  $\zeta$  точки пересечения нейтральной линии с верхней или нижней поверхностью балки). Тогда

$$x_{(j)2,N}(\zeta) = l [\delta_0 + \frac{\alpha^* \delta_2}{\beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)}] (\zeta \leq \zeta_N), x_{(j)2,N}(\zeta) = -\text{sgn}(\beta_{(j)}) \frac{h}{2} (\zeta > \zeta_N).$$

При изменении  $\zeta$  координата  $x_{j2,N}$  изменяется. График функции  $x_{(1)2,N} = x_{(1)2,N}(\zeta)$  при  $\alpha_{(1)} < 0$  и  $\beta_{(1)} > 0$  показан на рис.3. Часть балки, находящаяся выше линии  $x_{(1)2,N}(\zeta)$ , находится в сжатой зоне, а та часть, которая находится ниже ее (она обозначена римской цифрой III) – в растянутой.

В соответствии с циклическим изменением силы  $F_1$  параметр  $\beta$  также подвергается циклическому изменению. На первом этапе первого цикла изгиба  $\beta$  увеличивается от  $\beta_{(1)}^* = 0$  до некоторого значения  $\beta_{(2)}^* > 0$ ; на втором этапе  $\beta$  уменьшается от  $\beta_{(2)}^*$  до  $\beta_{(3)}^* = 0$ ; на третьем – уменьшается от  $\beta_{(3)}^* = 0$  до  $\beta_{(4)}^* < 0$ ; на четвертом этапе – увеличивается от  $\beta_{(4)}^*$  до 0. На втором и последующих циклах этапы повторяются, однако  $\beta_{(j)}^*$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) могут отличаться от их значений в разных циклах.



На первом этапе растянутая зона увеличивается, а сжатая уменьшается. Кроме того, в части сжатой зоны сжимающие напряжения увеличиваются (т.е. там идет процесс нагружения), в другой части сжатой зоны они уменьшаются (т.е. здесь идет процесс разгрузки). Линию  $x_{(j)2,d} = x_{(j)2,d}(\zeta)$ , разграничивающую эти части сжатой зоны, будем определять из равенства

Рис.3

$$\partial \sigma_{(j)21}^{[0]}(\zeta) / \partial \beta_{(j)} = 0$$
(11)

В пределах выбранной точности получаем из (8) и (9)

$$x_{(j)2,d}(\zeta) = D$$
(12)

Таким образом, часть сжатой зоны при  $x_2 > D$  является зоной нагружения (на рис.3 она обозначена римской цифрой I), а при  $x_2 < D$  – зоной разгрузки (на рис.3 обозначена римской цифрой II).

Координата  $\zeta_{(j)N}$ , определяющая точку пересечения нейтральной линии с верхней или нижней поверхностью балки, находится из условия  $x_{(j)2,N}(\zeta_N) = -\text{sgn}(\beta_{(j)})h/2$ . Из (11) следует, что  $\zeta_{(j)N}$  является корнем уравнения

$$\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta_{(j)N}) = -\alpha^* \delta_l / [\beta_{(j)}(D + \text{sgn}(\beta_{(j)})h/2 + D)]. \quad (13)$$

Среднее удлинение  $\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$ , а также октаэдрическая деформация сдвига  $\bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)$  в первом приближении определяются так

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]} &= (\varepsilon_{(j)11}^{[0]} + \varepsilon_{(j)22}^{[0]} + \varepsilon_{(j)33}^{[0]})/3, \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]} = 2\{(\varepsilon_{(j)11}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{(j)22}^{[0]})^2 + \\ &+ (\varepsilon_{(j)33}^{[0]})^2 - \varepsilon_{(j)11}^{[0]}\varepsilon_{(j)22}^{[0]} - \varepsilon_{(j)22}^{[0]}\varepsilon_{(j)33}^{[0]} - \varepsilon_{(j)33}^{[0]}\varepsilon_{(j)11}^{[0]} + 3[(\varepsilon_{(j)12}^{[0]})^2 + \\ &+ (\varepsilon_{(j)23}^{[0]})^2 + (\varepsilon_{(j)31}^{[0]})^2]\}^{1/2}/3 \end{aligned} \quad (14)$$

( $\varepsilon_{(j)kk}^{[0]}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – элементы тензора конечных деформаций в точках балки, определенные в первом приближении).

В [2] показано, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \varepsilon_{(j),(\zeta)}^{[0]} - [1 - K_2^{[0]}\varepsilon_{(j),(\zeta)}^{[0]}/K_1^{[0]}]\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)x_2/l, \\ \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \{[a_{(j)B}^{[0]}(\zeta)]^2 d_2^2(x_2) + 2K_2^{[0]}[\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)\frac{x_2}{l} - \varepsilon_{(j),(\zeta)}^{[0]}/K_1^{[0]}] / \\ &/2, \varepsilon_{(j)12}^{[0]}(\zeta, x_2) = -[1 + \varepsilon_{(j),(\zeta)}^{[0]}]a_{(j)B}^{[0]}(\zeta)d_2(x_2)/2, \varepsilon_{(j)33}^{[0]}(\zeta, x_2) = \\ &= \varepsilon_{(j)13}^{[0]}(\zeta, x_2) = \varepsilon_{(j)23}^{[0]}(\zeta, x_2) = 0 \quad (K_1^{[0]} = K^{[0]} + 4G^{[0]}/3). \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая (9) и оставляя величины первого порядка малости относительно  $\beta$ , можем записать

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= \alpha^* \delta_l - \beta_{(j)}(\frac{x_2}{l} - \delta_0)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} \times \\ &\times [\alpha^* \delta_l - \beta_{(j)}(\frac{x_2}{l} - \delta_0)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)], \varepsilon_{(j)12}^{[0]}(\zeta, x_2) = -\frac{1}{2}\beta_{(j)}\bar{a}_3^{[0]}(\zeta)d_2(x_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом,  $\varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -K_2^{[0]}\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2)/K_1^{[0]}$  и в пределах указанной выше точности будем иметь

$$\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = \frac{1}{3}K_4^{[0]}\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2), \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = \frac{2}{3}\sqrt{K_3^{[0]}}|\varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2)|, \quad (17)$$

где  $K_3^{[0]} = 1 + K_2^{[0]}/K_1^{[0]} + (K_2^{[0]}/K_1^{[0]})^2$ ,  $K_4^{[0]} = 1 - K_2^{[0]}/K_1^{[0]}$ .

Из (16) и (17) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11}^{[0]}(\zeta, x_2) &= 3\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)/K_4^{[0]}, \varepsilon_{(j)22}^{[0]}(\zeta, x_2) = -3K_2^{[0]}\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)/ \\ &/ (K_1^{[0]}K_4^{[0]}), \bar{\gamma}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2) = 2\sqrt{K_3^{[0]}}|\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta, x_2)|/K_4^{[0]}. \end{aligned} \quad (18)$$

Можно убедиться, что  $\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)$  сохраняет знак в пределах каждой зоны. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(j)11\Delta}^{[0]}(\zeta) &= \beta_{(j)\Delta}\delta_0\bar{\theta}^{[0]}(\zeta), \bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2) = -K_4^{[0]}\beta_{(j)\Delta}(x_2/l - \delta_0)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)/3, \\ \bar{\gamma}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2) &= 2\sqrt{K_3^{[0]}}|\beta_{(j)\Delta}(x_2/l - \delta_0)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)|/3, \varepsilon_{(j)12\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2) = \\ &= 3\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)/K_4^{[0]}, \varepsilon_{(j)22\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2) = -3K_2^{[0]}\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)/(K_1^{[0]}K_4^{[0]}) \end{aligned} \quad (19)$$

(при выводе этих формул учтено, что  $\alpha = \text{const}$ ).

Для составляющей  $\varphi_{(j)\Delta}^{[1]}(\zeta)$  второго приближения в (1) имеем следующее дифференциальное уравнение [1]:

$$\frac{d^2\varphi_{(j)\Delta}^{[1]}}{d\zeta^2} + \frac{Dl}{H} \frac{dR_{(j)\Delta}^{[1]}}{d\zeta} - \frac{l^2}{H} R_{(j)2\Delta}^{[1]} = -\frac{l}{H} \frac{dM_{(j)3}^{\circ}}{d\zeta}. \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
M_{(j)3}^{\circ}(\xi) &= -DH_{j\Delta} \varepsilon_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi) - [J_1 D_{(j)}^+(\xi) + J_2 D_{(j)}^-(\xi) - b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\xi)] \theta_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi) + \\
&+ J_3 D_{(j)}^-(\xi) - b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\xi) \varepsilon_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi), J_1 = (K_1^{[0]} + E_1^{[0]}) J / (2K_1^{[0]}) + E_a (S_1 h_1^2 + \\
&+ S_1 h_2^2) / K_1^{[0]}, J_2 = E_a (S_1 h_1^3 - S_1 h_2^3) / (K_{(j)1}^{[0]} h), J_3 = JK_2^{[0]} / (K_1^{[0]} h), K_1^{[0]} = \\
&= K^{[0]} + 4G^{[0]} / 3, K_2^{[0]} = K^{[0]} - 2G^{[0]} / 3, \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\xi) = \int_{-h/2}^{h/2} E_{(j)1}^{[1]}(\xi, x_2) x_2 dx_2, \\
\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\xi) &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{(j)1}^{[1]}(\xi, x_2) x_2^2 dx_2, E_{(j)1}^{[1]}(\xi, x_2) = K_{(j)1}^{[1]}(\xi, x_2) - K_{(j)2}^{[1]}(\xi, x_2) \times \\
&\times K_2^{[0]} / K_1^{[0]}, K_{(j)1}^{[1]}(\xi, x_2) = K_{(j)}^{[1]} [\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, x_2)] + 4G_{(j)}^{[1]} [\bar{\gamma}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, x_2)] / 3, \quad (21) \\
K_{(j)2}^{[1]}(\xi, x_2) &= K_{(j)}^{[1]} [\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, x_2)] - 2G_{(j)}^{[1]} [\bar{\gamma}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, x_2)] / 3, D_{(j)}^{\pm}(\xi) = \\
&= K_{(j)1}^{[1]}(\xi, h/2) \varepsilon_{(j)22\Delta}^{[0]}(\xi, h/2) \pm K_{(j)1}^{[1]}(\xi, -h/2) \varepsilon_{(j)22\Delta}^{[0]}(\xi, -h/2) + \\
\text{Здесь} \quad &+ K_{(j)2}^{[1]}(\xi, h/2) \varepsilon_{(j)11\Delta}^{[0]}(\xi, h/2) \pm K_{(j)2}^{[1]}(\xi, -h/2) \varepsilon_{(j)11\Delta}^{[0]}(\xi, -h/2).
\end{aligned}$$

Из (19) получаем

$$\begin{aligned}
D_{(j)}^{\pm}(\xi) &= -\frac{3K_2^{[0]} \bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, \frac{h}{2})}{K_1^{[0]} K_4^{[0]}} K_{(j)1}^{[1]}(\xi, \frac{h}{2}) \mp \frac{3K_2^{[0]} \bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, -\frac{h}{2})}{K_1^{[0]} K_4^{[0]}} K_{(j)1}^{[1]}(\xi, -\frac{h}{2}) + \\
&+ \frac{3\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, \frac{h}{2})}{K_4^{[0]}} K_{(j)2}^{[1]}(\xi, \frac{h}{2}) \pm \frac{3\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\xi, -\frac{h}{2})}{K_4^{[0]}} K_{(j)2}^{[1]}(\xi, -\frac{h}{2}). \quad (22)
\end{aligned}$$

На первом этапе изгиба консоли уравнение (20) имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \varphi_{(1)}^{[1]}}{d\xi^2} + \frac{Dl}{H} \frac{dR_{(1)1}^{[1]}}{d\xi} - \frac{l^2}{H} R_{(1)2}^{[1]} = -\frac{l}{H} \frac{dM_{(1)B}^{\circ}}{d\xi}, \quad (23)$$

так как  $\varphi_{(1)}^{[0]*}(\xi) = \varphi_{(1)}^{[1]*}(\xi) = 0$ .

Из формул [1]

$$R_{(j)A1}^{[1]}(\xi) = -[H_{(j)A} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) - V_{(j)A} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi)] \varphi_{(j)}^{[1]}(\xi),$$

$$R_{(j)A2}^{[1]}(\xi) = -[H_{(j)A} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) + V_{(j)A} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi)] \varphi_{(j)}^{[1]}(\xi)$$

следует, что  $R_{(1)A1}^{[1]*}(\xi) = R_{(1)A2}^{[1]*}(\xi) = 0$  и  $l^2 R_{(j)A1}^{[1]}(\xi) / H = [\alpha_{(j)} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) - \beta_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi)] \varphi_{(j)}^{[1]}(\xi),$

$$l^2 R_{(j)A2}^{[1]}(\xi) / H = [\alpha_{(j)} \cos \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi) + \beta_{(j)} \sin \varphi_{(j)}^{[0]}(\xi)] \varphi_{(j)}^{[1]}(\xi). \quad (24)$$

Тогда 
$$\frac{d^2 \varphi_{(2)}^{[1]*}}{d\xi^2} + \frac{Dl}{H} \frac{dR_{(2)1}^{[1]*}}{d\xi} - \frac{l^2}{H} R_{(2)2}^{[1]*} = -\frac{l}{H} \frac{dM_{(1)B}^{\circ**}}{d\xi},$$

Продолжая таким же образом далее, находим, что (20) для любого этапа может быть записано так

$$\frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[1]}}{d\xi^2} + \frac{Dl}{H} \frac{dR_{(j)A1}^{[1]}}{d\xi} - \frac{l^2}{H} R_{(j)A2}^{[1]} = -\frac{l}{H} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{dM_{(k)B}^{\circ**}}{d\xi} + \frac{dM_{(j)B}^{\circ}}{d\xi} \right] \quad (25)$$

Функции  $K_{(j)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta})$  и  $G_{(j)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta})$  фигурируют в следующем представлении секущих объемного модуля упругости и модуля сдвига для нелинейно-упругого материала:

$$K_{(j)}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}) = K^{[0]} + K_{(j)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}), G_{(j)}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta}) = G^{[0]} + G_{(j)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta}).$$

В [4] показано, что функции  $K_{(j)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta})$  и  $G_{(j)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta})$  можно аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned}
K_{(j)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}) &= K^{[0]}[\tilde{\delta}_{(j)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j)})\chi_{(j)0} + \chi_{(j)1} \frac{\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}}{\bar{\varepsilon}_{(j)m}} + \chi_{(j)2} \frac{\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^2}{\bar{\varepsilon}_{(j)m}^2}], \\
G_{(j)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta}) &= G^{[0]}[\tilde{\delta}_{(j)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j)})\psi_{(j)0} + \psi_{(j)1} \frac{\bar{\gamma}_{(j)\Delta}}{|\bar{\varepsilon}_{(j)m}|} + \psi_{(j)2} \frac{\bar{\gamma}_{(j)\Delta}^2}{\bar{\varepsilon}_{(j)m}^2}],
\end{aligned} \tag{26}$$

где  $\tilde{\delta}_{(j)}, \chi_{(j)k}, \psi_{(j)k} (k=0,1,2)$  – величины, зависящие от типа этапа продольного растяжения или сжатия,  $m = b$  при сжатии и  $m = bt$  при растяжении.

Введем дополнительный субиндекс  $z$ , обозначающий номер зоны, в которой находится точка с координатами  $x_2$  и  $\zeta$ . Например,  $K_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2) = K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)$  при  $\zeta, x_2 \in z$ . Как уже отмечалось выше,  $\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)$  сохраняет знак в пределах каждой зоны. Из (19) находим

$$\begin{aligned}
K_{(j,x)}^{[1]}(x_2, \zeta) &= K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k \bar{\chi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k, \\
G_{(j,x)}^{[1]}(x_2, \zeta) &= G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k \bar{\psi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k.
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
K_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2) &= K_{(j,x)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)), \quad G_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2) = G_{(j,x)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j)\Delta}^{[0]}(\zeta, x_2)), \\
\bar{\chi}_{(j,x)0}(\zeta, x_2) &= \tilde{\delta}_{(j,x)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j,x)})\chi_{(j,x)0}(\zeta, x_2), \quad \bar{\chi}_{(j,x)1}(\zeta, x_2) = \\
&= -K_4^{[0]}(1 + \tilde{\delta}_{(j,x)})\chi_{(j,x)1}(\zeta, x_2)/(3I\bar{\varepsilon}_{(j)m}), \quad \bar{\chi}_{(j,x)2}(\zeta, x_2) = (K_4^{[0]})^2 \times \\
&\times (1 + \tilde{\delta}_{(j,x)})\chi_{(j,x)2}(\zeta, x_2)/(9I^2\bar{\varepsilon}_{(j)m}^2), \quad \bar{\psi}_{(j,x)0}(\zeta, x_2) = \tilde{\delta}_{(j,x)} + (1 + \tilde{\delta}_{(j,x)}) \times \\
&\times \psi_{(j,x)0}(\zeta, x_2), \quad \bar{\psi}_{(j,x)1}(\zeta, x_2) = -2\sqrt{K_3^{[0]}}(1 + \tilde{\delta}_{(j,x)})\psi_{(j,x)1}(\zeta, x_2)/(3I\bar{\varepsilon}_{(j)m}), \\
\bar{\psi}_{(j,x)2}(\zeta, x_2) &= 4K_3^{[0]}(1 + \tilde{\delta}_{(j,x)})\psi_{(j,x)2}(\zeta, x_2)/(9I^2\bar{\varepsilon}_{(j)m}^2)
\end{aligned} \tag{28}$$

( $m = b$  в сжатой зоне и  $m = bt$  – в растянутой).

Назовем отрезок балки  $\zeta \leq \zeta_{(j)N}$  участком  $a$ . Он содержит зоны I, II, III. Отрезок балки  $\zeta_{(j)N} < \zeta \leq 1$  назовем участком  $b$ . Он содержит только две зоны: I и II. Если по формуле (14) получается, что  $\zeta_{(j)N} \leq 0$ , то балка состоит только из одного участка  $b$ . Если же из формулы (14) следует, что  $\zeta_{(j)N} \geq 1$ , то балка состоит только из участка  $a$ . При  $0 < \zeta_{(j)N} < 1$  балка содержит оба участка. Из (21) следует

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) &= K_4^{[0]}[K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^m + \frac{2}{3}(3 + K_4^{[0]})[G_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^m, \\
\bar{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) &= K_4^{[0]}[K_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^m + \frac{2}{3}(3 + K_4^{[0]})[G_{(j)}^{[1]}(\zeta, x_2)]^m.
\end{aligned}$$

Приняты следующие обозначения:

$$[f(x_2)]^m = \int_{-k/2}^{k/2} f(x_2)x_2 dx_2, \quad [f(x_2)]^m = \int_{-k/2}^{k/2} f(x_2)x_2^2 dx_2$$

$$\begin{aligned}
\text{Очевидно} \quad [K_{(j)}^{[1]}]^m(\zeta) &= \sum_{z=1}^{N_z} \bar{K}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta), \quad [G_{(j)}^{[1]}]^m(\zeta) = \sum_{z=1}^{N_z} \bar{G}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta), \\
\bar{K}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta) &= \int K_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2)x_2 dx_2, \quad \bar{G}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta) = \int G_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2)x_2 dx_2
\end{aligned} \tag{29}$$

(каждый из интегралов  $\int_{-k/2}^{k/2}$  берется вдоль отрезка  $\int_{-k/2}^{k/2} z(\zeta)$ , образующегося в результате пересечения прямой, параллельной оси  $x_2$ , с зоной  $z$  (рис.3), причем  $N_z = \text{III}$ , если точка  $\zeta$  находится на участке  $a$ , и  $N_z = \text{II}$  в противном случае). Из (19) следует:

$$\bar{K}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta) = K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k \bar{\chi}_{(j,x)k}(\zeta),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(j,x)}^{[1]}(\zeta) &= G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta), \quad \tilde{X}_{(j,x)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \tilde{\kappa}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) \times \\ &\times (x_2 - D)^k x_2 dx_2, \quad \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2 dx_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (28), получаем

$$\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{s=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta), \quad (31)$$

$$\tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k [K_4^{[0]} K^{[0]}] \tilde{X}_{(j,x)k}(\zeta) + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta) [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k.$$

Аналогично находим, что

$$\tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{s=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta), \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{k=0}^2 \beta_{(j)\Delta}^k [K_4^{[0]} K^{[0]}] \tilde{X}_{(j,x)k}(\zeta) + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta) \times \\ &\times [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^k, \quad \tilde{X}_{(j,x)k}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} \tilde{\kappa}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2^2 dx_2, \quad \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta) = \\ &= \int_{z(\zeta)} \tilde{\Psi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^k x_2^2 dx_2. \end{aligned}$$

Из (21) и (27) получаем

$$K_{(j,x)k}^{[1]}(\zeta, x_2) = \sum_{n=0}^2 K_{(j,x)k,n}^{[1]}(\zeta, x_2) [(x_2 - D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \quad (k=1,2),$$

где  $K_{(j,x)1n}^{[1]}(\zeta, x_2) = \beta_{(j)\Delta}^n [K^{[0]} \tilde{\kappa}_{(j,x)1n}(\zeta, x_2) + 4G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,x)1n}(\zeta, x_2)/3]$ ,

$$K_{(j,x)2n}^{[1]}(\zeta, x_2) = \beta_{(j)\Delta}^n [K^{[0]} \tilde{\kappa}_{(j,x)2n}(\zeta, x_2) - 2G^{[0]} \tilde{\Psi}_{(j,x)2n}(\zeta, x_2)/3] \quad (n=0,1,2).$$

Тогда  $K_{(j,u)k}^{[1]}(\zeta, h/2) = \sum_{n=0}^2 K_{(j,u)k,n}^{[1]}(\zeta, h/2) [(h/2 - D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n$ ,

$$K_{(j,d)k}^{[1]}(\zeta, -h/2) = \sum_{n=0}^2 K_{(j,d)k,n}^{[1]}(\zeta, -h/2) [-\tilde{\kappa}_{(j)1}(h/2 + D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \quad (k=1,2),$$

( $u$  – номер верхней зоны,  $d$  – номер нижней). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D_{(j)k}^{\pm}(\zeta) &= \sum_{n=1}^3 D_{(j)n}^{\pm}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad D_{(j)k}^{\pm}(\zeta) = \beta_{(j)\Delta} \bar{D}_{(j)k}^{\pm}(\zeta), \quad \bar{D}_{(j)k}^{\pm}(\zeta) = \\ &= \bar{D}_{(j,u)k}^{\pm}(\zeta) \pm \bar{D}_{(j,d)k}^{\pm}(\zeta), \quad \bar{D}_{(j,u)k}^{\pm}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} K_{(j,u)1,n-1}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2}) / K_1^{[0]} + \\ &+ K_{(j,u)2,n-1}^{[1]}(\zeta, \frac{h}{2}) (\frac{h}{2} - D)^n / K_4^{[0]}], \quad \bar{D}_{(j,d)k}^{\pm}(\zeta) = 3[-K_2^{[0]} K_{(j,d)1,n-1}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2}) / \\ &/ K_1^{[0]} + K_{(j,d)2,n-1}^{[1]}(\zeta, -\frac{h}{2})] [-\frac{h}{2} + D]^n / K_4^{[0]}. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая (9), запишем выражение для  $M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta)$  из (21) так

$$\begin{aligned} M_{(j)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\delta_0^2 H_i \beta_{(j)\Delta} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) - [J_1 D_{(j)}^+(\zeta) + J_2 D_{(j)}^-(\zeta) - \\ &- b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta)] \beta_{(j)\Delta} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + J_3 D_{(j)}^-(\zeta) - b \tilde{E}_{(j)1}^{[1]}(\zeta) \beta_{(j)\Delta} \delta_0 \bar{\theta}^{[0]}(\zeta). \end{aligned} \quad (34)$$

Из (31)–(33) получаем

$$\begin{aligned}
M_{(j)3}^{\circ}(\zeta) &= -\beta_{(j)\Delta} \bar{M}_{(j)3}^{\circ}(\zeta), \quad \bar{M}_{(j)3}^{\circ}(\zeta) = \delta_0^2 H_i \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \\
&+ \sum_{n=1}^3 A_{(j)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} - b \sum_{s=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + \delta_0 b \times \\
&\times \sum_{s=1}^{N_z} \tilde{E}_{(j,s)1}^{[1]}(\zeta) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) + J_3 \sum_{n=1}^3 B_{(j)n}(\zeta) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad A_{(j)n}(\zeta) = (J_1 + J_2) \times \\
&\times D_{(j,\mu)n}(\zeta) + (J_1 - J_2) D_{(j,d)n}(\zeta), \quad B_{(j)n}(\zeta) = \bar{D}_{(j,\mu)n}(\zeta) - \bar{D}_{(j,d)n}(\zeta).
\end{aligned} \tag{35}$$

Заметим, что с учетом малости  $\varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta)$  в пределах указанной выше точности можно представить выражения (24) так

$$\begin{aligned}
\frac{i^2}{H} \frac{dR_{(j)A1}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} &= \beta_{(j)} \{ \alpha_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) \varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta) + [\alpha_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) - 1] \frac{d\varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} \}, \\
\frac{i^2}{H} R_{(j)A2}^{[1]}(\zeta) &= \alpha^* \varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta).
\end{aligned}$$

Тогда (25) представится в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \varphi_{(j)}^{[1]}}{d\zeta^2} - \alpha^* [1 - \delta_0 \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta) - \delta_0 \beta_{(j)} [1 - \alpha^* \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \frac{d\varphi_{(j)}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} = \\
= -\frac{i}{H} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{dM_{(k)3}^{\circ**}}{d\zeta} + \frac{dM_{(j)3}^{\circ}}{d\zeta} \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

Пользуясь малостью  $\alpha^*$  и  $\beta_{(j)}$ , будем решать уравнение (36) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \varphi_{(j)n+1}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta^2} &= \alpha^* [1 - \delta_0 \beta_{(j)} \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \varphi_{(j)n}^{[1]}(\zeta) + \\
&+ \delta_0 \beta_{(j)} [1 - \alpha^* \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)] \frac{d\varphi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{i}{H} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{dM_{(k)3}^{\circ**}}{d\zeta} + \frac{dM_{(j)3}^{\circ}}{d\zeta} \right].
\end{aligned} \tag{37}$$

Дважды интегрируя по  $\zeta$ , находим

$$\begin{aligned}
\varphi_{(j)n+1}^{[1]}(\zeta) &= \alpha^* \{ [\varphi_{(j)n}^{[1]}]^{###}(\zeta) - \delta_0 \beta_{(j)} [\bar{\theta}^{[0]} \varphi_{(j)n}^{[1]}]^{###}(\zeta) \} + \\
&+ \delta_0 \beta_{(j)} \{ [\varphi_{(j)n}^{[1]}]^\#(\zeta) - \alpha^* [\bar{\theta}^{[0]} \frac{d\varphi_{(j)n}^{[1]}}{d\zeta}]^{###}(\zeta) - \frac{i}{H} \{ \sum_{k=1}^{j-1} [M_{(k)3}^{\circ**}]^\#(\zeta) + \\
&+ [M_{(j)3}^{\circ}]^\#(\zeta) \} + c_{(j)0} \zeta + c_{(j)1}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Полагая  $\varphi_{(j)0}^{[1]}(\zeta) \equiv 0$ , получаем

$$\varphi_{(j)1}^{[1]}(\zeta) = -\frac{i}{H} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} [M_{(k)3}^{\circ**}]^\#(\zeta) + [M_{(j)3}^{\circ}]^\#(\zeta) \right\} + c_{(j)0} \zeta + c_{(j)1}. \tag{39}$$

Знак # здесь означает следующее:  $[f]^\#(\zeta) = \int_0^\zeta f(\tau) d\tau$ . Из граничного условия  $\varphi_{(j)1}^{[1]}(0) = 0$  следует, что  $c_{(j)1} = 0$ . Значение  $c_{(j)0}$  определяется из второго граничного условия

$$\frac{d\varphi_{(j)1}^{[1]}(1)}{ds} = 0. \quad \text{Учитывая, что } \bar{\theta}_{(j)\Delta}^{[0]}(1) = 0, \text{ получаем}$$

$$c_{(j)0} = i \left[ \sum_{k=1}^{j-1} M_{(k)3}^{\circ**}(1) + M_{(j)3}^{\circ}(1) \right] / H. \tag{40}$$

Из (35) находим, что

$$[M_{(j)3}^{\circ}]^\#(\zeta) = -\beta_{(j)\Delta} [\bar{M}_{(j)3}^{\circ}]^\#(\zeta), \tag{41}$$

где при  $\zeta \leq \zeta_N$

$$[\bar{M}_{(j)z}^{\circ}]^{\#}(\zeta) = \delta_0^2 I H_i [\bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) + \sum_{n=1}^3 [A_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) - \\ - b \sum_{s=1}^{N_z} ([\bar{E}_{(j,s)}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) - \delta_0 [\bar{E}_{(j,s)}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta)) + \sum_{n=1}^3 [B_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta), \quad (42)$$

а при  $\zeta > \zeta_N$

$$[\bar{M}_{(j)z}^{\circ}]^{\#}(\zeta) = [\bar{M}_{(j)z}^{\circ}]^{\#}(\zeta_N) + \delta_0^2 I H_i [\bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) + \sum_{n=1}^3 [A_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) - \\ - b \sum_{s=1}^{N_z} ([\bar{E}_{(j,s)}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) - \delta_0 [\bar{E}_{(j,s)}^{[1]} \bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta)) + \sum_{n=1}^3 [B_{(j)n} (\bar{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta), \quad (43)$$

$$[f]_{\delta}^{\#}(\zeta) = \int_{\zeta_N}^{\zeta} f(\tau) d\tau$$

где  $\int_{\zeta_N}^{\zeta}$ . Заметим, что коэффициенты  $A_{(j)n}$  и  $B_{(j)n}$ , а также число зон  $N_z$  различны на участках  $a$  и  $b$ .

Равенства (39)–(43) с применением формул (27)–(33) представляют алгоритм нахождения  $\Phi_{(j)1}^{[1]}(\zeta)$ . Аналогичный алгоритм (т.е. с добавлением формулы (38)) применяется и для определения  $\Phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)$  при  $n > 1$ . Остановившись на некотором шаге  $n$ , полагая  $\Phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) = \Phi_{(j)n}^{[1]}(\zeta)$ , используя равенство

$$\Phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) = \Phi_{(j)}^{[0]}(\zeta) + \Phi_{(j)}^{[1]}(\zeta) \quad (44)$$

вытекающее из (1), а также (9) и (10), находим  $\Phi_{(j)}^{[1]}(\zeta)$  при любом  $j$ .

**Вывод.** Предложенный в статье метод позволяет определять прогибы железобетонной консольной балки при циклическом нагружении с учетом различного нелинейного поведения бетона в сжатых и растянутых зонах, а также с учетом различного его поведения при увеличении нагрузки (при нагружении) и при уменьшении нагрузки (при разгрузке).

### Литература

1. Фомин В.М. Нелинейная теория плоского изгиба железобетонных балок // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2008. – с. 313 – 324.
2. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – с. 273 – 287.
3. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 28, – Одесса, 2007. – с. 354 – 368.
4. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига для бетона при циклическом нагружении (2) // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2007. – с. 325 – 334.