УДК 530.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОЙ СТРУКТУРЫ КОНТАКТИРУЕМЫХ ТЕЛ

Кобринец В.М., Савчук В.В., Чараев А.В. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

Пропонується ефективний метод розв'язання контактної задачі втискування жорсткого штампа в пружну основу з врахуванням поверхневої структури контакту. Цей метод дозволяє звести проблему до розв'язання безкінечної системи алгебраїчних рівнянь. Наводиться доказ регулярності вказаних систем в залежності від комбінації пружних характеристик контактуючих тіл. Метод легко поширюється на задачі про контакт балок кінцевої довжини на пружній основі з довільно діючим навантаженням.

Рассматривается плоская контактная задача вдавливания жесткого штампа (плоская деформация) в упругое основание (без учета касательных взаимодействий в зоне контакта). Учет поверхностной структуры контактируемых тел производится на основе гипотезы И.Я. Штаермана [1]. Упругое основание с характеристиками: E – модуль упругости и μ- коэффициент Пуассона. Контактируемая поверхность штампа – произвольная и задается известной функцией $f(x)$. Действующая внешняя нагрузка - произвольная и сводится к главному вектору (R $\neq 0$), приложенному по оси симметрии штампа, и к главному моменту (M $\neq 0$).Таким образом при представлении функции $f(x)$ в виде: $f(x)=f^{+}(x)+f^{-}(x)$, т.е. в виде суммы четной (+) и нечетной (-) функций; решение задачи при произвольной конфигурации контактируемой поверхности штампа и произвольном загружении распадается на сумму решений симметричной и кососимметричной задач.

В данной работе предложен приближенный способ решения на основе метода, разработанного Г.Я. Поповым в работе [2]. Сущность метода заключается в представлении ядра интегрального уравнения второго рода, к решению которого сводится данная задача, в виде ряда по ортонормированной системе функций, т.е. получения его билинейного разложения. Предложенный способ позволяет свести решение задачи к решению бесконечной системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов, позволяющих вычислять значения контактных напряжений. Представлено доказательство регулярности систем алгебраических уравнений, позволяющее решать эти системы методами редукции. Даны рекомендации, позволяющие учитывать влияние величин упругих констант на сходимость итерационного процесса вычисления контактных напряжений. Выполнена численная реализация метода для решения контактной задачи погружения жесткого штампа с плоским основанием в комбинированное основание при произвольном загружении.

А. Рассмотрим плоскую контактную задачу вдавливания жесткого штампа в упругое комбинированное основание. Комбинированным основанием будем называть упругую полуплоскость (E и μ), покрытую в зоне контакта $-a \le x \le a$ слоем пружин жесткостью k. По гипотезе И.Я. Штаермана, эти пружины моделируют структуру шероховатости контактируемой поверхности двух тел. Их смещение по вертикали в точке x пропорционально с коэффициентом k действующим контактным усилиям $p(x)$; $-a \le x \le a$

Контактируемая поверхность штампа описывается функцией $f(x)$. Задача формулируется в виде интегрального уравнения второго рода:

$$k \cdot p(x) + \theta \cdot \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|t-x|} p(t)dt = f(x) \qquad -a \le x \le a$$

(А.1)

здесь: k - коэффициент жесткости пружин, моделирующих шероховатость контактируемых поверхностей; $\theta = \dfrac{2(1-\mu^2)}{\pi E}$ - упругие характеристики полуплоскости.

Все произвольные величины, содержащиеся в структуре функции $f(x)$, определим из условия равновесия штампа:

$$\int_{-a}^{a} p(x)dx = R; \quad \int_{-a}^{a} p(x) \cdot x \cdot dx = M. \qquad (А.2)$$

Б. Метод решения. Интегральное уравнение (А.1) подпадает под класс интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Точного решения данного уравнения не существует. В данной работе предложен метод, разработанный Г.Я. Поповым [2], позволяющий параметры основания с упругими и геометрическими характеристиками θ вынести общим множителем, и в представлении ядра интегрального уравнения (А.1) в виде ряда по ортонормированной (ON) системе функций вида на интервале $0 \le x \le 2$:

$$\left|C_m^+(x)\right|, \text{ где: } C_0^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \; C_m^+(x) = Cos(\frac{m\pi x}{2}); \; m=1,2,3,..$$

(Б.3)

С учетом (Б.3) ядро интегрального уравнения (А.1) $\ln(\dfrac{1}{|t-x|}$ далее $K(s)$ представимо рядом:

$$K(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^+(s); \; 0 \le s \le 2; \; a_m = \int_0^2 K(s) C_m^+(s)ds$$

(Б.4)

Этот метод справедлив, если выполняются следующие условия: а) ядро интегрального уравнения – функция четная; б) число $\lambda = \dfrac{\pi a \theta}{\pi k}$ не является собственным числом интегрального оператора; в) и ядро интегрального уравнения является суммируемой функцией, принадлежащей классу L_2 [4]. То есть:

$$K^2 = \int_0^2 \ln^2(\frac{1}{x})dx = 2.188318 < \infty .$$

Рассмотрим отдельно четное $p_+(x)$ и нечетное $p_-(x)$ решения интегрального уравнения. Для этого представим $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, тогда интегральное уравнение (А.1) примет вид после выполненной замены: $x = a \cdot \tau; t = a \cdot s; dt = ads$ и

$$p(a\tau) = \varphi(\tau); \frac{1}{k} f(a\tau) + const = f(\tau); c = \frac{\pi a \theta}{k}:$$

$$\varphi_\pm(\tau) + \frac{c}{\pi} \int_0^1 K_\pm(\tau; s) \varphi_\pm(s)ds = f_\pm(\tau); \qquad 0 \le \tau \le 1 \qquad (Б.5)$$

где:

$$K_\pm(\tau; s) = \ln \frac{1}{|s-\tau|} \pm \ln \frac{1}{s+\tau} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^\pm(\tau) C_m^\pm(s);$$

$$a_m = \int_0^2 \ln \frac{1}{x} C_m(x)dx.$$

(Б.6)

После подстановки (Б.6) в уравнение (Б.5) и изменения порядка интегрирования получим формулу для вычисления контактных напряжений $\varphi_\pm(\tau) = p_\pm(ax)$;

$$\varphi_{\pm}(\tau) = f_{\pm}(\tau) - \frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \varphi_m^{\pm} \cdot C_m^{\pm}(\tau)$$ здесь: $\varphi_m^{\pm} = \int_0^1 \varphi_m^{\pm}(\tau) C_m^{\pm}(\tau) d\tau$ - коэффициент, определяемый из системы алгебраических уравнений вида:

$$\varphi_n^{\pm} + \frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m b^{\pm}{}_{mn} \varphi_m^{\pm} = f_n^{\pm}$$; n=0,1,2,3,....... (Б.7)

здесь: $b_{mn}^{\pm} = \int_0^1 C_m^{\pm}(\tau) C_n^{\pm}(\tau) d\tau$; . $f_n^{\pm} = \int_0^1 f_n^{\pm}(\tau) C_n^{\pm}(\tau) d\tau$ (Б.8)

В. Рассмотрим частный случай, когда вдавливается штамп с плоским основанием без перекоса, т.е $f_{\pm}(\tau) = f_{+}(\tau) = B = const$. Величину константы В определим из условия :

$$\int_{-a}^{a} p(x) dx = R \qquad \text{(В.9)}$$

В этом случае интегральное уравнение (Б.5) примет вид:

$$\varphi(\tau) + \frac{c}{\pi}\int_0^1 \left[ln\frac{1}{|s-\tau|} + ln\frac{1}{(s+\tau)} \right] \varphi(s) ds = B; \quad 0 \le \tau \le 1 \qquad \text{(В.10)}$$

Подставив сюда билинейное разложение (Б.6) и, учитывая, что $C_m^{\pm}(\tau) = Cos\frac{m\pi}{2}\tau$, имеем:

$$\varphi(\tau) + \frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m Cos(\frac{m\pi\tau}{2}) \int_0^1 \varphi(s) Cos(\frac{m\pi s}{2}) ds \qquad \text{(В.11)}$$

Обозначим $B \cdot X_m = \int_0^1 \varphi(s) Cos(\frac{m\pi s}{2}) ds$ и получим формулу для определения величин контактных напряжений:

$$\varphi(\tau) = B \cdot \left[1 - \frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m X_m Cos(\frac{m\pi\tau}{2}) \right] \qquad \text{(В.12)}$$

Умножим обе части уравнения (В.11) на $Cos(\frac{n\pi\tau}{2})$ и проинтегрируем от 0 до 1 по τ, получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения величин коэффициентов X_m:

$$X_n + \frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m b_{mn} X_m = f_n; \quad b_{mn} = \int_0^1 Cos(\frac{m\pi\tau}{2}) Cos(\frac{n\pi\tau}{2}) d\tau; \quad f_n = \int_0^1 B \cdot Cos(\frac{n\pi\tau}{2}) d\tau \qquad \text{(В.13)}$$

Система (В.13) будет регулярной, если выполняется условие (Г.Я.Попов ПММ 1969г.): $\frac{2c}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} |a_m b_{mn}| < 1 - \varepsilon$; в нашем случае $c < 1.501688 - \varepsilon$.

Определим величину константы В из условия (А.2).Введем обозначения: $\chi = \frac{2c}{\pi}; T_0^{(N)} = \frac{\chi a_0 X_0^{(N)}}{\sqrt{2}}; T_m^{(N)} = \chi a_m X_m^{(N)}$; здесь N указывает на количество членов бесконечного ряда, используемых для вычисления значений величин контактных напряжений по заданной точности.

$$B = \frac{R}{2a} \cdot \left[(1 - T_0^{(N)}) - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=1,3,5,...}^{N} (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{T_m^{(N)}}{m} \right]^{-1} \qquad \text{(В.14)}$$

Величины контактных напряжений определим по формуле:

$$\varphi(\tau) = p(ax) = B \cdot \left[(1 - T_0^{(N)}) - \sum_{m=1}^{N} T_m^{(N)} Cos(\frac{m\pi\tau}{2}) \right]; \quad 0 \le \tau \le 1 \qquad \text{(В.15)}$$

Для численной реализации задачи приводим значения коэффициентов, входящих в формулы (В.13,В.14,В.15):

при m = 0 $a_0 = \sqrt{2}(1 - \ln 2)$ = 0.433955418

$$a_m = \int_0^2 ln(\frac{1}{x})Cos(\frac{m\pi x}{2})dx =$$

при m > 0 $$a_m = \frac{2}{m\pi}(SI(m\pi) + \frac{\pi}{2}) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{m^{2k}\pi^{2k}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$$

при n = 0 $$f_0 = \frac{B}{\sqrt{2}} = 0.707106 \cdot B$$

$$f_n = B\int_0^1 Cos(\frac{n\pi x}{2})dx =$$

при n = 2k+1 $$f_n = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \cdot B \cdot \frac{2}{n\pi}$$

при n = 2k $f_n = 0$

$$b_{mn} = \int_0^1 Cos\frac{m\pi}{2}x \cdot Cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(n-m)}Sin\frac{(n-m)}{2}\pi + \frac{1}{(n+m)}Sin\frac{(n+m)}{2}\pi\right]$$ [5].

Заключение

Предложенный метод решения рассматриваемой контактной задачи выгодно отличается от способа [1] тем, что позволяет контролировать заданную точность получаемого решения в зависимости от значений упругих характеристик контактируемых тел и количеством компонентов (N) в формулах (B.13,B.14,B.15) решения задачи.

Например: При точности решения $\varepsilon = 10^{-3}$ для значения упругой характеристики c=0.1 требуется в формуле контактных напряжений всего два слагаемых и уравнение имеет вид:

$$\varphi(\tau) = \frac{R}{2a}(1.0300 - 0.047179\ Cos(\frac{\pi}{2}\tau)).$$

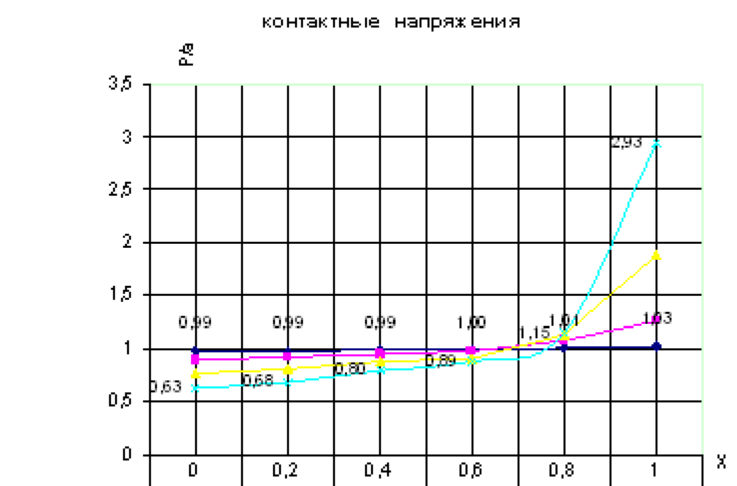
А для c = 10 потребуется семь слагаемых и уравнение будет иметь вид:

$$\varphi(\tau) = \frac{R}{2a}\Big[4.0783 - 4.5299\ Cos(\frac{\pi\tau}{2}) +$$

$$+ 0.74904\ Cos(\pi\tau) + 0.73273\ Cos(\frac{3\pi\tau}{2}) - 0.24477\ Cos(2\pi\tau) -$$

$$- 0.30500\ Cos(\frac{5\pi\tau}{2}) + 0.15082\ Cos(3\pi\tau)\Big].$$

Характер изменения контактных напряжений для различных значений упругих характеристик видно на графике (рис.1).



	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
C=0.1	0,98745	0,98945	0,99341	0,99884	1,011	1,0311
C=1	0,90489	0,9207	0,94894	0,98399	1,0791	1,2662
C=5	0,77689	0,81732	0,87885	0,91125	1,1428	1,8882
C=10	0,63122	0,68453	0,79954	0,88734	1,1456	2,9337

Рис.1. Характер изменения контактных напряжений
для различных значений упругих характеристик

Литература

1 Тимошенко С.П. Гудьер Дж. Теория упругости “ Наука “ Москва 1975г.

2 Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости “ Гостехиздат “ Москва 1949г.

3 Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформированного основания, “ Вища школа ” Киев 1982г.

4 Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений “ Наука “ Москва 1982г.

5 Попов Г.Я. Математические проблемы контактных задач (Учебное пособие), ОНУ, Одесса 1976г.