

УДК 624.04

МЕХАНІЗМИ ПЛАСТИЧНОГО РУЙНУВАННЯ АРОК

Сорока М. М.¹

¹ *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Розглядається методика визначення граничного навантаження для двошарнірної і безшарнірної арок постійної і змінної жорсткості. Розрахунок виконується із використанням методу граничної рівноваги. Розглядаються арки під дією вертикального рівномірно розподіленого навантаження. Поперечний переріз прийнятий у вигляді не армованого прямокутника. Напружено-деформований стан пружно-пластичного матеріалу описується діаграмою Прандтля. Особливість деформування матеріалу полягає в тому, що границі текучості при розтягуванні і стиску різні. Визначення граничного навантаження базується на врахуванні тільки одного фактору – згинального моменту. Тобто, при виникненні у перерізі арки граничного моменту утворюється пластичний шарнір, який дозволяє необмежену кутову деформацію без зростання згинального моменту. При утворенні кількох пластичних шарнірів розрахункова схема арки перетворюється у механізм. Звичайно, такий підхід призводить до неточностей у визначенні граничного навантаження. Але, на першому етапі дослідження ставилася задача детального вивчення особливостей пластичного механізму руйнування арки.

Для дослідження граничного стану арок використовувались дві методики – аналітичний розрахунок і чисельний розрахунок із залученням методу скінчених елементів. Використання двох методик розрахунку дозволяє контролювати результати і підвищити їх достовірність. З використанням аналітики одержані вирази для визначення граничного навантаження і координат перерізів, де утворюються пластичні шарніри. Для арок постійної жорсткості записані готові формули для визначення граничного навантаження, а для арок змінної жорсткості записані нелінійні рівняння, розв'язок яких дозволяє знайти граничне навантаження. Для чисельного розрахунку використовувався, так званий «простий метод», коли на кожному етапі розрахунку визначалась координата утворення пластичного шарніру і відповідне навантаження. Програма розрахунку написана на APDL.

В результаті дослідження виявлено, що безшарнірна арка в залежності від співвідношення стріли підйому до прольоту має три форм пластичного руйнування, двошарнірна арка має одну форму пластичного руйнування.

Ключові слова: арки, пружнопластичне тіло, прямокутний перетин, пластичний шарнір, розрахунок за граничною рівновагою.

MECHANISMS OF PLASTIC DESTRUCTION OF ARCHES

M. Soroka¹

¹ *Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

The method of determining the limit load for double-hinged and hingeless arches of fixed and variable rigidity is considered. The calculation is performed using the limit equilibrium method. Arches under the influence of a vertical uniformly distributed load are considered. The cross section is taken in the form of a non-reinforced rectangle. The stress-strain state of an elastic-plastic material is described by the Prandtl diagram. The peculiarities of material deformation are that the yield limits in tension and compression are different. The determination of the limit load is based on taking into account only one factor - the bending moment. When a limiting moment occurs in the arch section, a plastic hinge is formed, which allows unlimited angular deformation without increasing the bending moment. When several plastic hinges are formed, the design diagram of the arch turns into a mechanism. Of course, this approach leads to inaccuracies in determining the limit load. However, at the first stage of the study, the task was to study in detail the features of the plastic mechanism of arch destruction.



To study the limiting state of the arches, two methods were used - analytical calculation and numerical calculation using the finite element method. The use of two calculation methods allows you to control the results and increase their reliability. Using analytics, formulas were obtained to determine the limit load and coordinates of the sections where plastic hinges are formed. For arches of constant stiffness, formulas are written to determine the limit load, and for arches of variable stiffness, nonlinear equations are written, the solution of which allows us to find the limit load. For the numerical calculation, a simple method was used, when at each stage of the calculation the coordinate of the formation of the plastic hinge and the corresponding load were determined. The calculation program is written in APDL.

As a result of the study, it was revealed that a hingeless arch, depending on the ratio of the lifting boom to the span, has three forms of plastic destruction, while a double-hinged arch has only one form of plastic destruction.

Keywords: arches, elastoplastic body, rectangular section, plastic hinge, calculation by limit equilibrium.

1 ВСТУП

Використання арок як несучих конструкцій мостів, акведуків і інших споруд відомо з давніх часів. І завжди будівельників цікавило значення навантаження, яке призведе до руйнування арки. Але, при відсутності математичного апарату розрахувати несучу здатність арки було неможливо і будівництво аровних споруд виконувалось виходячи із досвіду інженера, який керував будівництвом. Часто запас міцності арок у десятки разів перевищував потрібну міцність. Це привело до того, що арки, побудовані більше ніж 2000 років потому збереглись до наших часів. У сучасних умовах, коли необхідно економити будівельні матеріали, запас міцності обмежений будівельними нормами. Тому потрібно розробляти більш досконалі методики розрахунку, які дозволять більш точніше виконувати розрахунки і тим самим економити матеріал. У даній роботі представлена аналітична і чисельна методики розрахунку несучої здатності двошарнірної і безшарнірної арок без врахування впливу поздовжньої сили на величину граничного навантаження.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Задачу знаходження руйнівного навантаження сформулював ще Галілео Галілей. Але досить довго ця задача не мала теоретичного розв'язку через відсутність належного математичного апарату. Перші роботи, присвячені теоретичному визначенню граничного навантаження були опубліковані у працях [1]-[4] та інших дослідників лише першій половині двадцятого століття. Були сформульовані гіпотези і створена теорія розрахунку за граничним станом (теорія граничної рівноваги). Виконані дослідження для аровних систем [3]-[6] показали, що величина граничного навантаження залежить не тільки від згинальних моментів, а і від поздовжніх сил. Чіткого порівняння величини граничного навантаження знайденого при врахуванні тільки моментів і при врахуванні моментів і поздовжніх сил у літературі не знайдено. У даній роботі поставлена задача детального дослідження особливостей пластичного механізму руйнування арки без врахування поздовжніх сил. Це значно спрощує задачу розрахунку арки за граничним станом і дозволяє одержати аналітичні залежності для визначення граничного навантаження. Крім аналітичного розв'язку використовується чисельний метод із залученням методу скінчених елементів. Чисельний метод визначення граничного навантаження передбачає виконання кількох статичних розрахунків арки із встановленням шарніру у перерізі, де утворюється пластичний шарнір [7]. Розрахунок виконується до тих пір, поки арка не перетвориться у пластичний механізм. Така методика дозволяє уникнути ітераційних процесів, що дозволяє зменшити похибку розрахунку.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є дослідження граничного стану і пластичного механізму руйнування кругової двошарнірної і безшарнірної арок не враховуючи впливу поздовжніх сил на величину граничного навантаження. Для контролю результатів розрахунку передбачається застосування двох методів. Перший метод – виведення аналітичних рівнянь для визначення граничного навантаження і місць утворення пластичних шарнірів. Другий метод – створення програми чисельного розрахунку з використанням методу скінчених елементів. Розглядаються арки постійної та змінної жорсткості.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

При виведенні загальних рівнянь для визначення граничного навантаження розглядаємо кругову арку, до якої прикладається вертикальне рівномірне розподілене навантаження. Вважаємо, що арка виготовлена із пружно-пластичного матеріалу, який характеризується різними границями пластичності при розтягуванні і стиску. Поперечний переріз арки характеризується граничним моментом M_0 , значення якого залежить від форми, розмірів поперечного перерізу і фізичних характеристик матеріалу. Для арки постійної жорсткості граничний момент однаковий для усіх перерізів, для арки змінної жорсткості кожний переріз має своє значення граничного моменту.

Двошарнірна арка змінної жорсткості. Момент інерції поперечного перерізу арки змінюється за законом

$$I(\alpha) = I_0 \sin \alpha, \quad (1)$$

де I_0 – момент інерції перерізу на осі симетрії арки.

Для симетричного навантаження пластичний механізм руйнування арки також повинен бути симетричним. Для цього необхідно утворення трьох пластичних шарнірів, розташованих симетрично відносно осі симетрії арки. Залежність, яка дозволяє визначити згинальні моменти у перерізах арки має вигляд [9] (використовуються полярна система координат)

$$M(\alpha) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} \cos \alpha^2 - H(R \sin \alpha - R + f), \quad (2)$$

де l , f , R – проліт, стріла підйому і радіус арки; q – інтенсивність навантаження; H – розпор арки; α – координата перерізу арки.

Пластичні шарніри утворюються у перерізах, де діють екстремальні згинальні моменти. Для визначення координат таких перерізів похідну (2) прирівнюємо до нуля

$$\frac{dM(\alpha)}{d\alpha} = \cos \alpha (qR^2 \sin \alpha - HR) = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) має два розв'язки:

$$1. \cos \alpha = 0; \text{ тоді } \alpha_1 = \pi/2; \quad (4)$$

$$2. qR^2 \sin \alpha - HR = 0; \text{ тоді } \sin \alpha_2 = \frac{H}{qR}. \quad (5)$$

Перший розв'язок вказує на переріз, розташований на осі симетрії арки, другий – на два перерізи, розташовані симетрично відносно осі симетрії арки. Підставимо координати перерізів у вираз (2) і прирівняємо моменти у цих перерізах до відповідних граничних моментів:

$$\frac{ql^2}{8} - Hf = M_0; \quad (6)$$

$$\frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} - \frac{H^2}{2q} + H(R - f) = -M_0(\alpha_2), \quad (7)$$

де M_0 – граничний момент перерізу на осі симетрії арки; $M_0(\alpha_2)$ – граничний момент перерізу з координатою α_2 .

Систему рівнянь можна звести до одного рівняння відносно значення граничного навантаження

$$f^4 q^2 - 4f^2 q (M_0 + 2M_0(\alpha_2)) + 4M_0^2 = 0, \quad (8)$$

Для арки, жорсткість якої змінюється за законом (1), висота прямокутного поперечного перерізу змінюється за законом

$$h(\alpha) = h_0 \sqrt[3]{\sin \alpha}, \quad (9)$$

де h_0 – висота поперечного перерізу на осі симетрії арки.

Граничні моменти можуть бути обчислені за формулами [10]:

$$M_0 = \frac{bh_0^2}{2} \frac{\sigma_{yc} \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}}; \quad (10)$$

$$M_0(\alpha_2) = \frac{bh^2(\alpha_2)}{2} \frac{\sigma_{yc} \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = M_0 \sqrt[3]{\sin^2 \alpha_2} = M_0 \sqrt[3]{\frac{H^2}{q^2 R^2}}, \quad (11)$$

де $h(\alpha_2)$ – висота поперечного перерізу арки із координатою α_2 ; σ_{yc} і σ_{yt} – границі пластичності матеріалу при стиску і розтягуванні.

З урахуванням (11) розв'язок нелінійного рівняння (8) виконуємо із допомогою функції «Пошук розв'язку» EXCEL. Оскільки нелінійне рівняння може мати декілька рішень, доцільно ввести обмеження:

$$q > 0; |\sin \alpha_2| \leq 1, \sin \alpha_2 \geq \sin \alpha_0, \quad (12)$$

де α_0 – координата лівої опори арки.

Для арки постійної жорсткості слід прийняти:

$$I = I_0, h = h_0, M_0(\alpha_2) = M_0.$$

Тоді рівняння (8) можна записати так

$$f^4 q^2 - 12M_0 f^2 q + 4M_0^2 = 0. \quad (13)$$

Розв'язок (13) має вигляд

$$q = \frac{4M_0}{f^2} (1,5 + \sqrt{2}) \quad (14)$$

Як видно із (14), граничне навантаження для арки постійної жорсткості прямо пропорційне до величини граничного моменту і обернено пропорційне до квадрату стріли підйому арки.

Таким чином, для двошарнірної кругової арки, завантаженої вертикальним рівномірним розподіленим навантаженням маємо аналітичні залежності для визначення граничного навантаження (14) і координат утворення пластичних шарнірів (4), (5). Для інших навантажень потрібно записувати нові рівняння, що не зовсім зручно.

Для розрахунку арок із будь яким навантаженням створена програма чисельного розрахунку граничного навантаження з використанням методу скінчених елементів (МСЕ). Програма складена на APDL і реалізує прямий метод розрахунку граничного навантаження [7].

Приклади розрахунку двошарнірної арки.

Вихідні дані:

Проліт арки $l = 20\text{м}$, стріла підйому $f = 1\div 9\text{м}$, розміри поперечного перерізу $b = 0.2\text{м}$, $h = 1.0\text{м}$ (для арки змінної жорсткості $h_0 = 1.0\text{м}$), фізичні характеристики матеріалу $\sigma_{yc} = 14500\text{кН/м}^2$, $\sigma_{yt} = 1300\text{кН/м}^2$, $M_0 = 119.3038\text{кНм}$.

Результати аналітичного і чисельного розрахунків представлені у таб. 1.

Приклади побудови епюр згинальних моментів у граничному стані арки і пластичний механізм руйнування представлені на рис. 1-4.

Таблиця 1

Граничне навантаження для двошарнірної арки (кН/м)

f/l	Арка постійної жорсткості			Арка змінної жорсткості		
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %
0.05	1390.707	1390.847	0.01	1383.080	1383.348	0.02
0.10	347.677	347.733	0.02	340.206	340.198	0.00
0.15	154.523	154.536	0.01	147.295	147.253	0.03
0.20	86.919	86.921	0.00	79.998	79.887	0.14
0.25	55.628	55.632	0.01	49.056	48.886	0.35
0.30	38.631	38.631	0.00	32.426	32.174	0.78
0.35	28.382	28.371	0.04	22.545	22.213	1.48
0.40	21.730	21.726	0.02	16.247	15.811	2.68
0.45	17.169	17.169	0.00	12.014	11.406	5.04

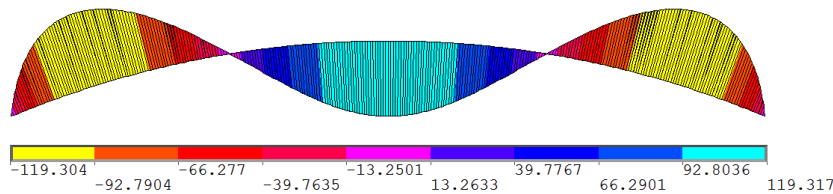


Рис. 1. Епюра моментів в граничному стані арки постійної жорсткості ($f/l = 0,1$)

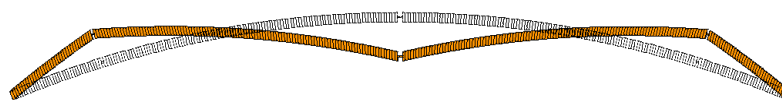


Рис. 2. Пластичний механізм руйнування арки постійної жорсткості ($f/l = 0,1$)

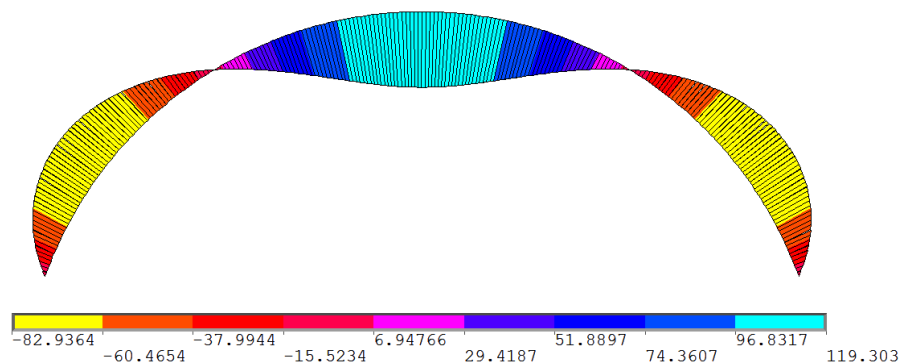


Рис. 3. Епюра моментів в граничному стані арки змінної жорсткості ($f/l = 0,35$)

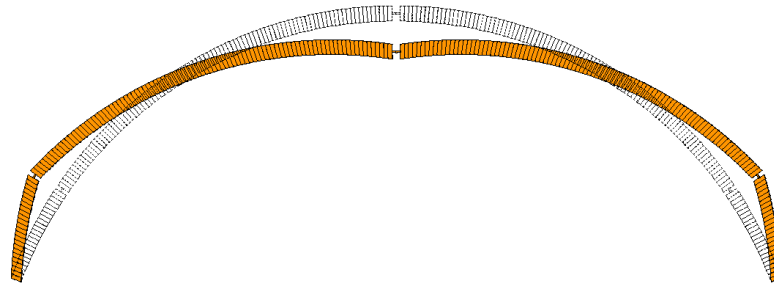


Рис. 4. Пластичний механізм руйнування арки змінної жорсткості ($f/l = 0,35$)

Безшарнірна кругова арка змінної жорсткості (рис. 5).

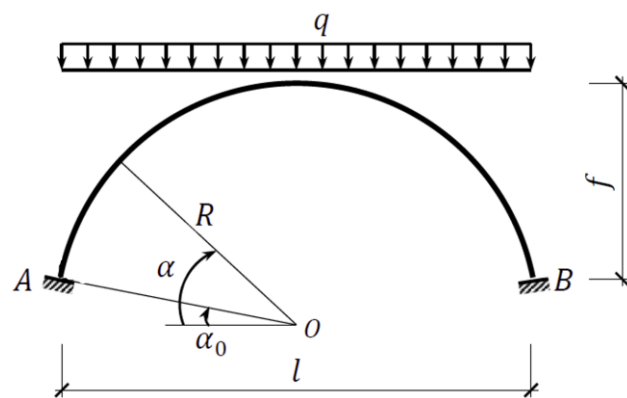


Рис. 5. Розрахункова схема безшарнірної арки

Для безшарнірної кругової арки змінної жорсткості навантаження і характеристики арки приймаємо такі ж, як і для двошарнірної арки. Момент інерції поперечного перерізу арки змінюється за законом

$$I(\alpha) = I_0 / \sin \alpha \quad (15)$$

де I_0 – момент інерції перерізу на осі симетрії арки.

Записуємо вираз для обчислення згинальних моментів у перерізах арки

$$M(\alpha) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} \cos \alpha^2 - H(R \sin \alpha - R + f) + M(\alpha_0) \quad (16)$$

де $M(\alpha_0)$ – момент в опорних перерізах арки.

Прирівнявши похідну (16) до нуля, одержимо координати перерізів (4), (5), у яких утворюються пластичні шарніри. Підставивши у (16) координати перерізів (4), (5), і прирівнявши значення моментів у цих перерізах до відповідних граничних моментів, одержимо:

$$\frac{ql^2}{8} - Hf + M(\alpha_0) = M_0; \quad (17)$$

$$\frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{4} - R^2 \right) - \frac{H^2}{2q} + H(R - f) + M(\alpha_0) = -M_0(\alpha_2), \quad (18)$$

Значення граничного моменту M_0 для перерізу, розташованого на осі симетрії арки визначається з використанням (10). Граничні моменти для перерізів з координатами α_0 і α_2 визначаємо за формулами:

$$M_0(\alpha_0) = \frac{bh^2(\alpha_0)}{2} \frac{\sigma_{yc}\sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = \frac{M_0}{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha_0}} \quad (19)$$

$$M_0(\alpha_2) = \frac{bh^2(\alpha_2)}{2} \frac{\sigma_{yc}\sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = \frac{M_0}{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha_2}} = M_0 \sqrt[3]{\frac{q^2 R^2}{H^2}}, \quad (20)$$

$$\text{де } h(\alpha_0) = h_0 / \sqrt[3]{\sin \alpha_0}; \quad h(\alpha_2) = h_0 / \sqrt[3]{\sin \alpha_2}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{H}{qR}.$$

Система нелінійних рівнянь (17), (18), крім невідомих q і H , містить невідоме значення опорного моменту $M(\alpha_0)$ у граничному стані арки, що не дозволяє знайти розв'язок задачі. Тому для розрахунку граничного стану арки була складена програма розрахунку, яка реалізувала чисельний метод. На основі аналізу результатів, одержаних чисельним методом, виявлені особливості зміни опорного моменту при різних співвідношеннях f/l . Знання опорного моменту дозволило виконати розв'язок системи рівнянь (17), (18) за допомогою EXCEL із залученням обмежень (12).

Для арки постійної жорсткості слід прийняти $h = h_0$, $M_0(\alpha_2) = M_0$.

Тоді систему рівнянь (17), (18) можна звести до квадратного рівняння

$$q^2 f^4 - 4q f^2 [M(\alpha_0) + 3M_0] + 4[M(\alpha_0) - M_0]^2 = 0. \quad (21)$$

Розв'язок (21) представимо у вигляді

$$q = \frac{2M_0}{f^2} \left[\frac{M(\alpha_0)}{M_0} + 3 + \sqrt{\left(\frac{M(\alpha_0)}{M_0} + 3 \right)^2 - \left(\frac{M(\alpha_0)}{M_0} - 1 \right)^2} \right] \quad (22)$$

Приклади розрахунку безшарнірної арки.

Розміри поперечного перерізу і фізичні характеристики матеріалу прийняті такими як і для двошарнірної арки.

Результати розрахунку показали, що безшарнірна арка постійної жорсткості має три можливих механізми пластичного руйнування в залежності від співвідношення стріли підйому до прольоту арки (рис. 6). Точками розділу форм пластичного руйнування є точки, де графік кривої опорного моменту $M(\alpha_0)$ змінює свій характер. Перша точка $f/l = 0,147$ обчислюється в EXCEL із залученням рівнянь статичного розрахунку арки [10] і додатковою умовою $\alpha_2 = \alpha_0$. Для другої точки $f/l = 0,237$ аналітичного розв'язку не було знайдено і значення f/l визначалось шляхом підбору.

При $f/l \leq 0,147$ пластичні шарніри утворюються в опорних перерізах, на невеликій відстані від опор і на осі симетрії арки. Для аналітичного розрахунку слід прийняти $M(\alpha_0) = -M_0$, тоді для визначення граничного навантаження вираз (22) можна привести до вигляду

$$q = \frac{4M_0}{f^2}. \quad (23)$$

При $0,147 < f/l < 0,237$ пластичний шарнір утворюється на осі симетрії арки і підряд декілька пластичних шарнірів утворюються симетрично на деякій відстані від опор.

Ділянка графіка опорного моменту на цьому інтервалі може бути описана за допомогою апроксимаційного поліному:

$$\frac{M(\alpha_0)}{M_0} = a_1 \left(\frac{f}{l} \right)^4 + a_2 \left(\frac{f}{l} \right)^3 + a_3 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + a_4 \left(\frac{f}{l} \right) + a_5,$$

де $a_1 = 56707,98801$; $a_2 = -46444,01909$; $a_3 = 14131,62162$; $a_4 = -1867,67974$; $a_5 = 89,22801$.

При $f/l \geq 0,237$ реалізується класична схема пластичного руйнування арки – пластичні шарніри утворюються в опорних перерізах, на осі симетрії і симетрично на деякій відстані від опор. Для аналітичного розрахунку у (22) слід приймати $M(\alpha_0) = M_0$. Тоді маємо:

$$q = \frac{16M_0}{f^2}. \quad (24)$$

Граничні епюри моментів для трьох описаних випадків представлені на рис. 7-9.

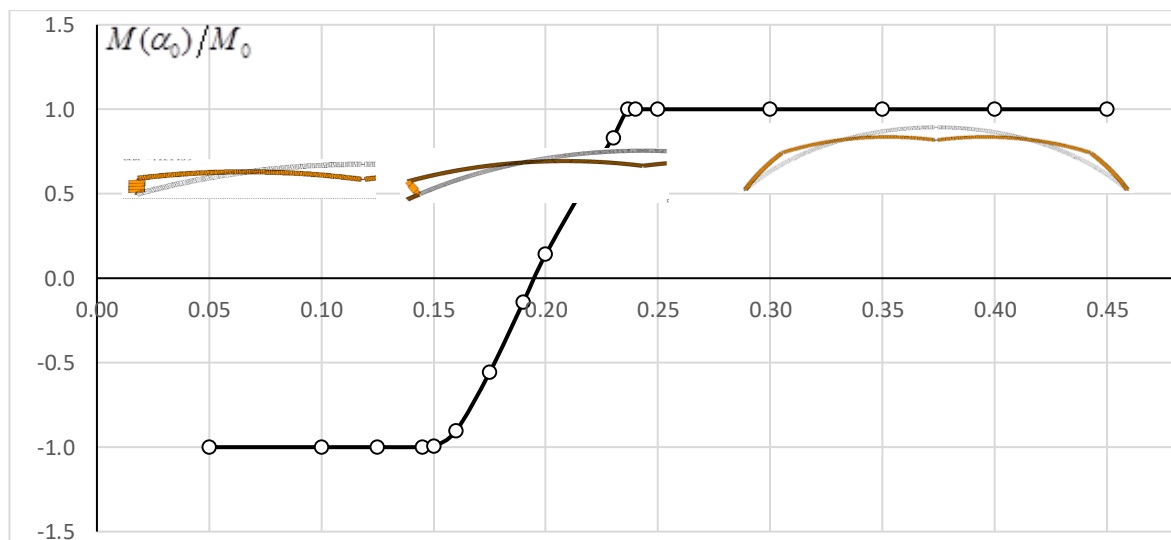


Рис. 6. Графік зміни опорного моменту для безшарнірної арки постійної жорсткості

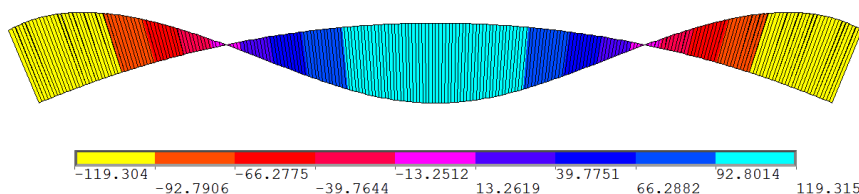


Рис. 7. Епюра згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при $f/l = 0,1$

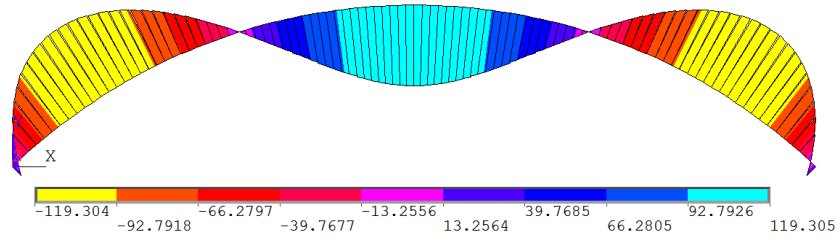


Рис. 8. Епюра згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при $f/l = 0,2$

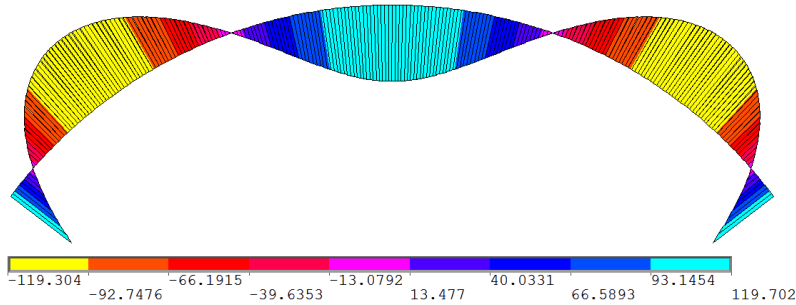


Рис. 9. Епюра згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при $f/l = 0,25$

Розрахунок арки змінної жорсткості ускладнюється тим, що завдяки змінному поперечному перерізу змінним є і граничний момент уперерізі. Тому графік зміни опорного моменту не має горизонтальних ділянок (рис. 10). Але, незважаючи на це, спостерігається схожа картина пластичного руйнування арки у граничному стані. Як видно із рис. 6 і рис. 10, точки, які розділяють форми пластичного руйнування, мають приблизно ті ж значення ($f/l = 0,147$ і $f/l = 0,246$), що і для арки постійної жорсткості.

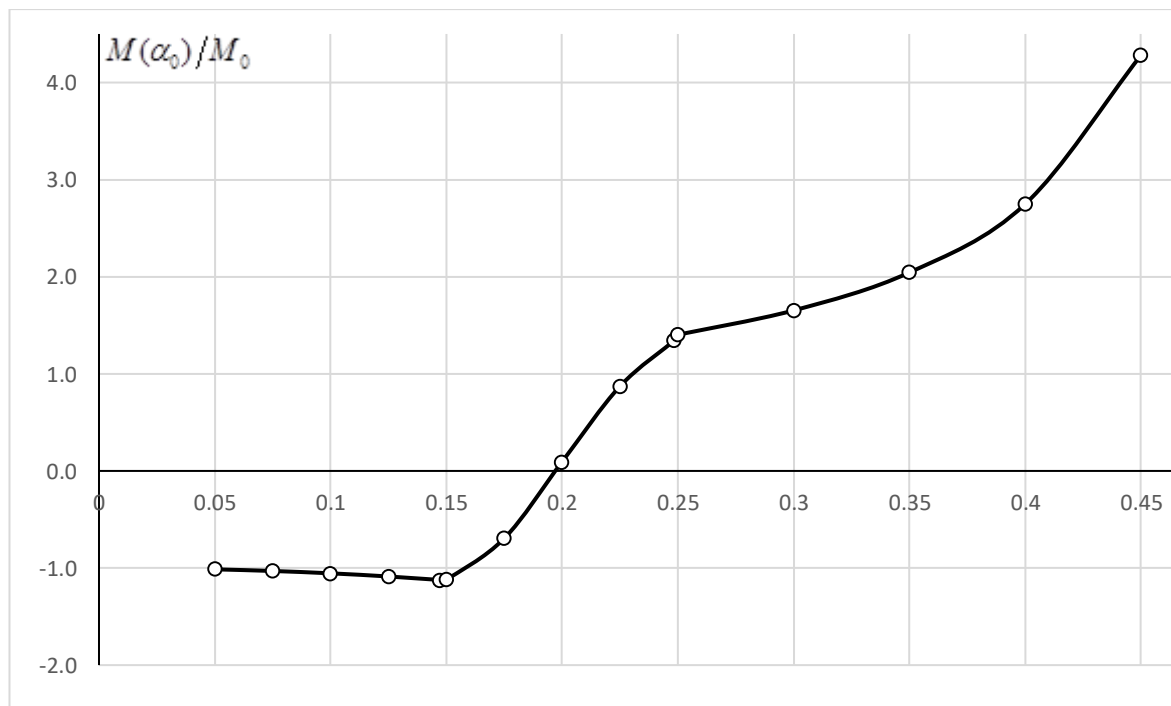


Рис. 10. Графік зміни опорного моменту для безшарнірної арки змінної жорсткості

Порівняння результатів розрахунку граничного навантаження для арок постійної і змінної жорсткості наведено у таб. 2.

Таблиця 2

Граничне навантаження для безшарнірної арки ($\kappa H/m$)

f/l	Арка постійної жорсткості			Арка змінної жорсткості		
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %
0.05	477.216	479.118	0.40	512.935	512.931	0.00
0.10	119.304	119.775	0.39	129.020	128.426	0.46
0.15	57.482	57.486	0.39	59.732	59.545	0.31
0.20	91.912	91.912	0.01	95.915	95.783	0.14
0.25	76.354	76.355	0.00	89.691	89.509	0.20
0.30	53.024	53.024	0.00	66.909	66.663	0.37
0.35	38.956	38.957	0.00	53.769	53.463	0.57
0.40	29.826	29.826	0.00	46.511	46.165	0.74
0.45	23.566	23.566	0.00	45.039	44.715	0.72

Таблиця 2 показує добру збіжність результатів аналітичного і чисельного розрахунків. Більша відмінність результатів для арки змінної жорсткості пов'язана з тим, що при виконанні чисельного розрахунку жорсткість у межах окремого скінченного елемента була постійною і змінювалась стрибком при переході до іншого елемента.

5 ВИСНОВКИ

1. Двошарнірна арка при дії рівномірно розподіленого навантаження має лише одну форму пластичного руйнування для будь яких відношень f/l .
2. Безшарнірна арка при дії рівномірно розподіленого навантаження має три різні форми пластичного руйнування в залежності від співвідношення f/l .
3. Значення граничного навантаження для арки постійної жорсткості (двошарнірної і безшарнірної) прямо пропорційне граничному моменту і обернено пропорційне до квадрату стріли підйому арки.
4. Результати чисельного розрахунку добре співпадають із результатами аналітичного розв'язку, що дозволяє використовувати розроблену програму для розрахунку арок із будь яким навантаженням.

6 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949, -248с.
2. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов Москва: Гостехиздат, 1954, -287с.
3. Чирас А.А. Строительная механика, теория и алгоритмы. Москва: Стройиздат, 1989, 256с
4. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М.: Физматгиз, 1961. – 394с.
5. Проценко А.М., Власов В.В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. //В сб. НИИЖБ, - «Воздействие статических,

- динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций» – М.: Стройиздат, 1972. – с. 191 – 220.
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL: <http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
 7. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М: «Высшая школа», 1986, -607с.
 8. Барабаш М.С. Нелінійна будівельна механіка з ПК Ліра-САПР : монографія / М.С. Барабаш, М.М. Сорока, М.Г. Сур'янінов. – Одеса : Екологія, 2018. – 248с.
 9. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200-208.
 10. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022),

References

1. Gvozdev A.A. Raschet nesushchey sposobnosti konstruktsiy po metodu predel'nogo ravnovesiya. Moscow: Stroyizdat, (1949), - 248 p. (in Russian)
2. Rzhantsyn A.R. Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov. Moscow: The state publishing house of literature on construction and architecture, (1954), 287 p.
3. Chiras A.A. Stroitel'naya mekhanika, teoriya i algoritmi. Moscow: Stroyizdat, (1989), 256 p.
4. Pkovsky A.A. Statika sterzhnevih system so szhatimy elementamy. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, (1961), 394 p. (in Russian)
5. Protsenko A.M., Vlasov V.V. Sticheskiy printsip predel'nogo ravnovesiya i opredeleniye deformirovannogo sostoyaniya staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh konstruktsiy v stadii ischerpaniya ikh nesushchey / // V sb. NIIZHB, - «Vozdeystviye staticheskikh, dinamicheskikh i mnogokratno povtoryayushchikhsya nagruzok na beton i elementy zhelezobetonnykh konstruktsiy», Moscow: Stroyizdat, (1972), - p. 191-220 (in Russian).
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL: <http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. 8. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mekhanika Moscow: "Higher school", (1986), 607 p. (in Russian)
8. Barabash M.S. Neliniyna budivel'na mekhanika z PK Lira-SAPR : monohrafiya / M.S. Barabash, M.M. Soroka, M.H. Sur'yaninov. – Odessa : Ekolohiya, 2018. – 248s
9. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200-208.
10. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022),

Сорока Микола Миколайович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
soroka@odaba.edu.ua,
ORCID: 0000-0002-9551-9475

Для посилань:

Сорока М. М. Механізми пластичного руйнування арок. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. С. 88–99.

For references:

M. Soroka. (2024). Mechanisms of plastic destruction of arches. Mechanics and Mathematical Methods. VI (2). 88-99.