

К РАСЧЕТУ ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ВАРИАНТА МГЭ

Ковров А.В., Синюкина Т.А., Ланевская М.О. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Запропонований системний підхід до формування розв'язкових рівнянь числово-аналітичного варіанту методу граничних елементів (МГЕ) деформування плоско-просторових рамних конструкцій.

Актуальность исследований – при расчете конструкций перекрытий, фундаментов, представляющих собой рамы, нагруженные перпендикулярно их плоскости на статические и динамические воздействия существует проблема учета перераспределения усилий вследствие процессов трещинообразования, неравномерной осадки опор, других воздействий.

Цель работы – формирование при расчете плоскопространственных рам системы обозначений, положительных направлений внутренних усилий и перемещений, правил формирования матриц разрешающих уравнения численно-аналитического варианта МГЭ.

Плоскопространственные рамные конструкции испытывают совместные деформации изгиба и кручения.

Деформирование стержня при изгибе и кручении описывают дифференциальные уравнения

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = \frac{m(x)}{GI_p} \quad (2)$$

где v - функция прогибов сечений; EI - изгибная жесткость сечений, которая в упругой стадии работы элемента равна произведению модуля упругости материала на момент инерции поперечного сечения; θ - функция углов закручивания; $m(x)$ - интенсивность распределенных крутящих моментов, приложенных к стержню; GI_p - жесткость при кручении стержня.

Интегрирование уравнений (1) и (2) приводит к системе уравнений, которая в матричном виде может быть представлена следующим образом:

$$Y = AX + B \quad (3)$$

где Y – вектор усилий и перемещений в произвольном сечении; X – вектор усилий и перемещений в начале координат; A – матрица коэффициентов системы уравнений изгиба-кручения; B – матрица внешней нагрузки.

Входящие в уравнение (3) векторы и матрицы имеют следующий вид:

$Y=A=$

$EIv(x)$		1	x	$-x^2/2$	$-x^3/6$		
$EI\varphi(x)$			1	$-x$	$-x^2/2$		
$M(x)$				1	x		
$Q(x)$					1		
$GI_p\theta(x)$						1	x
$M_x(x)$							1

$X(0)=B=$

	$EIV(0)$		$B_{11}(x)$
	$EI\varphi(0)$		$B_{21}(x)$
	$M(0)$		$-B_{31}(x)$
	$Q(0)$		$-B_{41}(x)$
	$GI_p\theta(0)$		$-B_{51}(x)$
	$M_x(0)$		$-B_{61}(x)$

Компоненты вектора нагрузки B формируются согласно [1].

Напряженно-деформированное состояние рамных конструкций описывается матричным уравнением, полученным в результате цепочки равносильных преобразований [1, 2]

$$A^* \cdot X^* = -B(I_i), \Rightarrow Y(I_i) = A(I_i)X(0) + B(I_i) \quad (4)$$

в котором порядок матриц зависит от количества участков разбиения и вместо текущей координаты сечения x рассматривается координата конца участка I_i .

Для плоско-пространственных рам предлагается принять глобальную систему координат, в соответствии с которой формируется порядок нумерации узлов и стержней рамы, приведенные на рис. 1.

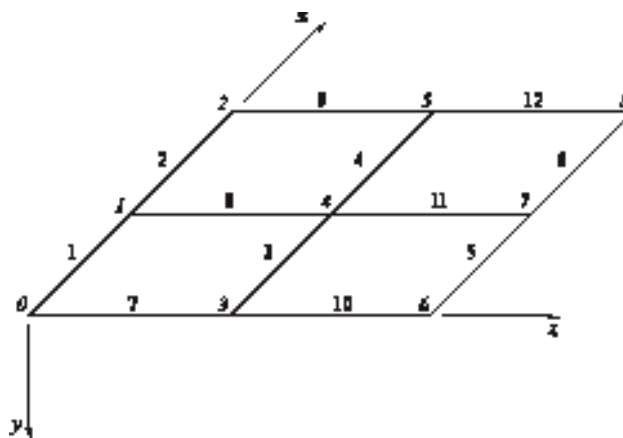


Рис. 1. Глобальная система координат, порядок нумерации узлов и стержней

На рис. 2 приведен принцип принятия направлений локальных систем координат.

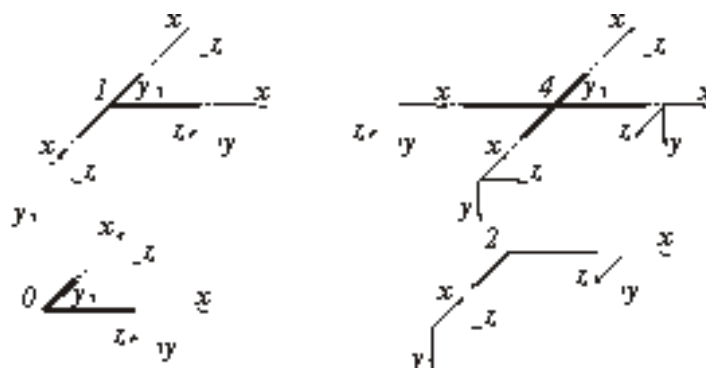


Рис. 2. Локальные системы координат

Направления локальных систем координат определяют правила знаков внутренних усилий и перемещений, положительные направления которых приведены на рис.3.

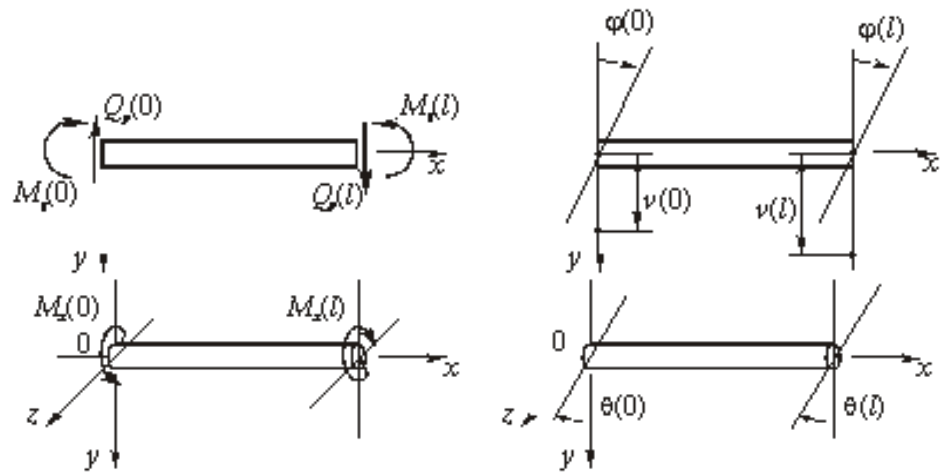


Рис. 3. Положительные направления внутренних усилий и перемещений

Ниже приведены векторы и матрицы (5)...(8) разрешающего уравнения (4), сформированные для рамы, расчетная схема которой приведена на рис. 4.

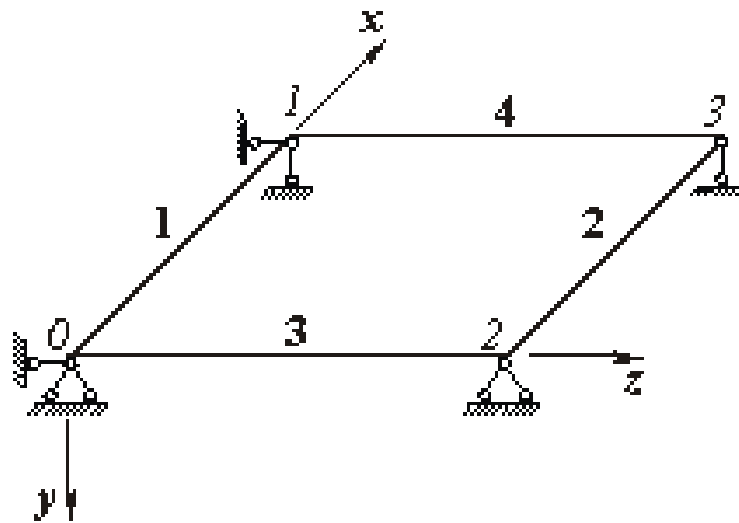


Рис. 4. Расчетная схема плоско-пространственной рамы

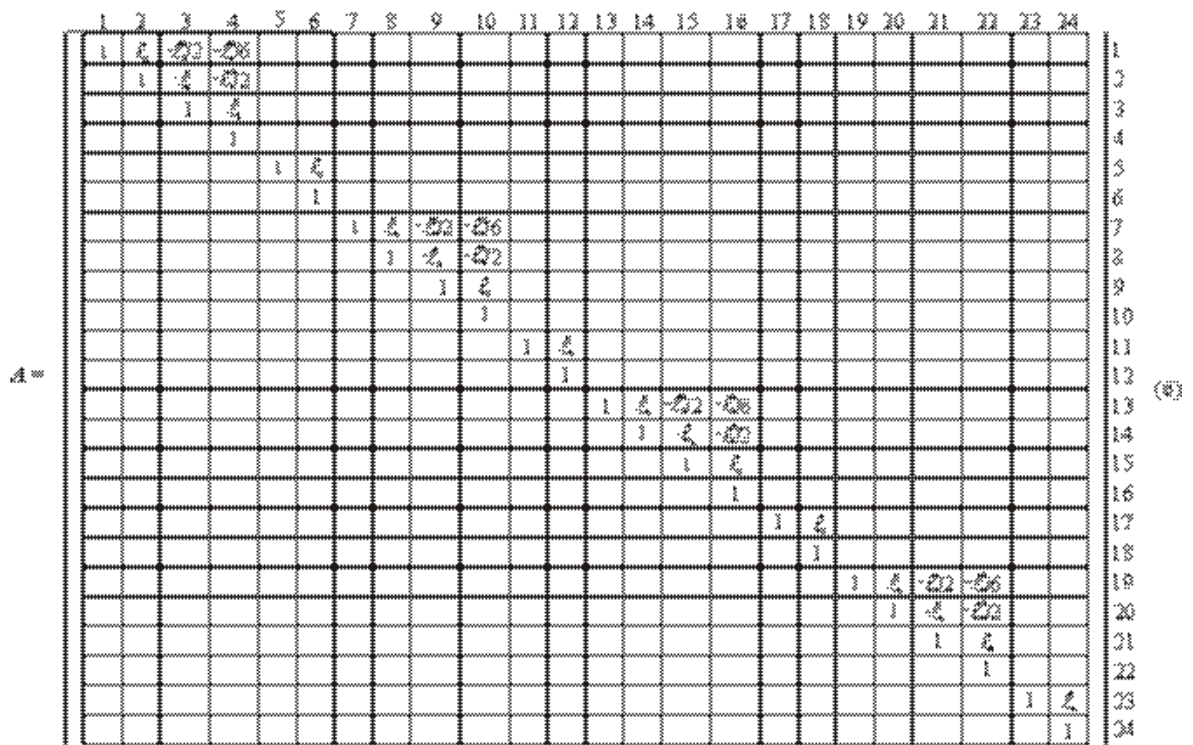
$X(0)=$

1	$EIV_1(0)$
2	$EIQ_1(0)$
3	$M_1(0)$
4	$Q_1(0)$
5	$GI_{\mu}\theta_1(0)$
6	$M_{\mu 1}(0)$
7	$EIV_2(0)$
8	$EIQ_2(0)$
9	$M_2(0)$
10	$Q_2(0)$
11	$GI_{\mu}\theta_2(0)$
12	$M_{\mu 2}(0)$
13	$EIV_3(0)$
14	$EIQ_3(0)$
15	$M_3(0)$
16	$Q_3(0)$
17	$GI_{\mu}\theta_3(0)$
18	$M_{\mu 3}(0)$
19	$EIV_4(0)$
20	$EIQ_4(0)$
21	$M_4(0)$
22	$Q_4(0)$
23	$GI_{\mu}\theta_4(0)$
24	$M_{\mu 4}(0)$

$Y(l)=$

1	$EIV_1(l_1)$
2	$EIQ_1(l_1)$
3	$M_1(l_1)$
4	$Q_1(l_1)$
5	$GI_{\mu}\theta_1(l_1)$
6	$M_{\mu 1}(l_1)$
7	$EIV_2(l_2)$
8	$EIQ_2(l_2)$
9	$M_2(l_2)$
10	$Q_2(l_2)$
11	$GI_{\mu}\theta_2(l_2)$
12	$M_{\mu 2}(l_2)$
13	$EIV_3(l_3)$
14	$EIQ_3(l_3)$
15	$M_3(l_3)$
16	$Q_3(l_3)$
17	$GI_{\mu}\theta_3(l_3)$
18	$M_{\mu 3}(l_3)$
19	$EIV_4(l_4)$
20	$EIQ_4(l_4)$
21	$M_4(l_4)$
22	$Q_4(l_4)$
23	$GI_{\mu}\theta_4(l_4)$
24	$M_{\mu 4}(l_4)$

(5)



1	$Q_1(l_1)$
2	$EI\varphi_1(0) = -nGI_p\theta_1(0)$
3	$M_1(0) = M_{z1}(0)$
4	$Q_1(0)$
5	$GI_p\theta_1(0) = NEI\varphi_3(0)$
6	$M_{z1}(0) = -M_1(0)$
7	$Q_2(l_2)$
8	$EI\varphi_2(0) = -nGI_p\theta_1(l_1)$
9	$M_2(0) = -M_{z2}(l_1)$
10	$Q_2(0)$
11	$GI_p\theta_1(0) = NEI\varphi_3(l_1)$
12	$M_{z2}(0)$
13	$Q_3(l_3)$
14	$EI\varphi_3(l_2) = -nGI_p\theta_1(l_2)$
15	$M_3(l_2) = M_{z3}(l_2)$
16	$Q_3(0)$
17	$GI_p\theta_1(l_2) = NEI\varphi_4(l_2)$
18	$M_{z3}(l_2) = -M_3(l_2)$
19	$Q_4(l_4)$
20	$EI\varphi_4(0) = nGI_p\theta_1(l_3)$
21	$M_4(0) = M_{z4}(l_3)$
22	$Q_4(0)$
23	$GI_p\theta_1(0) = -NEI\varphi_1(l_3)$
24	$M_{z4}(0) = -M_4(l_3)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$																				
	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$																			*	
		1	$\frac{1}{2}$																				1
	-1		1																				
				1	$\frac{1}{2}$																		
					1																		
						$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$															
						1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$															
							1	$\frac{1}{2}$															
									1														
										1													
											1												
												1											
													1										
														1									
															1								
																1							
																	1						
																		1					
																			1				
																				1			
																					1		
																						1	
																							1

Выполнение равносильных преобразований зависит от граничных условий, определяемых условиями опирания. Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4 характерно то, что узловые точки имеют шарнирное опирание, в связи с чем их прогиб отсутствует ($EI^v=0$) и соответствующие элементы векторов граничных параметров обнуляются.

Преобразования связаны с условиями равновесия и совместности деформаций, формирование которых рассмотрим на примере центрального узла 4 (рис.1). На рис. 5 приведены усилия, возникающие в сечениях, прилегающих к данному узлу.

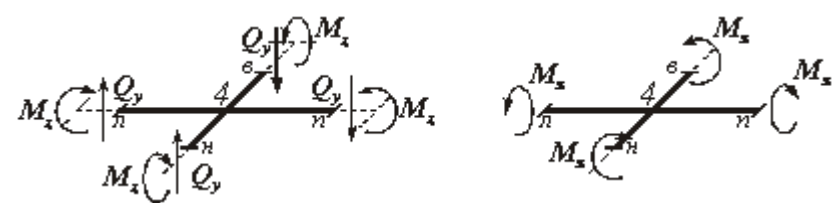


Рис.5. Усилия, возникающие в сечениях, прилегающих к узлу 4 (рис.1)

На основании уравнений равновесия получим следующие зависимости

$$\begin{aligned}
 \sum m_x = 0 & \quad M_{2x} = M_{1x} + M_{3x} - M_{4x} \\
 \sum m_z = 0 & \quad M_{2z} = -M_{1z} + M_{3z} + M_{4z} \\
 \sum y = 0 & \quad Q_{2y} = -Q_{1y} + Q_{3y} + Q_{4y}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Аналогично формируются уравнения совместности деформаций

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -\theta_1 - \varphi_2 - \theta_3 \\
 \theta_1 &= \varphi_1 - \theta_2 + \varphi_3
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

В результате преобразований уравнений (10) с учетом отношений

$$\frac{EI}{GI_p} = n;$$
$$N = \frac{1}{n} \quad (11)$$

получим

$$EI\varphi_n = -nGI_p\theta_n - EI\varphi_n - nGI_p\theta_n$$
$$GI_p\theta_n = NEI\varphi_n - GI_p\theta_n + NEI\varphi_n \quad (12)$$

При рассмотрении других видов узлов в уравнениях (9) и (12) исчезают усилия и перемещения, соответствующие отсутствующим сечениям.

Правила переноса параметров при формировании вектора неизвестных параметров X^* и введения компенсирующих элементов в матрицу коэффициентов A^* сформулированы в [1, 2, 3].

Вывод

Сформулированы системы обозначений, положительных направлений внутренних усилий и перемещений, правила формирования матриц разрешающего уравнения численно-аналитического варианта МГЭ при расчете проскопространственных рам. Записаны уравнения совместности деформаций в узлах, требующие введения отношения жесткостей при изгибе и кручении.

Литература

1. Баженов В.А. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. / Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288с.
2. Оробей В.Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов / Оробей В.Ф., Ковров А.В. – Одесса, 2004. – 122с.
3. Ковров А.В. Напряженно-деформированное состояние неразрезных железобетонных балок: дисс. ... канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» – Одесса, 2007.